

# Оптимизация квазистатического плана распределения вычислительных ресурсов специализированной вычислительной системы

М. Я. Агаларов, Я.М. Агаларов

**Аннотация.** Рассматривается задача оптимального распределения вычислительных ресурсов специализированной вычислительной системы с пуассоновским потоком заданий случайной длины и параллельным выполнением заданий одновременно на нескольких ресурсах. Время пребывания задания ограничивается заданной величиной, зависящей от его длины. Предлагается алгоритм оптимизации квазистатического плана распределения вычислительных ресурсов между заданиями. В качестве целевой функции используется один из показателей эффективности работы вычислительной системы: интенсивность полностью выполненных заданий, средняя суммарная длина невыполненных частей заданий, покидающих систему в единицу времени, коэффициент загрузки ресурсов. Приведены результаты вычислительных экспериментов и оценки трудоемкости предлагаемого алгоритма.

**Ключевые слова:** вычислительная система, элементарные задания, оптимизация плана, распределение вычислительных ресурсов, мультисервисная СМО.

## Введение

Оптимальное распределение ограниченного объема вычислительных и коммуникационных ресурсов является одной из основных задач, возникающих при разработке и эксплуатации вычислительных систем и сетей. Суть этой задачи заключается в следующем: требуется распределить ограниченный объем вычислительных и связных ресурсов между поступающими в систему (сеть) заданиями так, чтобы наилучшим образом обеспечить выполнение определенных требований, предъявляемых к качеству выполнения заданий, и эффективное использование ресурсов. Наиболее применяемым методом решения данной задачи является метод математического моделирования, в котором исходная задача приводится с использованием соответствующей математической модели к задаче математического программирования. Почти все используемые при этом модели можно отнести к одному из двух типов: детерминированные модели, которые исследуются методами теории расписаний [1-3] и вероятностные модели, которые исследуются методами теории массового обслуживания [4-9].

В данной работе рассматривается задача распределения ресурсов в мультисервисной СМО (системы массового обслуживания), к которой на практике приводятся задачи распределения ресурсов некоторых реальных систем, например такие задачи, как распределение вычислительных ресурсов многопроцессорной вычислительной системы с параллельными вычислениями между заданиями различной длины [4-5, 9] и распределение каналов в звене мультисервисной сети между заявками на различные услуги [6-8]. Обе указанные задачи можно свести, используя аналитиче-

ские выражения, описывающие мультисервисную СМО, к оптимизационной задаче математического программирования.

Приведем описание вычислительной системы и общую постановку задачи оптимального распределения вычислительных ресурсов системы, решение которой является основной целью данной работы (см. также [9]). На вход системы, состоящей из ограниченного числа одинаковых вычислительных ресурсов (ВР), поступает поток заданий, каждое из которых представляет собой совокупность элементарных заданий (ЭЗ). Каждое ЭЗ может независимо выполняться на любом ВР. Длина задания (количество ЭЗ, составляющих задание) является случайной величиной с заданной функцией распределения. Время выполнения каждого задания в системе ограничивается предельным значением, задаваемым заранее. Для управления распределением вычислительных и коммуникационных ресурсов, организации и контроля процессом выполнения заданий в системе выделен отдельный вычислительный ресурс, называемый центром управления (ЦУ), который связан с остальными ВР коммуникационной средой.

Выполнение задания в системе происходит следующим образом. Для каждого поступающего в систему задания ЦУ, согласно заданному плану распределения ресурсов, назначает определенное число ресурсов. Назначаемое число ресурсов должно быть не меньше и не больше соответствующих величин, задаваемых заранее. При наличии в системе назначенного числа свободных ресурсов задание до завершения его выполнения занимает их и они недоступны другим заданиям. Если в системе отсутствует назначенное число свободных ресурсов, задание не принимается (получает отказ) и теряется (или повторяется позже). Перед тем, как отправить задание на выполнение, в ЦУ задание предварительно разбивается на пакеты из определенного числа ЭЗ. Пакеты направляются на ресурсы группами, называемыми посылками, в каждой из которых (за исключением возможно последней) количество пакетов совпадает с количеством выделенных для задания ресурсов. Посылка занимает и освобождает все выделенные ресурсы одновременно, при этом один пакет занимает один ресурс. Линии связи и ВР могут подвергаться сбоям (коротким самовосстанавливающимся отказам). Выполнение пакета считается успешным, если во время его передачи или выполнения не произошел сбой, иначе выполнение пакета считается неуспешным. Неуспешно выполненный пакет включается в ЦУ в состав какой-нибудь вновь формируемой посылки этого же задания. Выполнение посылки считается завершенным, если выполнены (успешно или неуспешно) все составляющие ее пакеты. Очередную посылку ЦУ направляет на ресурсы только после завершения выполнения предыдущей посылки.

В задании с заранее известной вероятностью фиксированное число ЭЗ имеют отличительный признак, при обнаружении которого хотя бы в одном пакете задание сбрасывается из системы. Обнаружение отличительного признака в пакете возможно только при успешном его выполнении. Считается в априори, что ЭЗ с отличительным признаком может оказаться в любом пакете с равной вероятностью. Задание покидает систему либо в момент достижения временем выполнения предельного значения, либо в момент завершения выполнения очередной посылки, если обнаружили ЭЗ с отличительным признаком, либо после успешного выполнения всех пакетов задания, освободив одновременно все занятые им ресурсы. Время выполнения задания включает время его обработки в ЦУ, время передачи посылок по коммуникационной среде и вычисления на ВР.

Эффективность (например, интенсивность успешно выполненных в системе заданий, коэффициент загрузки вычислительных ресурсов и т. д.) рассматриваемой системы зависит от эффективности решений принимаемых в ЦУ, в частности от плана распределения ресурсов, используемого в ЦУ. Целью данной работы является разработка метода вычисления оптимального квазистатического плана распределения вычислительных ресурсов системы. Разработка и исследование метода проводится в рамках модели системы, описанной в [9].

## Модель системы

В качестве модели системы рассматривается мультисервисная СМО с явными потерями и произвольным временем обслуживания [6]. Для краткости изложения далее рассматривается только частный случай задачи, рассмотренный в [9], когда длина заданий является дискретной случайной величиной с конечным множеством значений и в каждом задании ровно одно ЭЗ с отличительным признаком. Введем используемые в дальнейшем обозначения:

- $R$  – число вычислительных ресурсов системы;
- $v$  – производительность ресурса;
- $M$  – число различных длин заданий;
- $L$  – множество различных длин заданий,  $L = \{l_{z_j}, j = 1, \dots, M\}$ ,  $l_{z_j}$  – длина задания;
- $j$ -задание – задание длины  $l_{z_j}$ ;
- $\lambda_j$  – интенсивность потока  $j$ -заданий;
- $lp_j$  – длина пакета  $j$ -задания;
- $n_j$  – число пакетов в  $j$ -задании;
- $kmax_j$  – максимальное число ресурсов, которое ЦУ может выделить для выполнения  $j$ -задания,  $0 \leq kmax_j \leq n_j$ ,  $kmax_j \leq R$ ;
- $kmin_j$  – минимальное число ресурсов, требуемых для выполнения  $j$ -задания,  $0 \leq kmin_j \leq kmax_j$ ;
- $m_j = (kmax_j - kmin_j)$ ,  $m_j + 1$  – число возможных вариантов выделения ресурсов для  $j$ -задания;
- $(j, i)$ -задание – это  $j$ -задание, число назначенных ресурсов которому равно  $(i + kmin_j)$ , (задание  $(j, i)$ -го типа);
- $W$  – множество всех возможных пар  $(j, i)$  таких, что  $j = 1, \dots, M$ ,  $i = 0, \dots, m_j$ ;
- $\alpha_j$  – вероятность искажения пакета  $j$ -задания (вероятность сбоя ресурса во время выполнения пакета  $j$ -задания);
- $\bar{t}_{z_j}$  – среднее времени обработки  $j$ -задания в ЦУ;
- $\bar{t}_{o_{ji}}$  – среднее время пребывания  $(j, i)$ -задания в системе;
- $t_{contrz,j}$  – ограничение сверху на время пребывания  $j$ -задания в системе (контрольное время).

В модели предполагается, что входной поток заданий – пуассоновский с заданной интенсивностью, время пребывания задания в ЦУ до начала передачи на ВР – случайная величина с заданным средним значением, время передачи пакета по коммуникационной среде – случайная величина с заданным средним значением, ВР системы имеют одинаковую производительность, производительность и вероятности сбоя ВР – заданные величины.

Определим квазистатический план распределения ресурсов. Пусть для  $j$ -задания ЦУ выделяет  $i + kmin_j$  ресурсов согласно вероятностному распределению  $p_{ji}$ ,  $i = 0, \dots, m_j$ ,  $\sum_0^{m_j} p_{ji} = 1$ . Набор  $\bar{p} = \{\bar{p}_j, j = 1, \dots, M\}$ , где  $\bar{p}_j = \{p_{ji}, i = 0, \dots, m_j\}$  назовем квазистатическим планом распределения ресурсов системы, через  $S$  обозначим множество всех возможных квазистатических планов  $\bar{p}$ . Заметим, что планом распределения допускается случай, когда для  $j$ -заданий  $kmin_j = 0$  и  $p_{j0} > 0$ , т.е. часть  $j$ -заданий получает в ЦУ отказ в предоставлении ресурсов.

Обозначим через  $\bar{k} = \{\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_M\}$  вектор состояния системы, где  $\bar{k}_j = \{k_{j0}, \dots, k_{jm_j}\}$ ,  $k_{ji}$  – число  $(j, i)$ -заданий в системе,  $\Omega$  – множество всех возможных состояний системы,  $\bar{\Omega}_{ji}$  – множество всевозможных значений вектора  $\bar{k}$  при которых  $(j, i)$ -задание получает отказ (т.е.  $\bar{\Omega}_{ji} = \{\bar{k}: R - i - kmin_j < \sum_{i=0}^{m_j} k_{ji}(i + kmin_j) \leq R\}$ ),  $p(\bar{k})$  – стационарная вероятность того, что вектор состояния системы равен  $\bar{k}$ ,  $\pi_{ji}$  – вероятность того, что  $(j, i)$ -задание получит отказ.

В обозначениях, приведенных выше, для стационарных вероятностей состояний системы справедлива формула [9]:

$$P(\bar{k}, \bar{p}) = P(\bar{0}, \bar{p}) \prod_{(j,i) \in W} \frac{\rho_{ji}^{k_{ji}}}{k_{ji}!}, \tag{1}$$

где  $\rho_{ji} = \lambda_j p_{ji} (\bar{t}_{0ji} - \bar{t}_{zj})$  – нагрузка, создаваемая  $(j, i)$ -заданиями, вероятность  $P(\bar{0}, \bar{p})$  вычисляется из условия нормировки и равна

$$P(\bar{0}, \bar{p}) = \left[ \sum_{\bar{k} \in \Omega} \prod_{(j,i) \in W} \frac{\rho_{ji}^{k_{ji}}}{k_{ji}!} \right]^{-1}.$$

Согласно (1) вероятность того, что  $(j, i)$ -задание получит отказ, равна

$$\pi_{ji} = \sum_{\bar{k} \in \bar{\Omega}_{ji}} P(\bar{k}, \bar{p}),$$

а вероятность того, что  $j$ -задание получит отказ, равна

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{m_j} p_{ji} \pi_{ji}. \tag{2}$$

Интенсивность выходного потока своевременно обслуженных заданий равна

$$A_{\text{вых}}(\bar{p}) = \sum_{j=1}^M \lambda_j \sum_{i=0}^{m_j} p_{ji} (1 - \pi_{ji}) B_{ji}(t_{\text{contrz},j}), \tag{3}$$

где  $B_{ji}(t_{\text{contrz},j})$  – вероятность того, что  $(j, i)$ -задание будет выполнено успешно. Формулы для вычисления  $\bar{t}_{0ji}$  и  $B_{ji}(t_{\text{contrz},j})$  приведены в [9].

Суммарная длина невыполненных пакетов заданий, покидающих систему в единицу времени равна:

$$L_{\text{откл}}(\bar{p}) = \sum_{j=1}^M \lambda_j \pi_j l z_j + \sum_{j=1}^M \lambda_j \sum_{i=0}^{m_j} p_{ji} (1 - \pi_{ji}) \sum_{k=1}^{n_j} Q_{n,j,k}(i) [L_j - (n_j - k) l p_j], \tag{4}$$

где  $Q_{n,j,k}(i)$  – вероятность того, что выполняемом  $(j, i)$ -задании успешно выполняются  $(n_j - k)$  пакетов (формулы расчета см. в [9]).

Коэффициент использования системы (загруженность системы) равен

$$U_R(\bar{p}) = P(\bar{0}, \bar{p}) \sum_{d=1}^R d q_d(\bar{p}) / R, \tag{5}$$

где  $q_d(\bar{p}) = \sum_{\bar{k} \in D_d} \prod_{(j,i) \in W} \frac{\rho_{ji}^{k_{ji}}}{k_{ji}!}$ ,  $D_d = \{\bar{k} \in \Omega: \sum_{j=1}^M \sum_{i=0}^{m_j} k_{ji} (i + k \min_j) = d\}$  при  $d \geq 0$ ,  $q_d(\bar{p}) = 0$  при  $d < 0$ .

### Оптимизация плана методом градиентного спуска

В данном разделе приведем описание основных расчетных формул, используемых в предлагаемой модификации метода градиентного спуска, и оценку объема вычислений, производимых на одном шаге этого метода. Обозначим:  $F(\bar{p})$  – целевая функция (одна из функций  $A_{\text{вых}}(\bar{p})$ ,  $-L_{\text{откл}}(\bar{p})$ ,  $U(\bar{p})$ ). Пусть  $\bar{p} \in S$  – фиксированный план. Заметим, что  $F(\bar{p})$  – непрерывно дифференцируемая функция. Определим отображение  $C_{\bar{p}}: S \rightarrow S$  следующего вида:

$$\bar{p}' = C_{\bar{p}} \bar{p}, \bar{p}' = \{\bar{p}'_s, s = 1, \dots, M\}, \bar{p}'_s = \{p'_{si}, i = 0, \dots, m_s\},$$

$$p'_{si} = \begin{cases} p_{si} - \delta_s \Delta_s, & \text{если } i = i_{min}, \\ p_{si} + \delta_s \Delta_s, & \text{если } i = i_{max}, \\ p_{si}, & \text{если } i \neq i_{min}, i \neq i_{max}, i = 0, \dots, m_s, \end{cases} \quad (6)$$

где  $i_{min}$  – индекс  $i$ , при котором достигается  $\min_{i \in \{0, \dots, m_j\}, p_{si} > 0} \frac{\partial F(\bar{p})}{\partial p_{si}}$ ,  $i_{max}$  – индекс  $i$ , при котором достигается максимум  $\max_{i \in \{0, \dots, m_s\}, p_{si} < 1} \frac{\partial F(\bar{p})}{\partial p_{si}}$ ,  $\Delta_s = \max_{i \in \{0, \dots, m_s\}, p_{si} < 1} \frac{\partial F(\bar{p})}{\partial p_{si}} - \min_{i \in \{0, \dots, m_j\}, p_{si} > 0} \frac{\partial F(\bar{p})}{\partial p_{si}}$ ,  $\delta_s > 0$  – масштабный параметр,  $p_{si} - \delta_s \Delta_s \geq 0$  при  $i = i_{min}$  и  $p_{si} + \delta_s \Delta_s \leq 1$  при  $i = i_{max}$ ,  $s = 1, \dots, M$ .

Суть предлагаемого метода оптимизации заключается в последовательном вычислении  $\bar{p}[n+1] = C_{\bar{s}} \bar{p}[n]$ ,  $n \geq 0$ , где  $\bar{p}[0]$  – заданный начальный план.

Получим выражения, с помощью которых можно вычислить производные  $\frac{\partial F(\bar{p})}{\partial p_{si}}$ ,  $i = 0, \dots, m_s$ ,  $s = 1, \dots, M$ .

Для случая  $F(\bar{p}) = \Lambda_{\text{вых}}(\bar{p})$  из (3) получим:

$$\frac{\partial F(\bar{p})}{\partial p_{si}} = \lambda_s (1 - \pi_{si}) B_{si}(t_{\text{contrz},s}) - \sum_{j=1}^M \lambda_j \sum_{r=0}^{m_j} p_{jr} B_{jr}(t_{\text{contrz},j}) \frac{\partial \pi_{jr}}{\partial p_{si}}. \quad (7)$$

Для случая  $F(\bar{p}) = L_{\text{откл}}(\bar{p})$  из (4) получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(\bar{p})}{\partial p_{si}} &= \lambda_s \pi_{si} l_{zs} + \sum_{j=1}^M \lambda_j l_{zj} \sum_{r=0}^{m_j} p_{jr} \frac{\partial \pi_{jr}}{\partial p_{si}} + \lambda_s (1 - \pi_{si}) \sum_{k=1}^{n_s} Q_{n_s k}(i) [L_s - (n_s - k) l_{ps}] - \\ &- \sum_{j=1}^M \lambda_j \sum_{r=0}^{m_j} p_{jr} \sum_{k=1}^{n_j} Q_{n_j k}(i) [L_j - (n_j - k) l_{pj}] \frac{\partial \pi_{jr}}{\partial p_{si}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Для случая  $F(\bar{p}) = U_R(\bar{p})$  из (5) получим:

$$\frac{\partial F(\bar{p})}{\partial p_{si}} = \frac{1}{R} \sum_{d=1}^R d \frac{\partial}{\partial p_{si}} q_d(\bar{p}) P(\bar{0}, \bar{p}), \quad (9)$$

где выражение  $q(d)$  приведено в (5).

**Утверждение 1.** Для производной функции  $\pi_{jr}$  по  $\rho_{si}$  справедливо равенство:

$$\frac{\partial \pi_{jr}}{\partial \rho_{si}} = (1 - \pi_{si})(\pi_{jr,si} - \pi_{jr}), \quad (10)$$

где  $\pi_{jr,si}$  – вероятность того, что в системе с общим числом  $(R - i - k_{min_s})$  ресурсов  $(j, r)$ -задание получит отказ,  $i = 0, \dots, m_s$ ,  $r = 0, \dots, m_j$ ,  $j, s = 1, \dots, M$ .

*Доказательство.* Введем обозначения:  $G_m(\bar{p}) = \sum_{d=0}^m q_d(\bar{p})$ ,  $\bar{k} \setminus \{k_{si}\}$  – вектор  $\bar{k}$ , из которого исключена компонента  $k_{si}$ ,  $[\dots]^-$  – целая часть числа в квадратных скобках. Заметим, что

$$\pi_{jr} = 1 - \frac{G_{R-r-k_{min_j}}(\bar{p})}{G_R(\bar{p})}, r = 0, \dots, m_j, j = 1, \dots, M. \quad (11)$$

Взяв производную функции  $q_d(\bar{p})$  по  $\rho_{si}$ , получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_d(\bar{p})}{\partial \rho_{si}} &= \frac{\partial}{\partial \rho_{si}} \sum_{\bar{k} \in D_d} \prod_{(j,l) \in W} \frac{\rho_{jl}^{k_{jl}}}{k_{jl}!} = \\ &= \frac{\partial}{\partial \rho_{si}} \sum_{k_{si}=0}^{\left[ \frac{d}{i+k_{min_s}} \right]^-} \frac{\rho_{si}^{k_{si}}}{k_{si}!} \sum_{\bar{k} \setminus \{k_{si}\} \in D_{d-k_{si}(i+k_{min_s})}} \prod_{(j,l) \in W, (j,l) \neq (s,i)} \frac{\rho_{jl}^{k_{jl}}}{k_{jl}!} = \\ &= \sum_{k_{si}=1}^{\left[ \frac{d}{i+k_{min_s}} \right]^-} \frac{\rho_{si}^{k_{si}}}{(k_{si}-1)!} \sum_{\bar{k} \setminus \{k_{si}\} \in D_{d-k_{si}(i+k_{min_s})}} \prod_{(j,l) \in W, (j,l) \neq (s,i)} \frac{\rho_{jl}^{k_{jl}}}{k_{jl}!} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k_{si}=0}^{\lfloor \frac{d-(i+k_{min_s})}{i+k_{min_s}} \rfloor} \frac{\rho_{si}^{k_{si}}}{k_{si}!} \sum_{\bar{k} \setminus \{k_{si}\} \in D_{d-(k_{si}+1)(i+k_{min_s})}} \prod_{(j,l) \in W, (j,l) \neq (s,i)} \frac{\rho_{jl}^{k_{jl}}}{k_{jl}!} = \\
 &= \sum_{\bar{k} \in D_{d-i-k_{min_s}}} \prod_{(j,l) \in W} \frac{\rho_{jl}^{k_{jl}}}{k_{jl}!} = q_{d-i-k_{min_s}}(\bar{p}). \tag{12}
 \end{aligned}$$

Взяв производную функции  $G_m(\bar{p})$  по  $\rho_{si}$ , получим:

$$\frac{\partial G_m(\bar{p})}{\partial \rho_{si}} = \sum_{d=0}^m \frac{\partial q_d(\bar{p})}{\partial \rho_{si}} = \sum_{d=0}^m q_{d-i-k_{min_s}}(\bar{p}) = G_{m-i-k_{min_s}}(\bar{p}). \tag{13}$$

Из (11) и последнего равенства получим

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \pi_{jr}}{\partial \rho_{si}} &= - \frac{\partial}{\partial \rho_{si}} \frac{G_{R-r-k_{min_j}}(\bar{p})}{G_R(\bar{p})} = - \frac{G_R(\bar{p}) \frac{\partial G_{R-r-k_{min_j}}(\bar{p})}{\partial \rho_{si}} - G_{R-r-k_{min_j}}(\bar{p}) \frac{\partial G_R(\bar{p})}{\partial \rho_{si}}}{G_R(\bar{p})^2} = \\
 &= - \frac{G_R(\bar{p}) G_{R-r-k_{min_j-i-k_{min_s}}}(\bar{p}) - G_{R-r-k_{min_j}}(\bar{p}) G_{R-i-k_{min_s}}}{G_R(\bar{p})^2} = \\
 &= \frac{G_{R-r-k_{min_j}}(\bar{p}) G_{R-i-k_{min_s}}(\bar{p})}{G_R(\bar{p}) G_R(\bar{p})} - \frac{G_{R-r-k_{min_j-i-k_{min_s}}}(\bar{p}) G_{R-i-k_{min_s}}(\bar{p})}{G_{R-i-k_{min_s}}(\bar{p}) G_R(\bar{p})} = \\
 &= \frac{G_{R-i-k_{min_s}}(\bar{p})}{G_R(\bar{p})} \left[ \frac{G_{R-r-k_{min_j}}(\bar{p})}{G_R(\bar{p})} - \frac{G_{R-r-k_{min_j-i-k_{min_s}}}(\bar{p})}{G_{R-i-k_{min_s}}(\bar{p})} \right] = (1 - \pi_{si})(\pi_{jr,si} - \pi_{jr}). \tag{14}
 \end{aligned}$$

Утверждение доказано.

**Следствие.** Справедливо равенство:

$$\frac{\partial \pi_{jr}}{\partial \rho_{si}} = \frac{\partial \pi_{si}}{\partial \rho_{jr}}, \quad i = 0, \dots, m_s, \quad r = 0, \dots, m_j, \quad j, s = 1, \dots, M. \tag{15}$$

**Доказательство.** Выражение (14) эквивалентно выражению

$$\frac{G_{R-r-k_{min_j-i-k_{min_s}}}(\bar{p}) G_{R-r-k_{min_j}}(\bar{p})}{G_{R-r-k_{min_j}}(\bar{p}) G_R(\bar{p})} - \frac{G_{R-r-k_{min_j}}(\bar{p}) G_{R-i-k_{min_s}}(\bar{p})}{G_R(\bar{p}) G_R(\bar{p})},$$

которое в свою очередь, эквивалентно выражению  $(1 - \pi_{jr})(\pi_{si,jr} - \pi_{si})$  (11). Так как последнее выражение, как следует из утверждения 1, равно производной  $\frac{\partial \pi_{si}}{\partial \rho_{jr}}$ , а (11) равно производной  $\frac{\partial \pi_{jr}}{\partial \rho_{si}}$ , получаем доказательство следствия.

Подставив (10) и равенство  $\frac{\partial \pi_{jr}}{\partial \rho_{si}} = \lambda_s \bar{t}_{si} \frac{\partial \pi_{jr}}{\partial \rho_{si}}$  в (7) и (8), получим следующие выражения для производных целевых функций.

Для случая  $F(\bar{p}) = A_{\text{вых}}(\bar{p})$ :

$$\frac{\partial F(\bar{p})}{\partial \rho_{si}} = \lambda_s (1 - \pi_{si}) [B_{si}(t_{\text{contrz},s}) - \bar{t}_{si} \sum_{j=1}^M \lambda_j \sum_{r=0}^{m_j} p_{jr} B_{jr}(t_{\text{contrz},j}) (\pi_{jr,si} - \pi_{jr})], \tag{16}$$

Для случая  $F(\bar{p}) = L_{\text{откл}}(\bar{p})$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F(\bar{p})}{\partial \rho_{si}} &= \lambda_s \pi_{si} l_{z_s} + \lambda_s (1 - \pi_{si}) \bar{t}_{si} \sum_{j=1}^M \lambda_j l_{z_j} \sum_{r=0}^{m_j} p_{jr} (\pi_{jr,si} - \pi_{jr}) + \\
 &+ \lambda_s (1 - \pi_{si}) \sum_{k=1}^{n_s} Q_{n_s k}(i) [L_s - (n_s - k) l_{p_s}] - \\
 &- \lambda_s (1 - \pi_{si}) \bar{t}_{si} \sum_{j=1}^M \lambda_j \sum_{r=0}^{m_j} p_{jr} (\pi_{jr,si} - \pi_{jr}) \sum_{k=1}^{n_j} Q_{n_j k}(i) [L_j - (n_j - k) l_{p_j}]. \tag{17}
 \end{aligned}$$

Рассмотрим случай  $F(\bar{p}) = U_R(\bar{p})$ . Из (9), (12) и (13), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(\bar{p})}{\partial \rho_{si}} &= \frac{1}{R} \sum_{d=1}^R d \frac{\partial}{\partial \rho_{si}} q_d(\bar{p}) P(\bar{0}, \bar{p}) = \frac{1}{R} \sum_{d=1}^R d \frac{\partial}{\partial \rho_{si}} \frac{q_d(\bar{p})}{G_R(\bar{p})} = \\ &= \frac{1}{R} \sum_{d=1}^R d \frac{G_R(\bar{p}) \frac{\partial}{\partial \rho_{si}} q_d(\bar{p}) - q_d(\bar{p}) \frac{\partial}{\partial \rho_{si}} G_R(\bar{p})}{G_R(\bar{p})^2} = \frac{1}{R} \sum_{d=1}^R d \frac{G_R(\bar{p}) q_{d-i-k\min_s} - q_d(\bar{p}) G_{R-i-k\min_s}}{G_R(\bar{p})^2} = \\ &= \frac{1}{R} \sum_{d=1}^R d \left[ \frac{q_{d-i-k\min_s}}{G_{R-i-k\min_s}} \frac{G_{R-i-k\min_s}}{G_R(\bar{p})} - \frac{q_d(\bar{p})}{G_R(\bar{p})} \frac{G_{R-i-k\min_s}}{G_R(\bar{p})} \right]. \end{aligned}$$

Далее, подставив (5) и (10) в левую часть последнего равенства, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(\bar{p})}{\partial \rho_{si}} &= (1 - \pi_{si}) \left[ \frac{1}{R} \sum_{d=1}^R d \frac{q_{d-i-k\min_s}}{G_{R-i-k\min_s}} - \frac{1}{R} \sum_{d=1}^R d \frac{q_d(\bar{p})}{G_R(\bar{p})} \right] = \\ &= (1 - \pi_{si}) \left[ \frac{1}{R} \sum_{d=i+k\min_s}^R d \frac{q_{d-i-k\min_s}}{G_{R-i-k\min_s}} - \frac{1}{R} \sum_{d=1}^R d \frac{q_d(\bar{p})}{G_R(\bar{p})} \right] = \\ &= (1 - \pi_{si}) \left[ \frac{1}{R} \sum_{d=0}^{R-i-k\min_s} (d+i+k\min_s) \frac{q_d}{G_{R-i-k\min_s}} - \frac{1}{R} \sum_{d=1}^R d \frac{q_d(\bar{p})}{G_R(\bar{p})} \right] = \\ &= (1 - \pi_{si}) \left[ \frac{R-i-k\min_s}{R} U_{R-i-k\min_s}(\bar{p}) - U_R(\bar{p}) + \frac{i+k\min_s}{R} \right], \end{aligned}$$

так как  $\sum_{d=0}^{R-i-k\min_s} \frac{q_d(\bar{p})}{G_{R-i-k\min_s}} = 1$  и  $\frac{1}{R-i-k\min_s} \sum_{d=0}^{R-i-k\min_s} d \frac{q_d(\bar{p})}{G_{R-i-k\min_s}} =$

$$= U_{R-i-k\min_s}(\bar{p}).$$

Таким образом, для случая  $F(\bar{p}) = U_R(\bar{p})$  имеем:

$$\frac{\partial F(\bar{p})}{\partial \rho_{si}} = \lambda_s (1 - \pi_{si}) \bar{t}_{si} \left[ \frac{R-i-k\min_s}{R} U_{R-i-k\min_s}(\bar{p}) - U_R(\bar{p}) + \frac{i+k\min_s}{R} \right]. \quad (18)$$

**Утверждение 2.** В случае  $F(\bar{p}) = U_R(\bar{p})$  неравенство  $\frac{\partial F(\bar{p})}{\partial \rho_{si}} \geq 0$  верно тогда и только тогда,

когда верно неравенство  $U_{R-i-k\min_s}(\bar{p}) \geq U_R(\bar{p})$ , при этом

$$\frac{\partial F(\bar{p})}{\partial \rho_{si}} = 0 \text{ тогда и только тогда, когда } U_{R-i-k\min_s}(\bar{p}) = U_R(\bar{p}).$$

*Доказательство.* Пусть верно неравенство  $U_{R-i-k\min_s}(\bar{p}) \geq U_R(\bar{p})$ . Тогда из (18) имеем

$$\frac{\partial F(\bar{p})}{\partial \rho_{si}} \geq \lambda_s (1 - \pi_{si}) \bar{t}_{si} \left[ \frac{R-i-k\min_s}{R} U_R(\bar{p}) - U_R(\bar{p}) + \frac{i+k\min_s}{R} \right] \geq 0.$$

Пусть в некоторой точке  $\bar{p}$  верно  $\frac{\partial F(\bar{p})}{\partial \rho_{si}} \geq 0$  и верно  $U_{R-i-k\min_s}(\bar{p}) < U_R(\bar{p})$ . Тогда из (18) следует

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(\bar{p})}{\partial \rho_{si}} &= \frac{R-i-k\min_s}{R} U_{R-i-k\min_s}(\bar{p}) - U_R(\bar{p}) + \frac{i+k\min_s}{R} < \\ &< \frac{R-i-k\min_s}{R} U_{R-i-k\min_s}(\bar{p}) - U_{R-i-k\min_s}(\bar{p}) + \frac{i+k\min_s}{R} = 0, \text{ что не может быть, так как по предположению } \frac{\partial F(\bar{p})}{\partial \rho_{si}} \geq 0. \end{aligned}$$

Следовательно, верно  $U_{R-i-k\min_s}(\bar{p}) \geq U_R(\bar{p})$ . Вторая часть следствия доказывается аналогично.

### Алгоритм оптимизации плана

I. Шаг 0. Выбор начального плана. В качестве начального плана предлагается выбрать статический план  $\bar{p}[0]$ , рассмотренный в [9]:

$\bar{p}[0] = \{\bar{p}_j[0], j = 1, \dots, M\}$ , где  $\bar{p}_j[0] = \{p_{ji}[0], i = 0, \dots, m_j\}$ ,  $p_{ji}[0] = 1$  при  $i = m_j^0 - kmin_j$ ,  $p_{ji}[0] = 0$  при  $i \neq m_j^0 - kmin_j$ ,

$$m_j^0 = \min \left\{ \max \left\{ \left[ \frac{lz_j}{v(t_{contrz,j} - \bar{t}_{z_j})} \right]^-, kmin_j \right\}, kmax_j \right\}, \text{ где } m_j^0 \leq R,$$

$$j = 1, \dots, M.$$

С помощью дискретного аналога формулы (2) из [9] вычисляется массив  $\{\bar{t}_{si}, i = 0, \dots, m_s, s = 1, \dots, M\}$ . Если целевой функцией является  $L_{откл}(\bar{p})$ , то с помощью дискретного аналога формулы (1) из [9] вычисляется массив  $\{a[j], j = 1, \dots, M\}$  — значений выражения  $\sum_{k=1}^{n_j} Q_{n_j k}(i)[L_j - (n_j - k)lp_j]$ , используемого в (4). Если целевой функцией является  $L_{вых}(\bar{p})$ , то с помощью дискретного аналога формулы (1) из [9] вычисляется массив  $\{B_{ji}(t_{contrz,j}), i = 0, \dots, m_j, j = 1, \dots, M\}$ .

II. Шаг  $k > 0$ .

1) Вычисляются производные  $\frac{\partial F(\bar{p})}{\partial p_{si}} i = 0, \dots, m_s, s = 1, \dots, M$ :

а) вычисляется массив значений  $q_d(\bar{p}[k-1]), d = 0, 1, \dots, R$  по рекуррентной формуле (например, [7]):

$$dq_d(\bar{p}[k-1]) = \sum_{(s,i) \in W} (i + kmin_s) \rho_{si} q_{d-i-kmin_s}(\bar{p}[k-1]); \tag{19}$$

б) вычисляются значения параметров:  $P(\bar{0}, \bar{p}[k-1]) = \left\{ \sum_{d=0}^R q_d(\bar{p}[k-1]) \right\}^{-1}$ ,

$$\pi_{si} = P(\bar{0}, \bar{p}[k-1]) \sum_{d=R-i-kmin_s+1}^R q_d(\bar{p}[k-1]),$$

$$\pi_{jr,si} = \left\{ \sum_{d=0}^{R-i-kmin_s} q_d(\bar{p}[k-1]) \right\}^{-1} \sum_{d=R-i-kmin_s-r-kmin_j+1}^{R-i-kmin_s} q_d(\bar{p}[k-1]),$$

$U_{R-i-kmin_s}(\bar{p})$  и  $U_R(\bar{p})$  по формуле (5) (в случае целевой функции  $U_R(\bar{p})$ ),

$$i = 0, \dots, m_s, r = 0, \dots, m_j, s, j = 1, \dots, M.$$

в) подставив значения параметров, вычисленных в пункте б), в одну из формул (16), (17) и (18) (в зависимости от выбранной целевой функции) вычисляются производные  $\frac{\partial F(\bar{p})}{\partial p_{si}}$

$$i = 0, \dots, m_s, s = 1, \dots, M.$$

2) для каждого  $j = 1, \dots, M$  вычисляются  $i_{min}$  и  $i_{max}$ .

3) с помощью отображения  $C_{\bar{\delta}}$  корректируется план  $\bar{p}[k-1]$ :  $\bar{p}[k] = C_{\bar{\delta}} \bar{p}[k-1]$ .

III. Проверка условия останова. Если для всех  $j = 1, \dots, M$  выполняется условие  $\delta_j \Delta_j < \varepsilon$ , где  $\varepsilon > 0$  — заданная точность приближения, алгоритм переходит на пункт IV, иначе переходит на пункт II.

IV. Вычисление выходных данных. Основным результатом работы алгоритма считается полученный на последнем шаге план распределения ресурсов  $\bar{p}[k]$ . Используя (в зависимости от целевой функции) массивы  $\{\bar{t}_{si}, i = 0, \dots, m_s, s = 1, \dots, M\}$ ,  $\{a[j], j = 1, \dots, M\}$ ,  $B_{ji}(t_{contrz,j}), i = 0, \dots, m_j, j = 1, \dots, M$ , вычисленные на нулевом шаге и значения параметров, полученные на последнем шаге, вычисляется значение целевой функции.

Приведем оценки трудоемкости алгоритма, полученные для его реализации на языке Delphi 7, использованной в следующем разделе при проведении вычислительных экспериментов:

- В пункте I алгоритма выполняются порядка  $\approx O(K_1) + O(K_2)$  элементарных операций (арифметических или операций сравнения), где  $K_1 = \sum_{j=1}^M kmax_j^2 n_j^2$  – объем вычислений для расчета матриц вида  $B$  из [9],  $K_2 = \sum_{j=1}^M n_j kmax_j \left[ \frac{v(t_{contrz,j} - \bar{t}_{zj})}{lp_j} \right]^+$  – объем вычислений для расчета среднего времени выполнения и вероятности успешного выполнения заданий всех типов (соответствующие формулы в [9]).

- В пункте II в случае целевых функций  $L_{\text{вых}}(\bar{p})$  и  $L_{\text{откл}}(\bar{p})$  выполняются порядка  $\approx O(N^3 + RN^2)$  элементарных операций и  $\approx O(NR)$  операций в случае  $U_R(\bar{p})$ , где  $N = \sum_{j=1}^M m_j$ .

- В пункте III выполняются порядка  $\approx O(N)$  элементарных операций.

При этом объем используемых алгоритмом массивов чисел равен величине порядка  $(12N + 3M + 3R)$ .

Возможны варианты реализации данного алгоритма, выполняющие меньшее число вычислений за счет увеличения используемого объема памяти ЭВМ. Например, если величины  $\pi_{jr,si}$  хранить в памяти в виде массива (размера  $N^2$ ), то объем выполняемых алгоритмом операций будет иметь в случае  $F(\bar{p}) = L_{\text{вых}}(\bar{p})$  порядок  $\approx O(N^2) + O(RN)$ .

Отметим, что при реализации алгоритма были использованы формулы (3) – (5), (10), (15) – (19) и утверждение 2.

## Примеры вычислительных экспериментов

В качестве примера рассматривается система, состоящая из  $R = 15$  ресурсов с производительностью  $v = \frac{10}{3}$  каждый. Исходные данные:  $\varepsilon = 0,0001$ ,  $M = 5$ ,  $lz_j = 2j$ ,  $t_{zj} = 0$ ,  $lp_j = 2$ ,  $\alpha_j = 0,0199$ ,  $j = 1, \dots, 5$ . В Табл. 1 приведены результаты оптимизации плана распределения ресурсов при  $kmin_j = 1$ ,  $kmax_j = j$ ,  $\lambda_j = 1$  и начальном плане  $\bar{p}$  с  $p_{ji} = \frac{1}{j}$ ,  $i = 1, \dots, j$ ,  $j = 1, \dots, 5$ . Числа в 2-й, 3-й и 4-й строках таблицы 1 – значения функций  $L_{\text{вых}}(\bar{p})$ ,  $L_{\text{откл}}(\bar{p})$  и  $U_R(\bar{p})$  вычисленные при оптимальном плане  $\bar{p}_1$ , полученном с помощью алгоритма для целевой функции  $L_{\text{вых}}(\bar{p})$ , в 5-й и 6-й строках – значения функций  $L_{\text{вых}}(\bar{p})$  и  $L_{\text{откл}}(\bar{p})$  вычисленные при оптимальном плане  $\bar{p}_2$ , полученном для целевой функции  $L_{\text{откл}}(\bar{p})$ , в 6-й строке – значения  $U_R(\bar{p})$ , вычисленные при оптимальном плане  $\bar{p}_3$ , полученном для целевой функции  $U_R(\bar{p})$ , в 7-й строке – значения функции  $L_{\text{вых}}(\bar{p})$ , вычисленные при плане  $\bar{p}_0$ , вычисленном на нулевом шаге алгоритма (см. выше), согласно которому число выделяемых  $j$ -заданию каналов пропорционально величине  $\frac{lz_j}{t_{contrz,j}}$ . На Рис. 1 приведены графики 1, 2, 3, 4 и 5, соответствующие строкам 2, 3, 5, 6 и 8 в Табл. 1. На Рис. 2 изображены графики соответствующих планам  $\bar{p}_1$  и  $\bar{p}_3$  зависимостей функции  $U_R(\bar{p})$  от значения параметра  $t_{contrz,j}$ . График 1 на Рис. 2 соответствует 4-й строке Табл. 1, график 2 соответствует 7-й строке Табл. 1, значения параметра  $t_{contrz,j}$  взяты из 1-й строки Табл. 1. Планы  $\bar{p}_0, \bar{p}_1, \bar{p}_2$  и  $\bar{p}_3$ , вычисленные при различных значениях параметра  $t_{contrz,j}$  (также Табл.1), приведены в Табл. 2. В первом столбце Табл. 2 приведены возможные значения индексов  $j, i$  компоненты  $p_{ji}$  плана  $\bar{p}$ , в остальных столбцах – наборы значений компонентов  $p_{ji}$  планов  $\bar{p}_0, \bar{p}_1, \bar{p}_2$  и  $\bar{p}_3$ , при этом на первом месте в наборе стоит значение компоненты плана  $\bar{p}_0$ , на втором – плана  $\bar{p}_1$ , на третьем – плана  $\bar{p}_2$ , на четвертом – плана  $\bar{p}_3$ .

В Табл. 3 и на Рис. 3 приведены значения функции  $L_{\text{вых}}(\bar{p})$ , вычисленные при различных значениях (первая строка Табл. 3) интенсивностей входных потоков  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5$  и  $t_{contrz,j} = 3,2$ . Вторая строка Табл. 3 и график 1 на Рис. 3 соответствуют оптимальному плану  $\bar{p}_4$ , полученному с помощью алгоритма для целевой функции  $L_{\text{вых}}(\bar{p})$ , третья строка и график 2 – плану  $\bar{p}_5$  с  $p_{ji} = \frac{1}{j}$ ,  $i = 1, \dots, j$ ,  $j = 1, \dots, 5$ , четвертая строка и график 3 – плану  $\bar{p}_0$  из Табл. 2.

Табл. 1. Зависимость функций  $\Lambda_{\text{вых}}(\bar{p})$ ,  $L_{\text{откл}}(\bar{p})$ ,  $U_R(\bar{p})$  от параметра контрольного времени

$t_{\text{contrz},j}$	0,8	1,2	1,6	2	2,4	2,8	3,2
$\Lambda_{\text{вых}}(\bar{p}_1)$	4,20184	4,186669	4,738278	4,906555	4,905988	4,948689	4,974374
$L_{\text{откл}}(\bar{p}_1)$	2,779924	2,836071	0,830035	0,270966	0,272986	0,130226	0,046716
$U_R(\bar{p}_1)$	0,495609	0,499837	0,475814	0,444178	0,444929	0,428528	0,412046
$\Lambda_{\text{вых}}(\bar{p}_2)$	3,856494	3,966764	4,629054	4,906555	4,905988	4,948691	4,973859
$L_{\text{откл}}(\bar{p}_2)$	2,272419	2,601319	0,690999	0,270966	0,272986	0,130216	0,038297
$U_R(\bar{p}_3)$	0,495608	0,509238	0,509773	0,510045	0,510055	0,510056	0,510055
$\Lambda_{\text{вых}}(\bar{p}_0)$	4,046	3,077	4,629	4,906	4,681	4,949	4,974

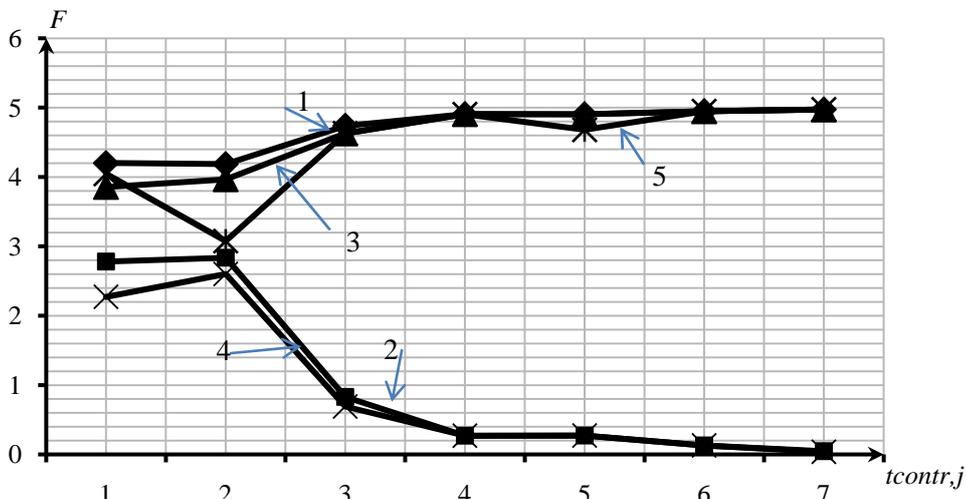


Рис. 1. Зависимость функций  $\Lambda_{\text{вых}}(\bar{p})$ ,  $L_{\text{откл}}(\bar{p})$ ,  $U_R(\bar{p})$  от параметра контрольного времени

Табл. 2. Планы  $\bar{p}_0, \bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3$

$(j,i)$	$t_{\text{contrz},j}$						
	0,8	1,2	1,6	2	2,4	2,8	3,2
00	1;1;1;1	1;1;1;1	1;1;1;1	1;1;1;1	1;1;1;1	1;1;1;1	1;1;1;1
10	0;0;0;0	1;0;0;0	1;1;1;0	1;1;1;0	1;1;1;0	1;1;1;0	1;1;1;0
11	1;1;1;1	0;1;1;1	0;0;0;1	0;0;0;1	0;0;0;1	0;0;0;1	0;0;0;1
20	0;0;0;0	0;0;0;0	0;0;0;0	1;0;1;0	1;1;1;0	1;1;1;0	1;1;1;0
21	0;0;0,904;0	1;0;0;0	1;1;1;0	0;1;0;0	0;0;0;0	0;0;0;0	0;0;0;0
22	1;1;0,096;1	0;1;1;1	0;0;0;1	0;0;0;1	0;0;0;1	0;0;0;1	0;0;0;1
30	0;0;0;0	0;0;0;0	0;0;0;0	0;0;0;0	1;0;0;0	1;1;1;0	1;1;1;0
31	0;0;0;0	1;0;0;0	1;1;1;0	1;1;1;0	0;1;1;0	0;0;0;0	0;0;0;0
32	1;0;1;0	0;0;1;1	0;0;0;1	0;0;0;1	0;0;0;1	0;0;0;1	0;0;0;1
33	0;1;0;1	0;1;0;0	0;0;0;0	0;0;0;0	0;0;0;0	0;0;0;0	0;0;0;0
40	0;0;0;0	0;0;0;0	0;0;0;0	0;0;0;0	0;0;0;0	0;0;0;0	1;0,782;1;0
41	0;0;0;0	0;0;0;0	1;0;1;0	1;0;1;0	1;1;1;0	1;1;1;0	0;0,218;0;0
42	0;0;0;0	1;0;0;0	0;1;0;0	0;1;0;0	0;0;0;0	0;0;0;0	0;0;0;0
43	1;0;1;0	0;0;1;1	0;0;0;1	0;0;0;1	0;0;0;1	0;0;0;1	0;0;0;1
44	0;1;0;1	0;1;0;0	0;0;0;0	0;0;0;0	0;0;0;0	0;0;0;0	0;0;0;0

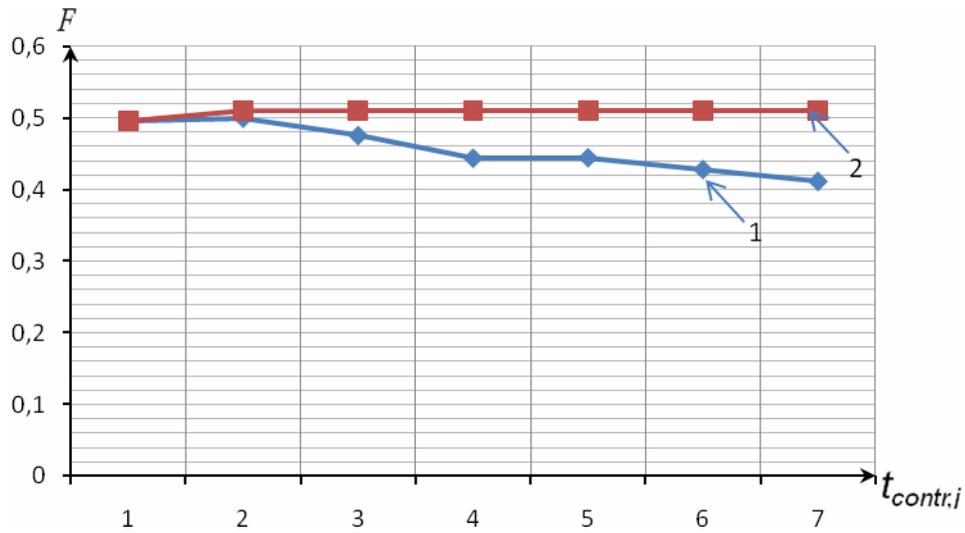


Рис. 2. Зависимость коэффициента загрузки ресурсов системы от параметра контрольного времени

Табл. 3. Зависимость  $L_{вых}(\bar{p})$  от интенсивности входной нагрузки при  $t_{contr,z,j}=3,2, j=1, \dots, 5$

$\lambda_j$	1	2	3	4	5
$L_{вых}(\bar{p}_1)$	4,974374	9,039032	10,69527	11,57504	12,34993
$L_{вых}(\bar{p}_2)$	4,6979	7,561	9,0826	10,03	10,6954
$L_{вых}(\bar{p}_0)$	4,974	9,039	10,695	11,296	11,571

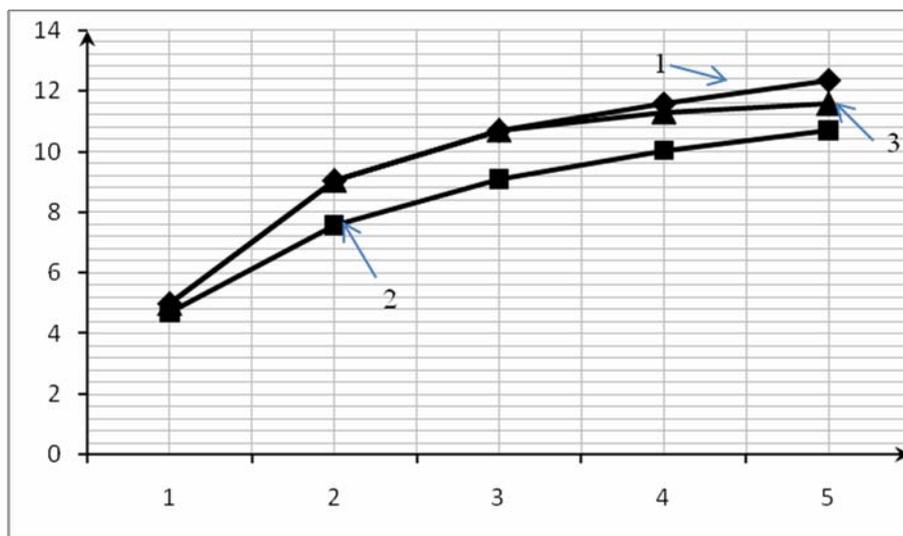


Рис. 3. Зависимость  $L_{вых}(\bar{p})$  от интенсивности входной нагрузки

## Заключение

Задача поиска оптимального статического плана распределения ресурсов рассматриваемой системы относится к задаче дискретной оптимизации и по сложности относится к NP-полным. Решение данной задачи методами дискретного программирования не применимо на практике в случае больших значений параметра  $N = \sum_{j=1}^M m_j$ , иначе эффект от использования оптимального распределения может быть сведен на нет трудоёмкостью получения самого распределения. Использование в рассматриваемой нами вычислительной системе квазистатического плана распределения ресурсов превращает задачу дискретной оптимизации в задачу непрерывной оптимизации, для решения которой нашли приемлемый на практике алгоритм.

Сложность выражений, описывающих зависимость рассмотренных выше целевых функций от плана распределения ресурсов, затрудняет получение в аналитическом виде оценки оптимальности разработанного алгоритма (в смысле достижения глобального оптимума целевой функции). Данный алгоритм, как следует из градиентного метода и свойств рассмотренных выше целевых функций, гарантирует приближение к локальному оптимуму с любой заранее заданной точностью. Отметим, что все приведенные выше в примерах планы, полученные разработанным алгоритмом, при округлении их компонентов до ближайших целых чисел совпадают с оптимальными статическими планами (это показали расчеты, проведенные методом полного перебора).

Как показывают результаты вычислительных экспериментов, разработанный алгоритм оптимизации плана может существенно повысить эффективность вычислительной системы (Рис. 1, Рис. 2 и Рис. 3), при этом эффект от использования оптимального плана с ростом интенсивности входных потоков возрастает (Рис. 3). Отметим также, что эксперименты показали существенную зависимость эффективности системы от контрольного времени (Рис. 1 и Рис. 2).

Заметим, что описанные в данной работе метод и алгоритм оптимального распределения ресурсов вычислительной системы можно применить также при решении задачи оптимального распределения ресурсов других систем, в которых в качестве модели используют мультисервисную СМО, например, при разработке алгоритма распределения канальных ресурсов в мультисервисной сети [6-8].

## Литература

1. Теория расписаний и вычислительные машины // Под ред. Коффмана Э.Г. – М.: Наука, 1984.
2. Гуз Д. С., Красовский Д. В., Фуругян М. Г. Эффективные алгоритмы планирования вычислений в многопроцессорных системах реального времени. – М.: ВЦ РАН, 2004.
3. Голосов П.Е., Козлов М. В., Малашенко Ю. Е., Назарова И. А., Ронжин А. Ф. Модель системы управления специализированным вычислительным комплексом // Сообщения по прикладной математике. – М.: ВЦ РАН, 2010.
4. Яшков С.Ф. Математические вопросы теории систем массового обслуживания с разделением процессора // Итоги науки и техники. Серия «Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика», 1990. № 29. С. 3 – 82.
5. Borst S., Voxma O., Groote J. F., Mauw S. Task allocation in a multi-server system // J. of Scheduling, 2003. No. 6. P. 423–436.
6. Ross K. W. Multiservice Loss Models for Broadband Telecommunication Networks. – Springer Verlag, 1995.
7. Башарин Г. П. Лекции по математической теории телетрафика. – М.: РУДН, 2007.
8. Iversen V. B. Teletraffic engineering and network planning. DTU Course 34340. – Technical University of Denmark, Revised January 24, 2011. <http://oldwww.com.dtu.dk/education/34340/telenook.pdf>.
9. М.Я. Агаларов. Аналитическая модель расчета эффективности плана распределения вычислительных ресурсов многопроцессорной системы при решении специального класса задач // Информатика и ее применения, 2011. Т. 5. Вып.4. С. 23–35.

**Агаларов Мурад Яверович.** Аспирант ИПИ РАН. Окончил факультет Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова 2009 году. Автор двух печатных работ. Область научных интересов: информатика, прикладная математика. E-mail: [murad-Agalarov@yandex.ru](mailto:murad-Agalarov@yandex.ru)

**Агаларов Явер Мирзабекович.** Ведущий научный сотрудник ИПИ РАН. Окончил Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова 1974 году. Автор 51 печатной работы и двух книг. Область научных интересов: информационные и телекоммуникационные технологии, математическое моделирование. E-mail: [agglar@yandex.ru](mailto:agglar@yandex.ru)