Построение трансверсали набора двусимвольных слов

Д.М. Алекберли

Аннотация. Решение ряда задач составления непрерывных расписаний, связано с понятием трансверсали. В ранее опубликованных автором работах получен критерий существования непрерывного размещения, наборов двусимвольных слов в матрицах с любым нечетным количеством столбцов. Было показано как при наличии трансверсали, получить непрерывное размещение. Настоящая статья предлагает детальный алгоритм построения трансверсали для наборов двусимвольных слов.

Ключевые слова: непрерывное расписание, оптимизация расписания, 2-слово, трансверсаль, алгоритм построения трансверсали.

Введение

Задачи составления расписаний, удовлетворяющих тем или иным условиям, являются актуальными в различных областях науки и техники, например, при составлении расписаний учебных занятий, графиков работы станков, хранении и передаче информации, транспортировке грузов. В данной статье рассматриваются вопросы, связанные с составлением, так называемых, непрерывных расписаний.

В работах [1-3] при решении задач составления непрерывных расписаний доказано, что условием существования таких расписаний является наличие одной или нескольких трансверсалей [4] размещаемого набора. При этом, критерий существования трансверсали сформулирован в *теореме Холла* [5].

Данная работа является продолжением исследования, начатого автором в работах [3,6,7]. В работе [6] было доказано, что для существования непрерывного расписания набора двусимвольных слов в матрице $M(p \times 3)$, $p \in \mathrm{N}$ необходимо и достаточно, чтобы для этого набора существовала трансверсаль. В работе [7] был получен ряд важных свойств, которыми обладают непрерывно размещенные наборы и их трансверсали. В данной работе получен метод построения трансверсали для набора двусимвольных слов, в котором кратность каждого символа не превосходит трех.

1. Определения и обозначения

Конечное множество попарно различных символов *a, b, c,…* назовем *алфавитом* A, $0 \notin A$.

Двусимвольным словом, далее *2-словом* $\omega = (a : b)$, будем называть неупорядоченную пару необязательно различных символов a, $b \in A$. Рассмотрим над алфавитом *A* набор (мультимножество) 2-слов *W*. Так как над алфавитом *A* могут задаваться различные наборы 2-слов, то подмножество символов алфавита *A,* образующих набор Ω, будем обозначать $A(\Omega)$. Трансверсаль набора *W* обозначим как *trv*(*W*). Кратность вхождения символа $a \in A$ в набор *W* обозначим как $rep_W a$.

Множество символов алфавита *A*, кратность которых в наборе *W* равняется *j*, обозначим $A_j(W)$, т.е. $A_j(W) \overset{def}{=} \{a \in A(W) \mid rep_W a = j\}$, где $j \in \mathrm{N}$.

$M[i]$ – набор символов алфавита $A(W)$, стоящих в i-ом столбце матрицы M.

Пусть мощность набора W равна p, а $rep_W a \le m$, тогда непрерывным размещением (расписанием) набора W в матрице $M(p \times m)$ будем называть размещение, удовлетворяющее условиям:

- каждое 2-слово занимает отдельную строку;
- символы каждого 2-слова располагаются в соседних столбцах;
- в каждом столбце все символы попарно различны.

2. Постановка задачи

Пусть набор 2-слов W удовлетворяет условию:

$$rep_W a \le 3, \ \ \forall a \in A(W) \qquad (2.1)$$

и условию теоремы Холла:

$$|\,\Omega\,| \le |\,A(\Omega)\,|, \ \forall \Omega \subseteq W. \qquad (2.2)$$

Требуется построить трансверсаль $trv(W)$.

3. Алгоритм построения трансверсали

Пусть набор W удовлетворяет условиям (2.1) и (2.2). Разместим набор W в матрице $M(p \times 2), \ \ p = |W|$ так, чтобы каждое слово располагалось в отдельной строке. При этом, если 2-слово записано в виде $\omega = (a:b)$, то это будет означать, что символ a располагается в первом столбце, а символ b - во втором. Все 2-слова набора W, состоящие из одинаковых символов, т.е. 2-слова вида $(x:x) \ \ x \in A(W)$, объединим в отдельный поднабор, который обозначим T. Не исключено, что при этом таких 2-слов не окажется в наборе W, тогда поднабор T будет пуст. Как показано в работе [6] из сделанных предположений относительно набора W следует, что все 2-слова вида $(x:x)$ различны. Следовательно, символы из $A(T)$, стоящие в первом столбце, будут попарно различны, т.е.

$$A(T) \cap M[1] = trv(T).$$

Тем самым начато построение трансверсали набора W.

В работе [6] показано, что все 2-слова, не вошедшие в поднабор T, составлены из различных символов:

$$(a:b) \in (W - T) \quad => \quad a \ne b.$$

Рассмотрим множество двукратных и трехкратных символов из $A(W)$, не попавших во множество $A(T)$:

$$[A_2(W) \cup A_3(W)] \setminus A(T). \qquad (3.1)$$

Дальнейшие действия удобно разбить на последовательность шагов.

Шаг 1. Множество (3.1) не пустое. Из множества (3.1) выберем произвольный символ a, тогда

$$a \in [A_2(W) \cup A_3(W)] \setminus A(T).$$

Ясно, что в наборе W найдется столько 2-слов, содержащих символ a, какова его кратность, т.е. найдутся

$$\omega_i = (a:b_i), \ \ i = 1..k, \ \ k \in \{2;3\}.$$

Дальнейшие шаги зависят от того, к какому из множеств принадлежит каждый символ b_i - к множеству (3.1), (3.2) или (3.3), где

$$[A_2(W) \cup A_3(W)] \cap A(T), \qquad (3.2)$$

$$A_1(W). \qquad (3.3)$$

Шаг 1.1. Все $b_i, \ \ i = 1..k, \ \ k \in \{2;3\}$, из множества (3.3), т.е.

$$b_i \in A_1(W).$$

Выберем любое $\omega_i = (a:b_i), \ \ i = 1..k$, $k \in \{2;3\}$ и поместим его в поднабор T и вновь возвращаемся к началу алгоритма: проверяем множество (3.1) на наличие в нем символов. Если (3.1) пустое, то переходим к шагу 2, если не пустое - к шагу 1.

Шаг 1.2. Ни один $b_i, \ \ i = 1..k, \ \ k \in \{2;3\}$ не содержится во множестве (3.1), при этом, по крайней мере, один символ b_i^1 удовлетворяет соотношению:

$$b_i^1 \in [A_2(W) \bigcup A_3(W)] \bigcap A(T) .$$

Тогда 2-слово $\omega = (a : b_i^1)$ помещаем в поднабор T и вновь возвращаемся к началу процесса: проверяем множество (3.1) на наличие в нем символов. Если (3.1) пустое, то переходим к шагу 2, если не пустое, то – к шагу 1.

Шаг 1.3. Среди символов b_i, $i = 1..k$, $k \in \{2;3\}$ имеется, по крайней мере, один b_i^* из множества (3.1). Помещаем 2-слово $\omega = (a : b_i^*)$ в поднабор *T*. В зависимости от кратности символа b_i^* переходим к шагу 1.3.1, или к шагу 1.3.2.

Шаг 1.3.1. Символ b_i^* - двукратен, т.е. $rep_W b_i^* = 2$, тогда существует еще одно 2-слово $(b_i^* : c)$, содержащее этот символ. Проверяем содержится ли символ c во множестве (3.1). Возможны два варианта $c \in A(T)$ и $c \notin A(T)$. Рассмотрим их более подробно.

Шаг 1.3.1.1. Символ c содержится во множестве (3.1). 2-слово $(b_i^* : c)$ помещаем в поднабор *T*. Так как символ c кратный, а в каждом 2-слове из поднабора $W - T$ символы различны, то в этом поднаборе найдется еще $k - 1$ ($k = rep_W c$) 2-слов, содержащих символ c: $(c : d_i)$, $i = 1..k-1$, $k \in \{2;3\}$. Теперь проверяем символы d_i на принадлежность к множествам (3.1) - (3.3). Таким образом, дальнейшие действия повторяют шаги 1.1, 1.2 и 1.3.

Шаг 1.3.1.2. Символ c не содержится во множестве (3.1). Помещаем 2-слово $(b_i^* : c)$ в поднабор T и переходим к выбору символа из множества (3.1): шаг 1 или шаг 2.

Шаг 1.3.2. Символ b_i^* - трехкратен, т.е. $rep_W b_i^* = 3$, тогда существует еще два 2-слова, содержащие этот символ: $(b_i^* : c_1)$ и $(b_i^* : c_2)$. Исследуем символы c_i $(i = 1,2)$ на принадлежность к множествам (3.1) - (3.3), т.е. переходим к шагам 1, 1.1 и т.д.

Последовательность действий, описанная шагом 1, продолжается до тех пор, пока множество (3.1) не станет пустым. После чего, переходим к действиям, описанным в шаге 2.

Шаг 2. Множество (3.1) пустое. Это означает, что все представители двукратных и трехкратных символов уже имеются в $trv(T)$. Тогда, как показано в работе [6], каждое 2-слово ω, не вошедшее в подмножество *T,* ($\omega \in (W - T)$), имеет в своем составе, по крайней мере, один из символов кратности единица. Т.е. если множество (3.1) пустое, для $\forall \omega_i \in (W - T)$ существует $e_i \in A_1(W)$ такое, что $e_i \in \omega_i$, $i \in \mathrm{N}$. Теперь все 2-слова поднабора $(W - T)$ можем занести в *T*. Но, при этом, запись каждого 2-слова из поднабора $(W - T)$ надо изменить так, чтобы однократные символы расположились в первом столбце матрицы *M*. В результате, в первом столбце матрицы *M* все символы будут попарно различны, поэтому $trv(W) = trv(T) = M[1]$. Что и требовалось получить.

В общих чертах описанный алгоритм можно изложить следующим образом. Если множество (3.1) непустое, то выбирая цепочки 2-слов вида:

$$(a : b_1) \to (b_1 : b_2) \to ... \to (b_{p-1} : b_p) \to (b_p : f), \quad (3.4)$$

где символы a, $b_1,...,b_p$ — кратные символы, не содержащиеся в $A(T)$, а символ f либо уже содержится в $A(T)$, либо однократный, и, пополняя поднабор T цепочками (3.4), мы, тем самым, пополним трансверсаль $trv(T)$ всеми новыми кратными символами из цепочки (3.4). Когда множество (3.1) окажется пустым, тогда каждое не вошедшее в поднабор T 2-слово будет содержать, по крайней мере, один однократный символ. Поэтому, меняя, при необходимости, порядок записи символов в этих 2-словах так, чтобы однократные символы попали в первый столбец матрицы M и, пополняя ими поднабор T до набора *W*, получим в $M[1]$ трансверсаль $trv(W)$.

Заключение

В статье получен алгоритм составления трансверсали для набора 2-слов. Этот алгоритм позволяет перевести задачу построения непрерывного расписания из теоретической плоскости в стадию практической реализации.

Литература

1. Магомедов Т.А. Непрерывное 3-тестирование. Материалы XVIII международной школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем» . — М.: МГУ, 2009, с. 61-62.
2. Лугуев Т.С. К вопросу об оптимизации расписания. — Труды молодых ученых ДГУ. — Махачкала: ИПЦ ДГУ, 2008, с. 71-72.
3. Алекберли Д.М. Условия оптимизации частного случая расписания из 2-нагрузок. Материалы XVIII Международной школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем» имени академика . Пенза. — М.: Изд-во мех.-мат. фак-та МГУ, 2009, с. 5-6.
4. Свами М., Тхуласираман К. Графы, сети и алгоритмы. — М.: Мир, 1984, с. 165-166.
5. Холл М. Комбинаторика. — М.: Мир, 1970. — 424 с.
6. Алекберли Д.М. k-разреженность непрерывного размещения 2-слов в матрице с любым нечетным числом столбцов. — Вестник ДГИНХ. Махачкала, 2010. №14, с. 183-191.
7. Алекберли Д.М. Критерий существования непрерывного размещения двусимвольных слов в матрице размера L×(2k+1). — Информационные технологии и вычислительные системы. 2010, №2, с. 50-58.

Алекберли Джалал Маратович. Заместитель начальника Информационно-аналитического отдела Управления Правительства республики Дагестан по информационным технологиям. Окончил Дагестанский государственный университет в 2006 году. Аспирант. Автор 8 печатных работ. Область научных интересов: дискретная математика, теория графов, теория расписаний. E-mail: djalal@mail.ru