

Устойчивые алгоритмы фильтрации – обзор и новые результаты для систем судовождения

И.В. Семушин, Ю.В. Цыганова, К.В. Захаров

Аннотация. Рассматривается дискретная фильтрация с акцентом на вычислительный аспект. Дается краткий обзор численно устойчивых реализаций, основанных на базовых математических идеях: факторизация положительно определенных (ковариационных или информационных) матриц, скаляризация векторных измерений, триангуляризация матриц и ортогонализация блочных матриц. Для решения практической нелинейной задачи анализа движения целей предлагается LD-алгоритм расширенного фильтра Калмана. Обсуждается применение этого алгоритма для судовождения (включая предотвращение столкновений судов).

Ключевые слова: вычислительная обработка данных, дискретная фильтрация, расходимость фильтра, численная устойчивость, расширенный фильтр Калмана, цифровое имитирование и моделирование систем.

Введение

Вскоре после открытия Калманом своего ставшего знаменитым нового подхода к задачам фильтрации и предсказания [1] выяснилось, что это изящное решение, которое теперь принято называть «обыкновенным» (the conventional Kalman filter, СКФ), работает хорошо лишь в исключительных – так называемых хорошо обусловленных – задачах и расходится в большинстве практических задач.

Явление расходимости теоретического алгоритма СКФ, детально исследованное 10 лет спустя [2], породило поиски альтернатив, алгебраически эквивалентных СКФ, но в вычислениях значительно более устойчивых. В 1963 году Поттер нашел первое решение [3] в связи с разработкой лунохода (Lunar Excursion Module, LEM) для Программы Аполлон. По природе, это квадратно-корневой алгоритм, названный PSRF (Potter Square Root Filter).

Будучи приспособлен лишь для ограниченных случаев (некоррелированность скалярных измерений и отсутствие шума в уравнении состояния), PSRF породил две ключевые идеи: фак-

торизация (разложение на множители) ковариационных матриц, чтобы устранить опасность потери положительной определенности, и декорреляция векторных измерений и последующая их скаляризация, чтобы устранить операцию вычисления обратной матрицы в алгоритме СКФ.

Любой квадратно-корневой алгоритм фильтрации численно более устойчив, чем СКФ, так как число обусловленности квадратного корня из ковариационной матрицы есть квадратный корень из числа обусловленности соответствующей ковариационной матрицы. Этот факт широко известен и вошел в учебные курсы численных методов алгебры (разложение Холецкого) [4].

Другая идея, сейчас также вошедшая в учебные курсы [4], – ортогонализация матриц – развивалась параллельно для численного решения плохо обусловленных и переопределенных систем по методу наименьших квадратов (МНК) [5]. Важный промежуточный результат тех лет – опубликование обзора [6] и монографии Бирмана [7].

Кроме исходных аэрокосмических приложений, эти и другие современные методы калма-

новской фильтрации вошли в другие области: эконометрика [8], метеорология [9], спутниковая геодезия [10], телекоммуникационные сети [11], высоконадежная спутниковая навигация [12], обработка изображений в реальном времени [13] и многое другое.

Казалось бы, основные идеи исчерпаны и все полезные результаты в этой области получены. Однако широта приложений заставила использовать новую вычислительную среду реализации этих алгоритмов – параллельные компьютеры [14], [15], в результате чего они оказались представлены в новой, «блочной» форме [16]. Появилось учебное пособие, рассчитанное на широкий круг пользователей и отражающее почти все достижения в этой области к концу XX века [17].

Все указанные исследования велись за пределами СССР. По настоящее время они остаются в России малоизвестными, применены в немногих сложных проектах (например, в авиационном приборостроении [18] или судостроении [19, 20]) и преподаются в немногих специальных курсах [21]. В российской научной литературе квадратно-корневые алгоритмы фильтрации совсем не изложены или освещены слабо [22, 23]. Так, в книге Огаркова (1990) [23] этой теме посвящен лишь один параграф 3.7. Этот недостаток литературы сказывается в том, что многие отечественные специалисты в прикладных областях регрессионного моделирования или эконометрики продолжают использовать алгоритмы, которые можно считать устаревшими, несмотря на то, что они испытывают значительные трудности в случае плохо обусловленной схемы наблюдения или при мультиколлинеарности регрессоров [24]. Даже в публикациях последних лет [25] авторы пользуются уравнениями фильтра Калмана в их классическом виде, а не в форме современных вычислительно эффективных алгоритмов.

Квадратно-корневые, а также совмещенные (одностадийные и двухстадийные блочные) алгоритмы, принадлежащие классу ортогональных реализаций, в работах российских авторов, можно сказать, остались незамечены (кроме, разве что [19, 20, 23, 26-30]). В связи с этим первая цель данной статьи – привлечь внимание специалистов к этому направлению иссле-

дований. Для этого дается вводный обзор современных вычислительных алгоритмов оптимальной фильтрации (разделы 1, 2). Этот обзор краткий потому, что многие подробные обзоры доступны. Например, упомянутые выше обзор [6] и монография [7] содержат полный, подробный анализ и сравнительные таблицы эффективности квадратно-корневых алгоритмов дискретной фильтрации, известных до 1977 г. Прекрасный обзор, – начиная от зарождения идей у Галилео Галилея (1564-1642), через работы Карла Фридриха Гаусса (1777-1855), Норберта Винера (1894-1964) и многих других (список огромен) до Рудольфа Эмиля Калмана (1930-) и последних достижений, датируемых до 2000 года, содержится в учебном пособии [17].

Вторая цель данной статьи – показать широкие прикладные возможности численно эффективных алгоритмов. С этой целью рассмотрено их использование в актуальной задаче обнаружения момента вхождения в маневр судна, новое решение которой содержится в [31]. Соответствующий материал с опорой на достижения в этой области [32-35] помещен в разделы 3–5. Работа [36], решающая ту же задачу сопровождения маневрирующих целей, также использует квадратно-корневую реализацию фильтров. В отличие от [36], в [31] применен расширенный фильтр первого, а не второго порядка; его построение изложено здесь в разделе 5. Раздел 6 включен с целью продемонстрировать особенности программной реализации и отдельные результаты модельных испытаний алгоритма обнаружения начала маневра судна.

1. Стандартный фильтр Калмана

Рассмотрим источник данных, представимый в виде линейной динамической системы, возмущаемой дискретным белым шумом, свойства которой в произвольные (но достаточно редкие) моменты времени могут непредвиденно изменяться. Подобные изменения будем называть *нарушениями*.

Замечание 1. Момент начала маневра судна может трактоваться как нарушение, произошедшее в математической модели движения.

В результате каждого нарушения система переходит на новый локально стационарный

(по параметрам) режим функционирования, описываемый следующими уравнениями:

$$x(t_{i+1}) = \Phi_k(t_{i+1}, t_i)x(t_i) + B_k(t_i)u(t_i) + \Gamma_k(t_i)w(t_i), \quad (1)$$

$$z(t_i) = H_k(t_i)x(t_i) + v(t_i), \quad (2)$$

где $\Phi_k(t_{i+1}, t_i), B_k(t_i), \Gamma_k(t_i), H_k(t_i)$ – известные матрицы-параметры системы; $x(t_i)$ – n -мерный вектор состояния системы, $u(t_i)$ – r -мерный вектор входного воздействия, $z(t_i)$ – доступный для наблюдения m -мерный вектор измерений, $w(t_i)$ и $v(t_i)$ – независимые нормально распределенные векторы шумов с нулевыми средними и известными ковариационными матрицами $Q_k(t_i)$ и $R_k(t_i)$ соответственно, причем $Q_k(t_i) = I_s$, $R_k(t_i) = I_m$, k – номер локально стационарного режима ($k = 0, \dots, N$). Начальный вектор состояния системы x_0 распределен по нормальному закону с математическим ожиданием \bar{x}_0^k и ковариационной матрицей P_0^k .

Замечание 2. Требования $Q_k(t_i) = I_s$, $R_k(t_i) = I_m$ не являются обязательными и здесь введены для простоты изложения. Если $Q_k(t_i) \neq I_s$, то представив эту матрицу в виде $Q_k(t_i) = S_k(t_i)S_k^T(t_i)$, где $S_k(t_i)$ – квадратный корень матрицы $Q_k(t_i)$, получим $Q_k(t_i) := I_s$, $\Gamma_k(t_i) := \Gamma_k(t_i)S_k(t_i)$. Если $R_k(t_i) \neq I_m$, то предварительным нормированием измерений можно привести $R_k(t_i)$ к виду $R_k(t_i) = I_m$.

Замечание 3. Уравнения (1) и (2) описывают широкий класс систем, например, системы с управлением и возможными нарушениями. В частности управление $u(t_i)$ может отсутствовать. Его наличие или отсутствие, так же как и наличие или отсутствие нарушений, не влияет на принципы эффективной численной реализации фильтров. Чтобы показать универсальность таких реализаций, управление $u(t_i)$ не исключено из уравнений (1), (2). Наличие или отсут-

ствие нарушений не исключено также потому, что (как отмечалось во Введении) эта статья иллюстрирует реализацию работы [31], содержащей новое решение задачи обнаружения маневра на основе устойчивой квадратно-корневой фильтрации.

Общность исходной модели (1), (2) объясняется также следующим.

Замечание 4. Если $\Phi_k(t_{i+1}, t_i) = I$, $u(t_i) = 0$ и $w(t_i) = 0$, то модель (1), (2) совпадает с той моделью, которая принята в теории регрессионного моделирования, когда $x(t_i) = const$ – параметр, подлежащий оцениванию по наблюдениям $z(t_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$. Принципиальная особенность модели (1), (2) заключается в том, что она – последовательная. Полная матрица «регрессоров» $H [H(t_i); i = 1, 2, \dots, N]^T$ расщеплена на отдельные «порции» $H(t_i)$ соответственно тем «порциям» наблюдений $z(t_i)$, которые поступают в обработку в последовательные моменты времени t_i ; $i = 1, 2, \dots, N$. Из теории наименьших квадратов известно, что для значения текущей оптимальной оценки по экспериментальным данным безразлично, поступили эти данные в обработку целиком или порциями. Последовательная (рекуррентная) форма алгоритма метода наименьших квадратов предпочтительнее, чем единовременная обработка всех данных «целиком», хотя последнее остается традицией в эконометрике или в обработке данных астрономических наблюдений [24].

При известных матрицах-параметрах системы $\Phi_k(t_{i+1}, t_i), B_k(t_i), \Gamma_k(t_i), H_k(t_i)$ и начальных условиях \bar{x}_0^k, P_0^k оптимальное решение задачи оценивания вектора состояния $x(t_i)$ системы (1), (2) дается фильтром Калмана. Алгоритм происходящей при этом рекуррентной обработки данных $\{z(t_i), \forall i \geq 1\}$ определен уравнениями:

$$\begin{aligned} \hat{x}_k(t_i^-) &= \Phi_k(t_i, t_{i-1})\hat{x}_k(t_{i-1}^+) + B_k(t_{i-1})u(t_{i-1}), \\ P_k(t_i^-) &= \Phi_k(t_i, t_{i-1})P_k(t_{i-1}^+)\Phi_k^T(t_i, t_{i-1}) + \Gamma_k(t_{i-1})\Gamma_k^T(t_{i-1}). \end{aligned} \quad (3)$$

II. Фильтрация (обновление оценок по измерениям):

$$\begin{aligned} K_k(t_i) &= P_k(t_i^-) H_k^T(t_i) [H_k(t_i) P_k(t_i^-) H_k^T(t_i) + I_m]^{-1}, \\ P_k(t_i^+) &= P_k(t_i^-) - K_k(t_i) H_k(t_i) P_k(t_i^-), \\ v_k(t_i) &= z(t_i) - H_k(t_i) \hat{x}_k(t_i^-), \\ \hat{x}_k(t_i^+) &= \hat{x}_k(t_i^-) + K_k(t_i) v_k(t_i). \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнения (3)-(4) решаются при следующих начальных условиях: $\hat{x}_k(t_0^+) = \bar{x}_0^k$, $P_k(t_0^+) = P_0^k$. При фиксированном k фильтр оптимален для k -го режима функционирования.

2. Обзор численно эффективных методов и алгоритмов дискретной фильтрации Калмана

Обозначим основные направления в развитии теории устойчивых методов оптимальной дискретной фильтрации Калмана. Следуя великолепному учебно-научному изданию [17], сначала перечислим математические методы, на основе которых были построены классы численно эффективных алгоритмов оптимальной дискретной фильтрации; затем кратко опишем устойчивые модификации фильтра Калмана, базирующиеся на этих методах. Под численной эффективностью понимают, прежде всего, устойчивость по отношению к ошибкам машинного округления, сокращение объема вычислений, а также наличие эффективных (компактных и однородных) структур данных, поступающих для обработки в алгоритм фильтрации. Одним из важнейших свойств современных ортогонализированных блочных алгоритмов является их идеальность для распараллеливания на многопроцессорных ЭВМ структура. Это позволяет успешно применять самые современные информационные технологии для реализации указанного класса алгоритмов в задачах реального времени [15].

Все известные к настоящему времени численно устойчивые реализации дискретного фильтра Калмана используют один или несколько из перечисленных ниже методов решения входящего в состав фильтра разностного уравнения Риккати относительно ковариации $P_k(t_i^+)$:

1. *Разложение Холецкого (либо модифицированное разложение Холецкого)* [4–7] ковариационных матриц P ошибки оценки вектора состояния в фильтре Калмана.

2. *Факторизация ковариационной матрицы R шума измерений* с целью снижения вычислительной сложности алгоритма фильтрации. Такой метод называют *декорреляцией ошибок измерений*.

3. *Вычисление симметрических матричных квадратных корней от элементарных матриц*. Симметрическая элементарная матрица имеет вид $I - \sigma v v^T$, где I – единичная матрица размера $n \times n$, σ – скаляр, v – вектор размерности n . Симметрический квадратный корень от элементарной матрицы есть элементарная матрица $I - \beta v v^T$, где $\beta \neq \sigma$. (Этот метод был использован Поттером [3, 7] для построения этапа обработки измерений в квадратно-корневом фильтре.)

4. *Разложение матриц общего вида* в произведение треугольной и ортогональной матриц. В калмановской фильтрации применяют два основных метода:

а) *Триангуляризация (QR разложение)*. Изначально данный класс методов использовался для получения численно устойчивых решений систем линейных уравнений. В калмановской фильтрации применяют следующие методы триангуляризации:

- Вращения Гивенса и модифицированные вращения Гивенса [4, 5, 16, 17].
- Отражения Хаусхолдера [4, 5, 7, 16, 17].
- Гиперболические вращения Гивенса и гиперболические отражения Хаусхолдера [16].

б) *Ортогонализация Грама-Шмидта* [4-6].

Данные методы были использованы Шмидтом [6, 17] для построения этапа экстраполяции в квадратно-корневом фильтре, а также Дайером и МакРейнольдсом [6] для построения квадратно-корневого информационного фильтра и Т. Кайлатом с соавторами [16] для построения блочных ортогонализированных алгоритмов.

в) *J-ортогональные преобразования*.

- Гиперболические вращения Гивенса и гиперболические отражения Хаусхолдера [16].

Данные методы были использованы Т. Кайлатом и соавторами [16] для реализации квадратно-корневых быстрых алгоритмов Чандрасекара.

5. *Одноранговая модификация.* Алгоритм одноранговой модификации позволяет вычислить фактор Холецкого матрицы $M \pm vv^T$ по заданному вектору v и фактору Холецкого симметрической положительно определенной матрицы M . (Бирман [7] использовал этот метод для построения этапа обработки измерений в UD-фильтре.)

6. *Блочная ортогонализация матричного уравнения Риккати.* Общий подход заключается в следующем блочном представлении матричного уравнения:

$$CC^T = AA^T + BB^T = \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^T \\ B^T \end{bmatrix}.$$

Фактор Холецкого C может быть вычислен с помощью QR преобразования, примененного к “ 1×2 ”-блочной прямоугольной матрице $\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$. Такое представление матричных уравнений с учетом разных размерностей позволяет строить различные алгоритмы:

а) *Ортогонализированный блочный алгоритм* решения матричного уравнения Риккати на этапе обновления данных по времени (этап экстраполяции) в дискретном фильтре.

б) *Ортогонализированный блочный алгоритм* решения матричного уравнения Риккати на этапе обновления данных по измерениям (этап фильтрации).

в) *Совмещенный ортогонализированный блочный алгоритм* одновременного обновления данных по времени и по доступным измерениям в дискретном фильтре.

Ортогонализированные блочные алгоритмы впервые были предложены и развиты Т. Кайлатом и соавторами [16].

Далее кратко изложим основные идеи различных классов численно эффективных алгоритмов оптимальной дискретной фильтрации. Детали могут быть найдены в обширной литературе, частично отраженной здесь.

2.1. Разложения Холецкого

Методы разложения Холецкого применяются в калмановской фильтрации в следующих целях:

1. Для факторизации ковариационных матриц (P , R и Q) в квадратно-корневых алгорит-

мах фильтрации (алгоритмы Поттера, Бирмана, Шмидта и Кайлата).

2. Для декорреляции ошибок вектора измерений в скаляризованных алгоритмах фильтрации (алгоритмы Поттера, Бирмана, Карлсона и др.)

3. Для генерации последовательности независимых случайных векторов с заданными характеристиками.

Подробное описание алгоритмов Холецкого заинтересованный читатель может найти, например, в [4].

Каминский в своей докторской диссертации “Square Root Filtering and Smoothing for Discrete Processes” (1971 г.) показал, что вычислительная эффективность этапа обработки измерений в стандартном фильтре Калмана может быть улучшена, если использовать представление вектора измерений z , относящегося к каждому моменту времени, в виде последовательности скалярных измерений z_i , $i=1, \dots, m$. При этом полезна декорреляция ошибок измерений. Идея декорреляции заключается в замене вектора измерений $z=Hx+v$ с коррелированными ошибками v ($E[vv^T]=R$) последовательностью скалярных измерений $\bar{z}_i = \bar{h}_i^T x + \bar{v}_i$, $i=1, \dots, m$, с некоррелированными ошибками измерений \bar{v} : $E[\bar{v}\bar{v}^T]=D$. Здесь D – диагональная матрица, получаемая при разложении $R=LDL^T$ (разложение Холецкого без операции квадратного корня), \bar{h}_i^T – i -я строка матрицы $\bar{H}=L^{-1}H$, $\bar{z} = L^{-1}z$.

Теперь, в предположении диагональности матрицы R , возможно произвольное расщепление вектора измерений z на априорную и текущую части [7], поэтому вместо стандартного фильтра Калмана был построен скаляризованный (или последовательный) фильтр Калмана со скалярной обработкой измерений. Подробное изложение этого алгоритма можно найти, например, в [4], с. 274-275 или [27], с. 155.

2.2. Квадратно-корневой фильтр Поттера

Первооткрывателем квадратно-корневой фильтрации является Джеймс Е. Поттер. Вскоре после открытия Калманом своего фильтра, Поттер предложил идею факторизации ковариационной матрицы ошибок измерений и тем самым построил первый квадратно-корневой ал-

горитм [3]. Вместо матриц $P(t_i^+)$, по своей природе положительно определенных, в уравнениях фильтра вычисляют их квадратные корни $S(t_i^+)$, отвечающие равенствам $S(t_i^+)S^T(t_i^+) = P(t_i^+)$. Ясно, что эти соотношения не дают однозначно определения квадратных корней. Однако это обстоятельство в общем случае не вызывает беспокойства, поскольку эти корни однозначно определяются по разложению Холецкого (в форме LL^T или UU^T разложения).

Основная идея метода фильтрации с использованием квадратного корня состоит в замене исходных уравнений алгоритма Калмана на уравнения, предназначенные для последовательного вычисления матриц $S(t_i^+)$. Такой подход оправдывается тем, что произведение $S(t_i^+)S^T(t_i^+)$ не теряет свойства положительной определенности (при условии полноты ранга) даже с учетом ошибок округления, в то время как ошибки округления обычно приводят к потере этого свойства для матрицы $P(t^+)$, если она вычисляется по исходному алгоритму (3).

На этапе обработки измерения уравнение $\hat{P} := \tilde{P} - Kh\tilde{P}$ можно переписать в виде $\hat{S}\hat{S}^T := \tilde{S}(I_n - f f^T / \alpha)\tilde{S}^T$. Число β выбирают из условия равенства

$$I_n - f f^T / \alpha = (I_n - \beta f f^T)(I_n - \beta f f^T).$$

Из получающегося отсюда квадратного уравнения, с учетом $\alpha = f^T f + 1$, далее выбирают одно решение $\beta = (1/\alpha)/(1 + \sqrt{1/\alpha})$, защищенное от операции вычитания положительной величины $\sqrt{1/\alpha}$ в знаменателе. (Здесь предполагаем, что $R=I_m$.) Теперь вычисление S равносильно счету с двойной точностью P в стандартном алгоритме Калмана. Кроме того, устранена опасность утраты матрицей $\hat{P} = \hat{S}\hat{S}^T$ свойства положительно определенности, что влекло бы расходимость оценок вектора состояния. Подробное изложение алгоритма Поттера можно найти, например в [4], с. 276-277 или [27], с. 156.

Заметим, что двойственный к алгоритму Поттера квадратно-корневой алгоритм этапа

экстраполяции в информационном фильтре сформулирован в [6].

2.3. Методы одноранговой модификации

К данной группе методов относятся алгоритмы Карлсона и Бирмана, предназначенные для этапа обработки измерений (фильтрации).

Квадратно-корневой алгоритм Карлсона

Нил А. Карлсон предложил [37] алгоритм, позволяющий вычислять верхний треугольный фактор Холецкого W в алгоритме Поттера. По сравнению с последним, данный алгоритм обладал меньшей вычислительной сложностью. Другим существенным отличием от алгоритма Поттера является именно треугольный, а не произвольный вид фактора Холецкого ковариационной матрицы P . По своей сути, алгоритм Карлсона – это специализированная и упрощенная модификация алгоритма, примененного Аги и Тернером [38] для фильтра Калмана. Алгоритм Карлсона в LD -форме можно найти в [4], с. 285-288 или [27], с. 160, а одноранговое обновление в LD -форме можно найти в [4], с. 278-279.

UD-алгоритм Бирмана

Алгоритм Бирмана является одной из наиболее устойчивых модификаций этапа обработки измерений в фильтре Калмана. По своей структуре и по вычислительной сложности он похож на алгоритм Карлсона, но не содержит операции извлечения квадратного корня. Автор алгоритма Джеральд Дж. Бирман внес большой вклад в теорию алгоритмов оптимального оценивания [7], особенно в развитие методов практической реализации оптимальных дискретных фильтров.

Основная идея алгоритма заключается в разложении ковариационных матриц P в произведение двух треугольных матриц и диагональной матрицы. Можно рассматривать два варианта алгоритма Бирмана: LD -алгоритм и UD -алгоритм. Бирман построил UD -алгоритм, т. е. использовал на этапе обработки измерений разложение $P(t_i^+) = U(t_i^+)D(t_i^+)U(t_i^+)^T$, где $U(t_i^+)$ – верхняя треугольная матрица с единичной диагональю, $D(t_i^+)$ – диагональная матрица. LD -алгоритм Бирмана построен в [19] и приведен в [4], стр. 279-285.

В предположении последовательности скалярных (скаляризованных) измерений уравнение обновления ковариационной матрицы ошибок оценок стандартного фильтра Калмана

$P(t_i^+) = P(t_i^-) - P(t_i^-)H^T[HP(t_i^-)H^T + R]^{-1}HP(t_i^-)$ можно представить в терминах UD -факторов:

$$P(t_i^+) = U(t_i^+)D(t_i^+)U^T(t_i^+) = U(t_i^-) \left[D(t_i^-) - \frac{D(t_i^-)aa^T D(t_i^-)}{R + a^T D(t_i^-)a} \right] U^T(t_i^-),$$

где $a = U^T(t_i^-)H^T$.

Если существует способ представления выражения в квадратных скобках в виде произведения $BD(t_i^-)B^T$, тогда по известному представлению матрицы ковариации ошибок оценивания на этапе экстраполяции $P(t_i^-) = U(t_i^-)D(t_i^-)U^T(t_i^-)$ можно найти UD -факторы в разложении матрицы $P(t_i^+)$ в виде

$D(t_i^+)$ и $U(t_i^+) = U(t_i^-)B$. Бирман нашел такое решение в терминах одноранговой модификации для UD -факторов Холесского. Его алгоритм реализован в пакете MATLAB [39].

Данный алгоритм не содержит операции извлечения квадратного корня, а работа с треугольными матрицами требует меньшего числа арифметических операций по сравнению с обычными. Описание LD -версии алгоритма Бирмана можно найти также в [27], с. 159.

Заметим, что алгоритмы Карлсона и Бирмана, как и алгоритм Поттера, относятся к скаляризованным (последовательным) устойчивым модификациям фильтра Калмана.

2.4. Методы триангуляризации

Первоначально методы триангуляризации матриц были разработаны для решения задачи МНК. В калмановской фильтрации данные методы применяются для:

- вычисления факторов Холесского ковариационной матрицы ошибок оценивания на этапе экстраполяции фильтра;
- вычисления факторов Холесского информационной матрицы ошибок оценивания на этапе фильтрации;

- вычисления факторов Холесского ковариационной матрицы ошибок оценивания в совмещенных (одностадийных) алгоритмах фильтрации.

Кроме этого, модифицированные вращения Гивенса, предложенные В.М. Джентльменом [40], применяются для вычисления модифицированных факторов Холесского ковариационной матрицы ошибок оценивания на этапе экстраполяции в UD фильтрах.

Квадратно-корневой алгоритм Шмидта для этапа экстраполяции

Стэнли Ф. Шмидт предложил способ вычисления фактора Холесского $S(t_i^-)$ ковариационной матрицы $P(t_i^-)$. Если $S(t_i^+)$ – фактор Холесского ковариационной матрицы $P(t_i^+)$, тогда на этапе экстраполяции уравнение для матрицы $P(t_i^-)$, с учетом разложения Холесского, можно записать в виде:

$$S(t_i^-)S^T(t_i^-) = \Phi S(t_{i-1}^+)S^T(t_{i-1}^+)\Phi^T + \Gamma\Gamma^T.$$

Способ вычисления матрицы $S(t_i^-)$, предложенный Шмидтом, заключается в ортогонализации прямоугольной матрицы размера $(n+s) \times n$ и построении ортогональной матрицы T размера $(n+s) \times (n+s)$, такой что

$$T \begin{bmatrix} S^T(t_{i-1}^+)\Phi^T \\ \Gamma^T(t_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S^T(t_i^-) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Вычисления проводятся с помощью известных методов ортогонализации (Хаусхолдера, Гивенса или модифицированного алгоритма Грама-Шмидта [4, 7]). В результате после этапа экстраполяции матрица $S(t_i^-)$ получается нижней треугольной.

UD- алгоритм Торнтон для этапа экстраполяции

Идея UD -факторизации дискретного уравнения Риккати на этапе экстраполяции принадлежит Кэтрин Л. Торнтон [7, 41]. Она применила алгоритм взвешенной ортогонализации Грама-Шмидта для вычисления UD -факторов матрицы $P(t_i^-)$.

На этапе экстраполяции с учетом разложения матрицы $P(t_i^-) = U(t_i^-)D(t_i^-)U^T(t_i^-)$ уравнение для нее принимает следующий вид:

$$P(t_i^-) = U(t_i^-)D(t_i^-)U^T(t_i^-) = \Phi U(t_{i-1}^+)D(t_{i-1}^+)U^T(t_{i-1}^+)\Phi^T + \Gamma(t_{i-1})\Gamma^T(t_{i-1})$$

Представим матрицу $P(t_i^-)$ в следующем виде:

$$P(t_i^-) = [\Phi U(t_{i-1}^+) \quad \Gamma(t_{i-1})] \text{Diag}(D(t_{i-1}^+), I_s) \begin{bmatrix} U^T(t_{i-1}^+)\Phi^T \\ \Gamma^T(t_{i-1}) \end{bmatrix} = W(t_i)D(t_i)W^T(t_i),$$

где $W(t_i) = [\Phi U(t_{i-1}^+) \quad \Gamma(t_{i-1})] = \begin{bmatrix} w_1^T(t_i) \\ \dots \\ w_n^T(t_i) \end{bmatrix}$,

$$D(t_i) = \text{Diag}(D(t_{i-1}^+), I_s) = \text{Diag}(D_1(t_i), \dots, D_N(t_i)),$$

$W(t_i)$ – матрица размера $n \times (n + s)$ и $N = n + s$.

Факторы $U(t_i^-)$ и $D(t_i^-)$ вычисляются по модифицированному взвешенному алгоритму Грама-Шмидта [7].

Подробное описание UD -версии алгоритма можно найти в [7] (теорема VI.4.1.), LD -версия алгоритма сформулирована в [27], с. 159.

Квадратно-корневой информационный фильтр (Square Root Information Filter – SRIF)

Полная формулировка, включая оба этапа экстраполяции и фильтрации, квадратно-корневого информационного фильтра принадлежит П. Даеру и С. МакРейнольдсу [42]. Алгоритм SRIF, также как и квадратно-корневые ковариационные фильтры, обладает улучшенными вычислительными свойствами по сравнению со стандартной реализацией информационного фильтра (подробнее о стандартном информационном фильтре, например [6, 7]).

Этапы экстраполяции и обновления данных по измерениям в фильтре выглядят следующим образом:

Пусть $R = C_R C_R^T > 0$, $Q = C_Q C_Q^T$, $P_0 > 0$, $P_0^{-1} = \hat{R}_0^T \hat{R}_0$, где нижние треугольные матрицы C_R , C_Q и верхняя треугольная матрица \hat{R}_0 получены с помощью разложения Холецкого, $\hat{z}_0 = \hat{R}_0 \bar{x}_0$.

I. Экстраполяция (обновление оценок по времени).

Вычислить величины \tilde{R}_{t+1} и \tilde{z}_{t+1} :

$$\tilde{T}_{t+1} \begin{bmatrix} C_Q^{-1} & 0 & 0 \\ -\hat{R}_t \Phi^{-1} \Gamma & \hat{R}_t \Phi^{-1} & \hat{z}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (Q_{t+1}^e)^{-1/2} & S_1 & S_2 \\ 0 & \tilde{R}_{t+1} & \tilde{z}_{t+1} \end{bmatrix} \quad (5)$$

где \tilde{T}_{t+1} – матрица ортогонального преобразования к верхнему треугольному виду первых двух блочных столбцов правой части выражения (5).

II. Фильтрация (обновление оценок по измерениям).

Вычислить величины \hat{R}_t и \hat{z}_t :

$$\hat{T}_t \begin{bmatrix} \tilde{R}_t & \tilde{z}_t \\ C_R^{-1} H & C_R^{-1} z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{R}_t & \hat{z}_t \\ 0 & e_t \end{bmatrix}, \quad (6)$$

где \hat{T}_t – матрица ортогонального преобразования к верхнему треугольному виду первого блочного столбца правой части выражения (6).

Ключевая идея алгоритма заключается в применении устойчивых ортогональных преобразований к блочной матрице, содержащей параметры и вычисляемые величины информационного фильтра.

2.5. Матричные ортогональные преобразования

Современными численно эффективными реализациями дискретного фильтра Калмана являются *ортогонализированные блочные алгоритмы (array algorithms)* [16], предложенные научной группой Т. Кайлата. Данный класс методов является наиболее подходящим для практической реализации на современных вычислительных комплексах с параллельной архитектурой [15]. Первым ортогонализированными блочными алгоритмами по праву можно считать SRIF, а также алгоритмы Торнтон и Шмидта. Основная идея таких реализаций заключается в формировании блочной пред-матрицы (*pre-array*), содержащей в себе все необходимые для вычислений данные, и последующем ее приведении к требуемому нижнему или верхнему треугольному блочному

виду (*post-array*) с помощью ортогональных преобразований.

Совмещенные квадратно-корневые и UD-фильтры Морфа-Кайлата

Хорошо известно, что основная вычислительная нагрузка в фильтре Калмана приходится на итерации уравнения Риккати. Чтобы сократить объем вычислений, Мартин Морф и Томас Кайлат [43] предложили совместить в одной ортогонализованной схеме вычислений этапы экстраполяции и обработки измерений фильтра (так получились одностадийные алгоритмы).

Совмещенный квадратно-корневой фильтр. Вычислить матричный квадратный корень (фактор Холесского) $S(t_{i+1}^-)$ ковариационной матрицы ошибки предсказания $P(t_{i+1}^-)$ по известному фактору Холесского $S(t_i^-)$ в предыдущий момент времени можно при помощи алгоритма триангуляризации (Хаусхолдера или Гивенса) блочной матрицы A_i размера $(n+m) \times (s+n+m)$ (здесь, как и в (1), (2) предполагаем, что $Q_k(t_i) = I_s$, $R_k(t_i) = I_m$):

$$A_i T = \begin{bmatrix} \Gamma & \Phi S(t_i^-) & 0 \\ 0 & H S(t_i^-) & I_m \end{bmatrix} T = \begin{bmatrix} 0 & S(t_{i+1}^-) & \Psi_i \\ 0 & 0 & E_i^{1/2} \end{bmatrix} = C_i,$$

где T – матрица правостороннего ортогонального преобразования, приводящего к верхнему треугольному виду блочную матрицу C_i , при этом

$$\begin{aligned} C_i C_i^T &= A_i T T^T A_i^T = A_i A_i^T, \\ E_i^{1/2} E_i^{T/2} &= H P(t_i^-) H^T + I_m, \\ \Psi_i &= \Phi P(t_i^-) H^T E_i^{-T/2}. \end{aligned}$$

Нормированный коэффициент Калмана вычисляют по формуле $\bar{K}_i = \Psi_i E_i^{-1/2}$.

Совмещенный UD-фильтр.

В данной реализации используют *UD*-факторы Холесского

$$\begin{aligned} P(t_i^-) &= U(t_i^-) D(t_i^-) U^T(t_i^-), \\ R &= U_R D_R U_R^T, \quad Q = U_Q D_Q U_Q^T \end{aligned}$$

для заполнения блочных матриц

$$\begin{aligned} B_i &= \begin{bmatrix} \Gamma U_Q & \Phi U(t_i^-) & 0 \\ 0 & H U(t_i^-) & U_R \end{bmatrix}, \\ D_i &= \begin{bmatrix} D_Q & 0 & 0 \\ 0 & D(t_i^-) & 0 \\ 0 & 0 & D_R \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Затем применяют алгоритм MWGS (модифицированной взвешенной ортогонализации Грама-Шмидта) к строкам матрицы B_i с учетом весовой матрицы D_i . В результате получают новые блочные матрицы

$$\bar{B}_i = \begin{bmatrix} U(t_{i+1}^-) & U_{\Psi(i)} \\ 0 & U_{E(i)} \end{bmatrix}, \quad \bar{D}_i = \begin{bmatrix} D(t_{i+1}^-) & 0 \\ 0 & D_{E(i)} \end{bmatrix},$$

в которых верхняя треугольная матрица $U(t_{i+1}^-)$ и диагональная матрица $D(t_{i+1}^-)$ суть *UD*-факторы Холесского ковариационной матрицы ошибки оценивания $P(t_{i+1}^-)$. Нормированный коэффициент Калмана вычисляют по формуле

$$\bar{K}_i = U_{\Psi(i)} U_{E(i)}^{-1},$$

где $U_{\Psi(i)} = \Phi P(t_i^-) H^T U_{E(i)}^{-T} D_{E(i)}^{-1}$.

Научной школой Т. Кайлата были предложены и другие классы ортогонализованных блочных алгоритмов, подробное описание и обсуждение которых заинтересованный читатель сможет найти в [4, 16, 27].

2.6. J-ортогональные преобразования

Матрица Q называется *J*-ортогональной, если выполняется условие $Q^T J Q = Q J Q^T = J$, где $J = \text{diag}(\pm 1)$ – сигнатура [44].

Очевидно, что Q – невырожденная матрица, и J – инволютивная матрица, т. е. $J^2 = I$ (где I – единичная матрица). Видно, что если положить $J = I$, то получим определение обычной ортогональной матрицы.

Приведение матрицы к *J*-ортогональному виду можно выполнить с помощью гиперболических отражений Хаусхолдера или гиперболических вращений Гивенса (подробнее об этих алгоритмах [16]).

Т. Кайлат и соавторы применили методы *J*-ортогонализации для построения квадратно-корневой формы быстрого алгоритма Чандра-секара.

Быстрые алгоритмы Чандрасекара

Быстрые алгоритмы оптимальной дискретной фильтрации были построены с применением уравнений Чандрасекара [45]. Они являются важным классом алгоритмов для решения задачи оценивания в системах большой размерности, т. е. при $n \gg 1$, где n – размер вектора состояния системы. Основная идея состоит в следующем. Поскольку для стационарных систем ранг матрицы $\delta P_k = P(t_{k+1}^-) - P(t_k^-)$ во многих случаях существенно меньше, чем ранг $P(t_k^-)$, то целесообразно обновлять на каждом шаге рекурсии величину δP_k вместо $P(t_k^-)$. Для эрмитовой (в общем случае) матрицы δP_k существует разложение вида

$$\delta P_k = P(t_{k+1}^-) - P(t_k^-) = L_k M_k L_k^T, \quad (7)$$

где $L_k \in \mathbf{R}^{n \times \alpha}$, а $M_k \in \mathbf{R}^{\alpha \times \alpha}$ – эрмитова невырожденная матрица.

Заметим, что разложение (7) осуществляется только один раз, т. е. для начальных значений $\delta P_0 = P(t_1^-) - P(t_0^-) = L_0 M_0 L_0^T$, где $\alpha = \text{rank}(P(t_1^-) - P(t_0^-))$. Далее обновление уравнений фильтра происходит в терминах матриц L_k, M_k и уже не требует обновления разностного уравнения Риккати. Таким образом, вместо $P(t_{k+1}^-)$ обновляются матрицы меньшего размера, т. е. $L_k \in \mathbf{R}^{n \times \alpha}$ и $M_k \in \mathbf{R}^{\alpha \times \alpha}$, при этом по ним легко восстановить $P(t_{k+1}^-)$ для любого $k, k=1, \dots, N$. Подробное изложение быстрых алгоритмов фильтрации заинтересованный читатель сможет найти в [16, Глава 11]. Там же авторами показано, что в случае $m < n$ и $s < n$, сложность алгоритма фильтрации сокращается с $O(n^3)$ до $O(\alpha n^2)$ или $O(\alpha^3)$. Заметим, что $\alpha \ll n$ для систем большой размерности.

Квадратно-корневые быстрые алгоритмы

Поскольку реализации дискретного фильтра Калмана в ортогонализованной квадратно-корневой форме обладают улучшенными вычислительными свойствами, подобные методы были сформулированы и для класса быстрых алгоритмов. Однако в этом случае необходимо обновлять уравнения вида $C^T C = A^T A \pm B^T B$,

что невозможно осуществить с помощью обычных ортогональных преобразований. С этой целью используют J -ортогональные преобразования. Далее сформулируем ортогонализированный быстрый алгоритм.

1. Начальные значения: $\hat{x}(t_0^-) = \bar{x}_0$,

$$P(t_0^-) = P_0 > 0.$$

1.1. Вычислить: $\bar{K}_{p,0} = \Phi P_0 H^T R_{e,0}^{-1/2}$,

$$R_{e,0} = R + H P_0 H^T.$$

1.2. Найти разложение: $\delta P_0 = \bar{L}_0 S \bar{L}_0^T$, где $\bar{L}_0 \in \mathbf{R}^{n \times \alpha}$, $S \in \mathbf{R}^{\alpha \times \alpha}$ – сигнатура матрицы δP_0 и $\alpha = \text{rank}(\delta P_0)$.

2. Фильтрация. Для $k=0, \dots, N$ рекуррентно вычислить:

$$Q_k \begin{bmatrix} R_{e,k}^{1/2} & \bar{K}_{p,k}^T \\ \bar{L}_k^T H^T & \bar{L}_k^T \Phi^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{e,k+1}^{1/2} & \bar{K}_{p,k+1}^T \\ 0 & \bar{L}_{k+1}^T \end{bmatrix}, \quad (8)$$

где Q_k – матрица J -ортогонального преобразования ($J=I_m \oplus S$), приводящего к верхнему треугольному виду первый блочный столбец матрицы, стоящей в левой части (8), т. е. $R_{e,k+1}^{1/2}$ – верхняя треугольная матрица. $I_m \oplus S$ означает прямую сумму единичной матрицы I_m размера m и сигнатуры S , т. е. $I_m \oplus S = \text{diag}(I_m, S)$.

3. Оценивание: В любой момент времени $k (k=1, \dots, N)$ доступны оценка вектора состояния $\hat{x}(t_{k+1}^-) = \Phi \hat{x}(t_k^-) + \bar{K}_{p,k} \bar{e}(t_k)$, где $\bar{e}(t_k) = R_{e,k}^{-T/2} (z(t_k) - H \hat{x}(t_k^-))$, и матрица ковариации

$$\text{ошибки оценивания } P(t_{k+1}^-) = P_0 + \sum_{j=0}^k \bar{L}_j \bar{L}_j^T.$$

Полное описание и обсуждение квадратно-корневых быстрых алгоритмов можно найти в [16, гл. 13].

2.7. Другие модификации фильтра Калмана

Формула Сверлинга

Формула обновления ковариационной матрицы $P(t_i^+)$ в фильтре Калмана, предложенная Питером Сверлингом [46] для решения задачи МНК, следующая:

$$P(t_i^+) = [P^{-1}(t_i^-) + H^T R^{-1} H]^{-1}.$$

Данный способ вычисления значительно уступает другим рассматриваемым методам реализации фильтра Калмана как в плане вычислительной сложности, так и численной устойчивости. Поэтому формула Сверлинга, получаемая как инверсия информационной матрицы, не рекомендуется к применению на практике.

Стабилизированный алгоритм Джозефа

П.Д. Джозеф [7] предложил для этапа фильтрации использовать общую формулу, справедливую для матрицы P при любом, не обязательно оптимальном K :

$$P(t_i^+) = (I - KH)P(t_i^-)(I - KH)^T + KK^T.$$

При оптимальном значении $K_{opt} = P(t_i^-)H^T(HP(t_i^-)H^T + R)^{-1}$ она превращается в хорошо известное выражение $P(t_i^+) = P(t_i^-) - K_{opt}HP(t_i^-)$. При таких вычислениях результирующая матрица сохраняет симметричность. Кроме того, исчезает опасная для потери положительной определенности операция вычитания матриц, но при этом сложность вычислений возрастает почти вдвое. Скаляризованную форму алгоритма Джозефа можно найти в [27], с. 156. Здесь также следует отметить, что Торнтон и Бирман в [41] показали невозможность решения некоторых плохо обусловленных задач с помощью стабилизированного алгоритма Джозефа.

Редуцированные алгоритмы Бар-Ицхака и Бар-Ицхака–Медана [47]

Этот результат был представлен в 1983 году как новый алгоритм обновления оценок по измерениям. Он выгоден по объему вычислительных операций, когда число переменных состояния, непосредственно попадающих в вектор измерений, значительно меньше, чем размерность вектора состояния. Такая ситуация типична, например, для аэрокосмических приложений. Так, в навигационных комплексах число переменных состояния может достигать 40 или выше, а число измеренных состояния 3 или 6 [18]. Эти алгоритмы были описаны в [19]. Данные алгоритмы привлекательны своей простотой, но применять их следует с осторожностью, учитывая особенности вычислений, которые подробно характеризованы в [4], с.288-293.

Замечание 5. Сравнительные таблицы вычислительной эффективности, содержащие количество операций сложения, умножения, деления и извлечения корня, а также уровень ошибок, возникающих из-за машинного округления при этих операциях, приведены в литературе (например, в [6, 7, 17, 27]) и здесь опускаются для экономии места. Заинтересованный читатель может найти их не только по приведенным ссылкам, но и самостоятельно, например, в монографиях [7, 15, 17, 27].

Значение численно эффективных реализаций фильтра Калмана невозможно переоценить. При решении практических задач с применением ЭВМ неизбежно возникают ошибки машинного округления из-за ограниченной разрядности представления числовых типов данных. Этот факт нельзя не учитывать при анализе возможных способов решения задач. Хотя влияние ошибок округления в некоторых случаях может быть незначительным, игнорирование его при решении практических задач означает верный путь к грубым ошибкам в вычислениях или заведомо ошибочным результатам. Фундаментальные разработки в области оптимального оценивания, идентификации или обнаружения всегда имеют выход к приложениям, к вычислительным алгоритмам, поэтому вести такие разработки в терминах классических уравнений фильтра Калмана, а не в терминах эффективных вычислительных схем, не может считаться правильным, современным подходом.

В следующих разделах покажем на одном из многочисленных примеров, как можно применять устойчивые реализации дискретного фильтра Калмана в практических задачах судовождения, где требуется своевременное обнаружение момента вхождения судна в маневр для предотвращения столкновений.

3. Модель источника данных для систем судовождения и управления судном

Для обработки данных нужны модель движения объекта и модель измерений. Рассмотрим, какие модели можно использовать при анализе движения надводного судна.

3.1. Модель движения судна для алгоритма фильтрации

В общем случае пространственного движения модель движения судна включает 12 уравнений для координат центра масс, углов Эйлера и составляющих линейной и угловой скоростей в связанной системе координат [32]. Эти наиболее полные модели движения морского подвижного объекта (МПО) являются динамическими и получаются в теории управления МПО на основе законов сохранения количества и момента количества движения и представляют собой дифференциальные уравнения движения центра масс МПО в связанной системе координат и кинематические уравнения связи угловых и линейных скоростей с угловыми и пространственными координатами. Они хорошо известны, например, по источникам [48–51].

Для оценивания элементов движения надводного судна (движение на плоскости) достаточно применять более простые модели. Характеризуем это движение упрощенно – с точки зрения кинематики, а не динамики – пятью параметрами, образующими вектор s_k : две координаты, две проекции вектора скорости на оси координат и угловая скорость движения. Запишем следующее уравнение в дискретном времени k :

$$s_k = \begin{bmatrix} x + v_x \Delta t \\ y + v_y \Delta t \\ \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \cos[\arctg(v_y / v_x) + \omega \Delta t] \\ \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \sin[\arctg(v_y / v_x) + \omega \Delta t] \\ \omega \end{bmatrix}_{k-1} + \Gamma w_{k-1}. \quad (9)$$

Имеем: $s_k = (x, y, v_x, v_y, \omega)_k^T$, где x, y – географические координаты цели (широта и долгота в прямоугольной системе координат, единица измерения – метр), v_x, v_y – проекции мгновенной скорости судна на оси x и y (м/с), ω – угловая скорость (рад/с). Аддитивно действующий шум w_{k-1} имитируем процессом гауссова дискретного белого шума с единичной ковариационной матрицей, символом Δt обозначен период дискретизации. Матрицу усиления шума считаем равной

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \frac{\Delta t^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Delta t^2}{2} & 0 \\ \Delta t & 0 & 0 \\ 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \text{Diag}[\sigma_{\dot{v}}, \sigma_{\dot{v}}, \sigma_{\dot{\omega}}],$$

что упрощенно объясняется аппроксимацией траектории отрезком ряда Тейлора, где $\sigma_{\dot{v}}^2$ и $\sigma_{\dot{\omega}}^2$ – дисперсии случайных составляющих, воздействующих на скорость корабля и его угловую скорость, соответственно.

Возможны и другие упрощенные модели движения судна, на основе которых формируют уравнения фильтра. Принятая здесь модель (9) включает угловую скорость и потому пригодна для анализа траектории как маневрирующего (по циркуляции с постоянной скоростью) судна, так и судна, движущегося равномерно и прямолинейно (в последнем случае угловая скорость судна равна нулю). Эти два вида движения обычно рассматриваются как типовые. Переключение с одного вида движения на другой расцениваем как маневр.

3.2. Модель измерений

Модель измерений для фильтра определяется составом датчиков. Например, в работе [52] в качестве источника измерительной информации о движении автомобиля используется GPS (Global Positioning System). Здесь – при обработке данных о движении судна – будем считать, что наблюдения ведутся при помощи радиолокационной станции (РЛС), которая возвращает измеренные значения полярных координат цели: азимут z_θ и дальность до цели z_ρ . Считаем, что эти дискретные во времени измерения подвергаются воздействию погрешностей типа аддитивного дискретного белого шума.

Построим модель измерения в декартовых координатах. Будем называть такие преобразованные измерения «псевдоизмерениями». Обозначим через $z_{sph} = \begin{bmatrix} z_\rho \\ z_\theta \end{bmatrix}$ «первичные» измере-

ния, приходящие от РЛС. Тогда $z_\rho = \rho + \delta_\rho$, $z_\theta = \theta + \delta_\theta$, где ρ и θ – истинные значения дальности и пеленга, а δ_ρ и δ_θ – соответствующие погрешности измерения. Пусть шум измерений полярных координат равен $v_{sph} = \begin{bmatrix} \delta_\rho \\ \delta_\theta \end{bmatrix}$. Его ковариационная матрица имеет

$$\text{вид } R_{sph} = E[v_{sph} v_{sph}^T] = \begin{bmatrix} \sigma_\rho^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\theta^2 \end{bmatrix}, \text{ т. е. матрица}$$

диагональная, а шумы по дальности и азимуту не коррелированы. Это предположение означает, что ошибки измерения дальности не связаны с ошибками измерения направления на цель.

Перейдем от полярных измерений к псевдоизмерениям в декартовых координатах:

$$z_{dek} = \begin{bmatrix} z_x \\ z_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_\rho \cos(z_\theta) \\ z_\rho \sin(z_\theta) \end{bmatrix}.$$

Для удобства используем здесь и далее индекс «dek» в случаях работы с декартовыми координатами.

Малые приращения координат в сферической и декартовой системе координат связаны соотношением:

$$dz_{dek} = \begin{bmatrix} dz_x \\ dz_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(z_\theta) & -z_\rho \sin(z_\theta) \\ \sin(z_\theta) & z_\rho \cos(z_\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dz_\rho \\ dz_\theta \end{bmatrix}.$$

Обозначим $T = \begin{bmatrix} \cos(z_\theta) & -z_\rho \sin(z_\theta) \\ \sin(z_\theta) & z_\rho \cos(z_\theta) \end{bmatrix}$. Пе-

рейдём от дифференциалов к конечным разностям и получим закон преобразования случайных погрешностей измерений из полярных координат в декартовы:

$$\Delta z_{dek} = \begin{bmatrix} \Delta z_x \\ \Delta z_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(z_\theta) & -z_\rho \sin(z_\theta) \\ \sin(z_\theta) & z_\rho \cos(z_\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z_\rho \\ \Delta z_\theta \end{bmatrix} = T \Delta z_{sph}.$$

Ковариационная матрица погрешностей измерений в декартовых координатах равна

$$R_{dek} = E[\Delta z_{dek} \Delta z_{dek}^T] = E[T \Delta z_{sph} \Delta z_{sph}^T T^T] = T R_{sph} T^T.$$

Матрица T зависит от времени, однако для простоты изложения индекс k для нее опускаем.

Выразим псевдоизмерения через точные (истинные) декартовы координаты цели и погрешности псевдоизмерений:

$$z_{dek} = \begin{bmatrix} z_\rho \cos(z_\theta) \\ z_\rho \sin(z_\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\rho + \Delta\rho) \cos(\theta + \Delta\theta) \\ (\rho + \Delta\rho) \sin(\theta + \Delta\theta) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \rho \cos(\theta) + \Delta z_x \\ \rho \sin(\theta) + \Delta z_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta z_x \\ \Delta z_y \end{bmatrix}.$$

Обозначим: $\bar{s} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ – точные значения де-

картовых координат цели, $\bar{v} = \begin{bmatrix} \Delta z_x \\ \Delta z_y \end{bmatrix}$ – погреш-

ности псевдоизмерений декартовых координат. Тогда $z_{dek} = \bar{s} + \bar{v}$.

В силу нелинейности преобразования координат ковариационная матрица погрешностей псевдоизмерений R_{dek} не является диагональной. Приведем ковариационную матрицу к единичному виду, т.е. выполним декорреляцию погрешностей псевдоизмерений.

Представим матрицу R_{dek} как произведение $R_{dek} = S_{dek} S_{dek}^T$, где $S = T(R_{sph})^{1/2}$. Обозначим

$$\tilde{z}_{dek} = S_{dek}^{-1} z_{dek} = S_{dek}^{-1} (\bar{s} + \bar{v}) = S_{dek}^{-1} \bar{s} + S_{dek}^{-1} \bar{v} = S_{dek}^{-1} \bar{s} + \tilde{v}. \text{ Найдем ковариацию } \tilde{v} : \text{cov}(\tilde{v}) = \tilde{R}_{dek} = E[\tilde{v} \tilde{v}^T] = E[S_{dek}^{-1} \bar{v} \bar{v}^T (S_{dek}^{-1})^T] = S_{dek}^{-1} R_{dek} S_{dek}^{-T} = I. \text{ Будем называть } \tilde{z}_{dek} \text{ норма-}$$

лизованными псевдоизмерениями, а \tilde{v} – вектором погрешностей нормализованных псевдоизмерений (его компоненты некоррелированы, так как $\tilde{R}_{dek} = I$). Отсутствие корреляции компонентов вектора погрешностей позволяет применять скаляризованную обработку измерений.

Поскольку уравнения в системе (9) обладают значительной нелинейностью, непосредственное применение линейного фильтра Калмана, СКФ, в этом случае не представляется возможным. Одним из способов обойти это ограничение является использование расширенного фильтра Калмана (Extended Kalman Filter, EKF).

4. Стандартный алгоритм расширенного фильтра Калмана

Расширенный фильтр Калмана является субоптимальным алгоритмом [34] фильтрации. Формулы расширенной фильтрации были получены в работе [35] методом инвариантного погружения. «Расширенность» по сравнению с линейным фильтром состоит в возможности применения нелинейной модели движения цели и/или модели измерений. Матрицы Φ и H , задающие линейные преобразования, заменены функциями, которые в общем случае могут быть нелинейными. Функционирование системы описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} x(t_{i+1}) &= f[x(t_i)] + w(t_i), \\ z(t_i) &= h[x(t_i)] + v(t_i). \end{aligned}$$

Функция f вычисляет состояние системы в момент времени $i+1$ по состоянию в момент времени i , функция h преобразует вектор состояния к виду, в котором измерения поступают на вход фильтра, $w(t_i)$ и $v(t_i)$ – соответственно, шум процесса и шум измерения на шаге i . Если обе функции f и h линейные, расширенный фильтр превращается в стандартный фильтр Калмана (3).

Расширенный фильтр Калмана, как и стандартный (3), содержит два этапа: экстраполяцию и обработку измерения.

Экстраполяция (обновление оценок по времени):

$$\begin{aligned} \hat{x}(t_i^-) &= f[\hat{x}(t_{i-1}^+)], \\ F(t_{i-1}) &= \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}(t_{i-1}^+)}, \\ P(t_i^-) &= F(t_{i-1})P(t_{i-1}^+)F^T(t_{i-1}) + \Gamma(t_{i-1})\Gamma^T(t_{i-1}). \end{aligned}$$

Фильтрация (обновление оценок по измерениям):

$$\begin{aligned} v(t_i) &= z(t_i) - h[\hat{x}_k(t_i^-)], \\ H(t_i) &= \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}(t_i^-)}, \\ K(t_i) &= P(t_i^-)H^T(t_i)[H(t_i)P(t_i^-)H^T(t_i) + I_m]^{-1}, \\ P(t_i^+) &= P(t_i^-) - K(t_i)H(t_i)P(t_i^-), \\ \hat{x}(t_i^+) &= \hat{x}(t_i^-) + K(t_i)v(t_i). \end{aligned}$$

Приведенные уравнения расширенной фильтрации во многом совпадают с уравнениями обычного, линейного фильтра. Поскольку в них сохранены первые два члена (члены нулевого и первого порядков) разложения функций f и h в ряд Тейлора, расширенный фильтр – линейный. В нем происходит линеаризация моделей процесса и измерений относительно последней оценки вектора состояния. Для этого вычисляют две матрицы Якоби: $F(t_{i-1})$ и $H(t_i)$, которые затем подставляют в уравнения стандартной калмановской фильтрации.

Заметим, что в рассматриваемой прикладной задаче может быть использован и фильтр второго порядка [36], также квадратно-корневой, если в указанных рядах Тейлора сохранять первые три члена разложения.

5. Устойчивая реализация расширенного фильтра

Покажем, как применять одну из рассмотренных выше устойчивых реализаций расширенного фильтра Калмана (возьмем алгоритм Бирмана) в схеме расширенного фильтра для анализа (оценивания и предсказания) траектории судна, если модель его движения и модель наблюдения для построения фильтра взяты из разд. 3.1 и 3.2, соответственно.

Пусть на вход фильтра поступают нормализованные псевдоизмерения декартовых координат с единичной ковариационной матрицей ошибок. Обозначим:

$$\begin{aligned} \phi &= \arctg(v_y / v_x), \quad \varphi = \phi + \omega \Delta t, \\ v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \end{aligned}$$

Для модели процесса, описываемой уравнениями (9), функции f и h имеют вид:

$$f(s(t_i)) = \begin{bmatrix} x + v_x \Delta t \\ y + v_y \Delta t \\ v \cos \varphi \\ v \sin \varphi \\ \omega \end{bmatrix}_{t_i}; \quad h(s(t_i)) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{t_i}.$$

Вычислим матрицы Якоби:

$$F(t_i) = \left. \frac{f}{x} \right|_{s=\hat{s}(t_i)}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 0 & \frac{v_x \cos \varphi + v_y \sin \varphi}{v} & \frac{v_y \cos \varphi - v_x \sin \varphi}{v} & -v \Delta t \sin \varphi \\ 0 & 0 & -\frac{v_y \cos \varphi - v_x \sin \varphi}{v} & \frac{v_x \cos \varphi + v_y \sin \varphi}{v} & v \Delta t \cos \varphi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{t_{i-1}^+};$$

$$H(t_i) = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{s=\hat{s}(t_i)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Поскольку нормализованные псевдоизмерения на входе фильтра выполняются в той же системе координат, что и координаты объекта в векторе состояния, функция h выполняет линейное преобразование, а матрица $H(t_i) = H$ не зависит от времени. (Упрощение здесь состоит в том, что в условиях малости величин Δz_{sph} косинус малого угла в H заменен на 1.)

Конкретные значения элементов F во время фильтрации получаются подстановкой в формулу элементов соответствующего вектора оценки состояния.

С учетом вышеизложенного, скаляризованный LD алгоритм Бирмана для нелинейной фильтрации траектории судна-цели получим на основе обозначений [4] в следующем виде:

I. Экстраполяция:

$$\hat{s}(t_i^-) = \begin{bmatrix} x + v_x \Delta t \\ y + v_y \Delta t \\ v \cos \varphi \\ v \sin \varphi \\ \omega \end{bmatrix}_{t_{i-1}^+}; \quad \hat{s}(t_0^+) = \bar{s}_0;$$

$F(t_i, t_{i-1}) =$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 0 & \frac{v_x \cos \varphi + v_y \sin \varphi}{v} & \frac{v_y \cos \varphi - v_x \sin \varphi}{v} & -v \Delta t \sin \varphi \\ 0 & 0 & -\frac{v_y \cos \varphi - v_x \sin \varphi}{v} & \frac{v_x \cos \varphi + v_y \sin \varphi}{v} & v \Delta t \cos \varphi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{t_{i-1}^+};$$

$$W(t_i) = [F(t_i, t_{i-1})L(t_{i-1}^+) | \Gamma(t_{i-1})L_q(t_{i-1})];$$

$$D(t_i) = \text{Diag}[D(t_{i-1}^+), D_q(t_{i-1})] = \text{Diag}[D_1(t_i), \dots, D_N(t_i)];$$

$$P(t_{i-1}^-) = W(t_i)D(t_i)W^T(t_i) = L(t_i^-)D(t_i^-)L^T(t_i^-).$$

II. Обработка измерения:

A. Начальное присваивание: $\tilde{L} = L(t_i^-)$, $\tilde{D} = D(t_i^-)$, $\tilde{s} = \hat{s}(t_i^-)$.

Б. m -кратное повторение процедуры «скалярного» обновления.

Для $j = 1, 2, \dots, m$ выполнять:

В. Вычислить векторы

$$f = [f_1, f_2, \dots, f_n]^T = \tilde{L}^T h;$$

$$v = [v_1, v_2, \dots, v_n]^T = \tilde{D} f.$$

Замечание. Здесь v – независимое обозначение промежуточной величины.

Г. Задать начальные значения $\alpha' = r$; $K = [0 \dots 0 | v_n]^T$.

Д. Для $i = n, n-1, \dots, 2, 1$ выполнять:

начало

$$\alpha := \alpha' + v_i f_i; \quad \gamma := 1/\alpha;$$

$$\hat{d}_i := \tilde{d}_i \alpha' \gamma; \quad \lambda := -f_i / \alpha';$$

$$\hat{l}_i := \tilde{l}_i + \lambda K; \quad K := K + \tilde{l}_i v_i;$$

$$\alpha' := \alpha.$$

конец

Е. Вычислить векторы $v = \gamma(z - h^T \tilde{x})$;

$\hat{s} := \tilde{s} + K v$ с экстраполяцией между повторениями: $\tilde{L} := \hat{L}$; $\tilde{D} := \hat{D}$; $\tilde{s} := \hat{s}$.

Ж. Завершающее присваивание:

$$L(t_i^+) := \hat{L}; \quad D(t_i^+) := \hat{D}; \quad \hat{s}(t_i^+) := \hat{s}.$$

Здесь h – j -й столбец матрицы $H^T(t_i)$;

$z - j$ -й элемент вектора $z(t_i)$; $r - j$ -й элемент $r_j(t_i)$ диагональной матрицы ковариаций шума измерений $R(t_i)$; $j = 1, 2, \dots, m$ – номер скалярного измерения в составе измерений $z(t_i)$ в момент t_i .

6. Программная реализация и вычислительный эксперимент

Изменение курса или скорости для уклонения от другого судна может занять, в зависимости от маневренных качеств судна, от нескольких секунд для небольших судов (катеров, моторных лодок) до нескольких минут для крупных судов, обладающих большой инерцией (например, танкеров). В критической ситуации, когда требуется срочно изменить курс или скорость корабля при уклонении от судна, начавшего внезапный маневр, эта задержка может оказаться роковой: статистика морских аварий показывает [53], что действия, предпринятые с опозданием, фиксируются в 36% столкновений судов. По этой причине, задача скорейшего обнаружения маневра наблюдаемого судна представляет практический интерес, а ее эффективное решение, способствующее снижению риска морских аварий, остается актуальной.

Равномерное прямолинейное движение судна характеризуется нулевой угловой скоростью. При входе в маневр циркуляции, напротив, угловая скорость судна принимает положительное или отрицательное значение. Это означает, что режим (параметры модели) движения судна в момент входа в маневр меняется. Изменение среднего значения угловой скорости, означающее начало маневра, можно отследить при помощи последовательного алгоритма обнаружения нарушения. Однако, наблюдателю, ведущему наблюдение при помощи РЛС, угловая скорость объекта недоступна: от РЛС имеем лишь координаты судна, искаженные шумом наблюдения. Для получения оценок угловой скорости движения судна (а также оценок остальных элементов вектора состояния: координат и проекций вектора скорости на координатные оси) требуется пропустить координаты судна, полученные от РЛС, через фильтр.

Оба процесса – фильтрация и обнаружение нарушения – целесообразно объединять в единый алгоритм сопровождения судна, основанный на банке фильтров [54]. Двадцатилетнюю историю идеи банка фильтров для тестирования гипотез можно проследить, например, по работе [55]. Рассмотрим, как реализована эта идея в данной работе.

Банк фильтров Калмана есть набор одновременно работающих фильтров, обрабатывающих одни и те же поступающие данные. Один из фильтров (его номер 0) считается основным (ведущим), остальные – конкурирующими, альтернативными. На каждом шаге фильтрации выполняется проверка соответствия каждого из фильтров текущему режиму движения наблюдаемого судна. При изменении режима движения (при входе в маневр) ведущий фильтр перестает соответствовать новому режиму. При этом один из альтернативных фильтров (отвечающий новой модели движения) должен становиться ведущим и использоваться для последующей оценки параметров движения (вплоть до момента обнаружения очередного маневра).

Примем следующий порядок формирования банка фильтров. В начале наблюдения в банк загружается единственный фильтр, соответствующий модели прямолинейного равномерного движения. При поступлении новых данных о координатах судна в каждый момент времени k в банк добавляются несколько фильтров, соответствующих гипотезам H_{ik} = «С момента времени k угловая скорость судна равна ω_i », $i=1,2,\dots, M-1$, с заданным размером банка $M \geq 2$.

При условии, что эта гипотеза H_{ik} верна, элементы последовательности невязок $N_{ik}^t = \{v_{ki}, v_{k+1i}, \dots, v_{ti}\}$ от фильтра i , добавленного на шаге k , являются элементами дискретного белого шума (так называемый *обновляющий процесс*). Далее в процессе фильтрации для каждого фильтра в банке фильтров вычисляется логарифм отношения функций правдоподобия

$$\lambda_{ik}^t = \log \frac{p_{H_{ik}}(N_{ik}^t)}{p_{H_{0k}}(N_{0k}^t)}.$$

Значение λ_{ik}^t используется при принятии решения по критерию последовательного анализа Вальда [56]:

- 1) если $\lambda_{ik}^t \leq B$, гипотеза H_{ik} исключается из дальнейшего рассмотрения, тест продолжается;
- 2) если $\exists i: \lambda_{ik}^t \geq A$, тест завершается с выбором гипотезы H_{ik} ;

3) если $\forall i B < \lambda_{ik}^t < A$, тест продолжается для следующего момента времени $t + 1$;

4) если $\exists i \neq j: \lambda_{ik}^t \geq A, \lambda_{jk}^t \geq A$, тест завершается с выбором той гипотезы (H_{ik} или H_{jk}), значение λ которой больше других.

Логарифм отношения функций правдоподобия λ_{ik}^t удобно вычислять непосредственно в процессе фильтрации [57] в терминах величин, вычисляемых в фильтре:

$$\lambda_{ik}^t = \lambda_{ik}^{t-1} + \mu_t, t \geq 1$$

$$2\mu_t = \log \det \Sigma_{t0} - \log \det \Sigma_{t1} + v_{t0}^T \Sigma_{t0}^{-1} v_{t0} - v_{t1}^T \Sigma_{t1}^{-1} v_{t1}$$

$\Sigma_{ii} = E\{v_{ii} v_{ii}^T\}$ – расчетная (вычисляемая) ковариация невязки.

Граничные значения A и B задаются для требуемых уровней ошибок первого и второго рода α и β по следующим формулам [56]:

$$A = \log \frac{1 - \beta}{\alpha};$$

$$B = \log \frac{\beta}{1 - \alpha}.$$

При обработке данных в соответствии с указанным теоретическим алгоритмом требования к аппаратным ресурсам возрастают с каждым шагом, так как растет число одновременно работающих фильтров Калмана. Для преодоления этого затруднения в работе [54] предлагается при практической реализации банка фильтров задавать верхний предел количества шагов, на протяжении которых фильтр может присутствовать в банке. Пусть для принятия решения о маневре (или о его отсутствии) при наличии двух гипотез требуется в среднем K шагов. Тогда, тот фильтр, для которого отношение правдоподобия оставалось в пределах границ A и B на протяжении K шагов после включения его в банк, исключается из банка фильтров. Такое решение дает возможность наблюдать за системой с меньшими затратами вычислительных ресурсов.

В работе [58] предложена модификация этого алгоритма удаления фильтров из банка, и

она здесь применяется. Вместо исключения наиболее «старых» фильтров из банка удаляются те фильтры, для которых отношение правдоподобия ближе других подошли к нижней границе срабатывания B (хотя и не пересекли ее). Если же количество конкурирующих фильтров имеет тенденцию превысить заданный размер банка M , из банка удаляются фильтры с наименьшими значениями λ , пока количество фильтров в банке снова не войдет в границы M . Такой банк можно уподобить работе стека со специальной дисциплиной удаления элементов стека.

Заметим, что число фильтров M в данном случае выбирается произвольно с учетом двух соображений. Если M слишком велико, возникает много нецелесообразных дополнительных вычислений, не повышающих скорость обнаружения маневра. Если же M мало, небольшие изменения режима работы не будут обнаружены (фильтр, соответствующий новой модели движения, будет исключен из банка фильтров слишком рано). Алгоритм определения оптимального M по условиям наблюдения за судном пока не разработан, однако пробные запуски банка фильтров показывают, что маневры успешно обнаруживаются уже при $M = 100$, а дальнейшее увеличение числа одновременно работающих фильтров не дает какого-либо преимущества, но сопровождается ростом вычислительных затрат (на компьютере с тактовой частотой процессора 2.8 ГГц увеличение количества фильтров вдвое – до 200 – увеличивает время фильтрации траектории на 69 %).

Статистика морских происшествий свидетельствует о том, что ситуация «наблюдаемое судно начинает неожиданный маневр» является очень опасной и неоднократно приводила к авариям. Поэтому рассмотрим работу предлагаемого алгоритма сопровождения судна именно в такой ситуации. Будем предполагать, что наблюдаемый корабль входит в зону действия РЛС, двигаясь равномерно и прямолинейно, а затем, через некоторое случайное (с точки зрения алгоритма сопровождения) время начинает выполнять циркуляцию с неизвестным наперед радиусом. Таким образом, участок прямолинейного движения перед маневром выберем небольшим (100 отсчетов).

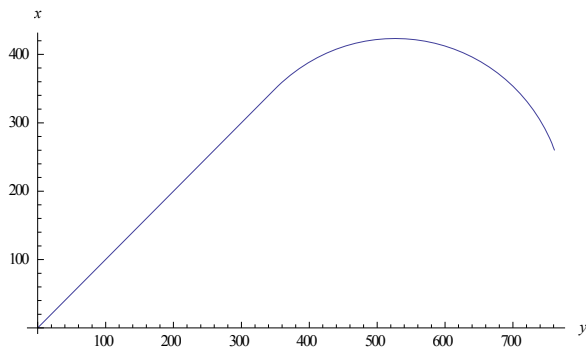


Рис. 1. Исходная траектория

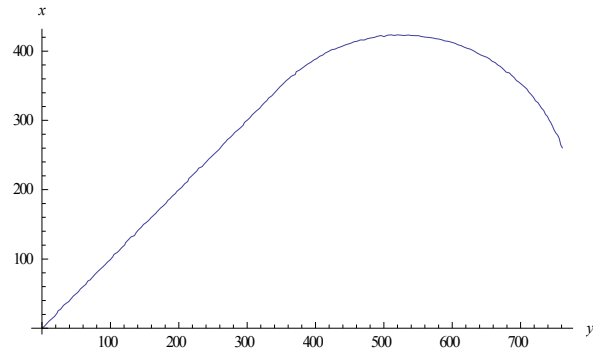


Рис.2. Траектория под воздействием волнения, ветра и течений

Видны небольшие отклонения от исходной траектории

Представляют интерес два аспекта работы данного алгоритма сопровождения: скорость обнаружения маневра и требования к вычислительной мощности. Оба эти свойства могут быть раскрыты в ходе вычислительного эксперимента, который проведем по следующему плану.

6.1. План эксперимента

1. Создание прямолинейного участка движения (движение судна после входа в зону действия РЛС).

Для скоростей движения 3 м/с, 5 м/с, 7 м/с, 10 м/с и 12 м/с выполнить моделирование траектории прямолинейного равномерного движения судна длиной 100 единиц дискретного времени. При моделировании траектории движения судна выберем интервал поступления радиолокационной информации 1 секунда (это соответствует частоте вращения антенны РЛС 60 об/мин; такими характеристиками обладает, например, береговая РЛС миллиметровых волн «НЕВА-Б»).

2. Моделирование участка циркуляции.

К каждой из полученных траекторий присоединить участок движения судна по окружности диаметром 50 м, 250 м, 500 м и 700 м. Длина каждого участка циркуляции соответствует 100 отсчетам. Таким образом, для каждой скорости получено 4 траектории, состоящие из участка прямолинейного движения и участка циркуляции, а общее количество смоделированных истинных траекторий равно 20.

Моделирование на этом этапе не учитывает волнение моря, течение и прочие внешние фак-

торы. Траектория для скорости 5 м/с и диаметра циркуляции 500 м приведена на Рис. 1.

3. Моделирование шума процесса (волнение моря, ветер, течение).

К координатам X и Y каждой точки из 20 истинных траекторий добавить случайную величину, имеющую распределение $N(0,0.5)$. Сгенерировать таким образом 100 зашумленных траекторий. Общее количество траекторий с шумом процесса равно 2000.

Траектория для скорости 5 м/с и диаметра циркуляции 500 м после моделирования воздействия моря, ветра и течения показана на Рис. 2.

4. Моделирование шума измерения декартовых координат.

Добавить к координатам X и Y точек траекторий, полученных на шаге 3, случайные величины, имеющие распределение $N(0,5)$.

Траектория для скорости 5 м/с и диаметра циркуляции 500 м с шумом процесса и шумом измерения отображена на Рис. 3.

5. Нормализация измерений и фильтрация.

Каждую из 2000 зашумленных траекторий, полученных на шаге 4, нормализовать (для приведения матрицы ковариации шума к единичной матрице). Для нормализации измерений достаточно разделить координаты X и Y каждой точки зашумленной траектории на 5 (стандартное отклонение шума измерения). Матрица H в этом случае принимает вид

$$H(t_i) = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

6. Фильтрация и обнаружение маневра.

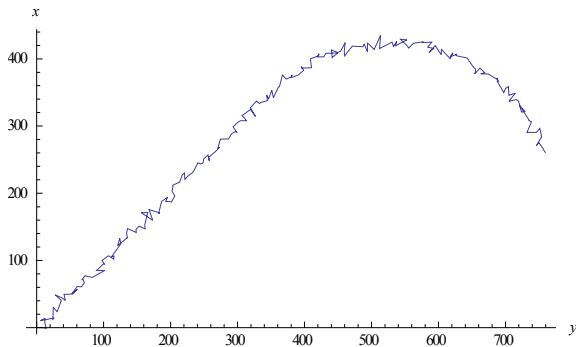


Рис. 3. Моделирование шума наблюдения
Добавлены помехи при наблюдении с помощью РЛС

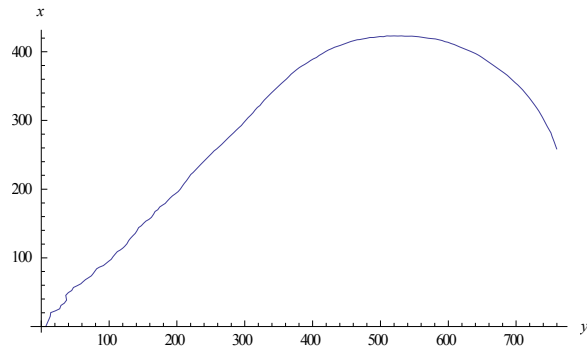


Рис. 4. Результат фильтрации траектории
банком фильтров Бирмана

Обработать 2000 нормированных траекторий при помощи банка фильтров Калмана. Каждый фильтр в банке фильтров работает по алгоритму, изложенному в разд. 5. При поступлении новых траекторных данных в банк фильтров добавляются 30 фильтров, соответствующих различным угловым скоростям:

- 15 фильтров для поворота вправо ($\exp\{i \cdot 0.3\}, i \cdot 2..16$);
- 15 фильтров для поворота влево ($\exp\{-i \cdot 0.3\}, i \cdot 2..16$).

В процессе фильтрации вычислять отношения правдоподобия [56]. Использовать следующие настройки фильтрации: $\gamma = 0.01, \delta = 0, M = 100$. Вероятности ошибок первого и второго рода задать равными $\alpha = \beta = 0.0001$.

Пример фильтрованной траектории приведен на Рис. 4.

Предложенное в п. 6 плана эксперимента экспоненциальное распределение угловых скоростей для добавляемых фильтров, в отличие от равномерного, акцентирует внимание на обнаружении маневров малой интенсивности. Такое решение позволяет, с одной стороны, повысить чувствительность к маневрам с малой угловой скоростью, а с другой – уменьшить количество вычислений за счет снижения количества фильтров, отвечающих резким, интенсивным маневрам. При этом чувствительность банка к резким маневрам судна остается на высоком уровне, что подтверждается экспериментальной проверкой.

Реализация изложенного плана эксперимента выполнена в среде Mathematica 8. Данный

инструмент облегчает планирование и проведение вычислительных экспериментов, поскольку обладает удобными средствами отладки программ, располагает мощным аппаратом визуализации данных и предоставляет готовые реализации множества часто применяемых математических операций.

6.2. Результаты вычислительного эксперимента

В осредненном виде, эти результаты представлены в таблице.

Среднее время обнаружения маневра, с

Скорость судна, м/с	Диаметр циркуляции, м			
	50	250	500	700
3	11,02	23,04	32,29	40,08
5	7,04	14,14	19,33	22,64
7	5,36	10,54	14,45	16,7
10	3,97	7,49	10,19	11,84
12	3,47	6,54	8,68	10

Наибольшее среднее время обнаружения маневра составило величину чуть большую 40 сек (40,08 с). Этот результат можно считать приемлемым, поскольку среднее время на выявление маневра при использовании радиолокационного наблюдения составляет, по данным источника [59], 1 мин 25 с.

6.3. Оценка размера банка фильтров

Большое количество одновременно работающих фильтров приводит к значительным затратам машинного времени. Так, фильтрация одной траектории длиной 200 точек при указанных настройках на компьютере с частотой процессора 2.8 ГГц занимает в среднем 27.2 с,

что составляет примерно 7 точек траектории в секунду. Фильтрация той же траектории единственным фильтром Бирмана (без обнаружения маневра) занимает в среднем 0,198 с (примерно 1000 точек в секунду). Затраты вычислительных ресурсов в схеме с банком фильтров оказываются весьма велики по сравнению со схемой «один фильтр + последовательный алгоритм обнаружения нарушения».

Тем не менее, у банка фильтров есть преимущество. Каждый фильтр в банке фильтров настроен на довольно «жесткую» модель движения, между которыми выполняется переключение. Итоговая траектория является последовательностью результатов работы нескольких фильтров, каждый из которых обрабатывает определенную модель движения оптимальным образом. Иная ситуация – в схеме с единственным фильтром, где фильтр вынужден работать в различных условиях: с одной стороны, он не должен упустить маневр и потому должен обладать достаточной чувствительностью к изменениям режима движения, отражающимся во входных координатных данных, а с другой – при движении судна по прямолинейной траектории фильтр должен как можно меньше реагировать на возмущения в радиолокационной информации. Выбор параметров настройки такого фильтра – компромисс при решении этих двух задач. Альтернативой может быть адаптивный фильтр с подстройкой параметров фильтрации под текущий режим работы, что, в свою очередь, потребует идентификации режима движения судна (определения наличия маневра), т.е. решения как раз той задачи, с которой успешно справляется банк фильтров.

6.4. Сравнение алгоритмов фильтрации

Фильтр Бирмана, в отличие от другого алгоритма фильтрации – фильтра Поттера, не содержит операции извлечения квадратного корня, что, как ожидалось, позволяет ему работать быстрее. Однако, в связи с тем, что эта операция все равно присутствует в формулах экстраполяции (для конкретной рассматриваемой задачи фильтрации траектории судна), это преимущество алгоритма Бирмана перед алгоритмом Поттера остается невостробованным. Заметим, что эти алгоритмы алгебраически эк-

вивалентны и дают одинаковые результаты, но могут отличаться по времени их получения. Для сравнения вычислительной сложности алгоритмов фильтрации проведен небольшой дополнительный эксперимент, который дал следующие результаты: среднее время фильтрации траектории фильтром Поттера составило 0,173 секунды, что на 0,025 секунды (14%) меньше, чем среднее время фильтрации траектории фильтром Бирмана. Таким образом, можно заключить, что для данной задачи с выбранной моделью движения применение фильтра Поттера окажется более эффективным решением.

Таким образом, предлагаемый алгоритм позволяет обнаружить не только факт, но и момент начала маневра, его направление и интенсивность (классифицировать величину угловой скорости). Эксперимент подтверждает, что с помощью данного алгоритма можно успешно решать практическую задачу сопровождения маневрирующего морского объекта.

Заключение

Вычислительные методы оптимального оценивания к настоящему времени стали самостоятельной областью исследования и получили большое развитие. Новые эффективные алгоритмы привлекательны не только своей устойчивостью (робастностью) по отношению к погрешностям округления в компьютере. Важным качеством, которое отмечается в литературе, является приспособленность ряда реализаций, использующих ортогональные преобразования матриц, к программированию этих методов в параллельных или векторных вычислительных системах. Банк фильтров Калмана также идеально приспособлен для распараллеливается вычислений. По существу, использование таких методов обработки справедливо относить к области эффективных математических информационных технологий, МИТ, в инженерии данных.

Методы, рассмотренные в данной статье, применимы в широком классе моделей состояния и измерений, включая нелинейные модели и адаптивные системы управления с обнаружением и адаптацией [27]. Одним из таких важных приложений с нелинейными моделями является задача скорейшего обнаружения маневра

морского подвижного объекта. В этой задаче расширенный фильтр Калмана, по сравнению с линейным фильтром для линейной модели, обладает меньшей численной устойчивостью из-за упрощения, лежащего в его основе, а именно: в случае фильтра первого порядка линеаризованная функция расчета следующего состояния системы включает лишь первые два элемента разложения в ряд Тейлора относительно текущей оценки. Предложенное в статье использование *LD*-алгоритма фильтрации для этой задачи повышает устойчивость фильтра к ошибкам машинного округления, предупреждая потерю матрицей ковариации ошибок фильтрации свойств положительной определенности и симметричности. Рассмотренная процедура обработки траектории судна при помощи эффективной реализации расширенного фильтра может вполне опираться на упрощенную модель движения судна. Величины, вычисляемые таким квадратно-корневым фильтром первого, а не второго [26], порядка могут быть непосредственно введены в несложные, экономичные формулы логарифма функции правдоподобия [28, 57], расширяя тем самым функциональность фильтра для успешной работы последовательного алгоритма обнаружения маневра [31], а в общем случае – и других модельных нарушений стохастической системы управления в дискретном времени.

Значение рассмотренных здесь устойчивых алгоритмов выходит за рамки классической задачи линейной фильтрации, то есть задачи оптимального LQG-оценивания (Linear-Quadratic-Gaussian). Для двойственной задачи оптимального дискретного LQ-управления соответствующие алгоритмы также построены; они рекомендованы как численно устойчивые алгоритмы итераций Риккати в обращенном времени для систем адаптивного и предиктивного (со скользким горизонтом) LQ-управления [60].

Литература

1. Kalman R.E. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems // *ASME Journal of Basic Engineering*, 1960, Vol. 82, pp. 34–45.
2. Fitzgerald R.J. Divergence of the Kalman Filter // *IEEE Trans. on Automatic Control*, 1971, Vol. AC-16, No. 6, pp. 736–747.
3. Potter J.E. and Stern R.G.. Statistical Filtering of Space Navigation Measurements // *Proceedings of 1963 AIAA Guidance and Control Conference*, AIAA, New York, 1963.
4. Семушин И.В. Вычислительные методы алгебры и оценивания: учебное пособие для вузов. – Ульяновск: УлГТУ, 2011. — 366 с. [ISBN 987-5-9795-0902-0] Доступно на <http://venec.ulstu.ru/lib/disk/2012/Semuwin.pdf>.
5. Lawson C.L. and Hanson R.J.. *Solving Least Squares Problems*. – Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1974.
6. Каминский П.Г., Брайсон А.Е., Шмидт С.Ф. Обзор современных методов дискретной фильтрации, использующих квадратные корни матриц // *Зарубежная радиоэлектроника*. – 1973. – №6. – с. 37-53.
7. Bierman G.J. *Factorization Methods for Discrete Sequential Estimation*. – Academic Press, New York, 1977.
8. Carraro C. and D. Sartore. Square Root Iterative Filter: Theory and Applications to Econometric Models // *Annales d'Economie et de Statistique*, 1987. No. 6/7, pp. 435–459.
9. Lange A.A. An Algorithmic Approach for Improving and Controlling the Quality of Upper-Air Data // *WMO Instruments and Observing Methods Report*, No. 35, World Meteorological Organization, Geneva, Switzerland, 1989.
10. Brockmann E. Combination of Solutions for Geodetic and Geodynamic Applications of the Global Positioning System (GPS) // *Geodatisch – geophysikalische Arbeiten in der Schweiz*, Vol. 55, Schweizerische Geodatische Kommission, 1997.
11. Murgu A. *Neural Networks for Planning and Control in Communication Networks*: PhD thesis. – University of Jyvaskyla, Finland, 1995.
12. Lange A.A. Optimal Kalman Filtering for Ultra-Reliable Tracking, ESA CD-ROM WPP-237 // *Atmospheric Remote Sensing Using Satellite Navigation Systems*, Proceedings, Special Symposium of the URSI Joint Working Group FG, 13–15 October 2003, Matera, Italy.
13. Piovoso M. and P.A. Laplante. Kalman Filter Recipes for Real-Time Image Processing // *Real-Time Imaging—Special Issue on Software Engineering Archive*, Vol. 9, Iss. 6, December 2003.
14. Ортега Дж. Введение в параллельные и векторные методы решения линейных систем: Пер.с англ. – М.:Мир, 1991.
15. Jover J.M., Kailath T. A Parallel Architecture for Kalman Filter Measurement Update and Parameter Estimation // *Automatica*, 1986, Vol. 22, No. 1, pp. 43-57.
16. Kailath T., Sayed A.H. and Hassibi B. *Linear Estimation*. – Prentice Hall, NJ, 1999.
17. Grewal M.S. and Andrews A.P. *Kalman Filtering: Theory and Practice Using MATLAB*, Second Edition. – John Wiley and Sons Inc., 2001. ISBNs: 0-471-39254-5 (Hardback) and 0-471-26638-8 (Electronic).
18. Семушин И.В. Разработка способов, программ, методик и рекомендаций для обработки экспериментальных данных на ЦВМ общего и специального назначения // Отчет по НИР. № 14-129/80, № ГР: 80042284, шифр “Сигма”. – Ульяновский политехнический институт, 1983, уч. № 2796. – 166 с.

19. Семушин И.В. Эффективные алгоритмы обновления оценок по измерениям // Судостроительная промышленность, сер. “Вычислительная техника” № 28, 1992, с. 55–59.
20. Семушин И.В. Экстраполяция во времени LD ковариационных факторов для фильтра Калмана // Судостроительная промышленность, сер. “Вычислительная техника” № 28, 1992, с. 27–30.
21. Семушин И.В., Куликов Г.Ю. Сборник лабораторных работ и контрольных, тестовых заданий по курсу Вычислительная линейная алгебра. Учебное пособие для вузов. – Ульяновск: Изд-во УлГТУ, 2000. – 119 с. URL: <http://staff.ulsu.ru/semushin/>
22. Вапник В.Н. Восстановление зависимостей по эмпирическим данным. – М.: Наука, 1979.
23. Огарков М.А. Методы статистического оценивания параметров случайных процессов. – М.: Энергоатомиздат, 1980.
24. Валеев С.Г. Регрессионное моделирование при обработке данных. – Казань: ФЭН, 2001.
25. Денисов В.И., Чубич В.М., Черникова О.С., Бобылева Д.И. Активная параметрическая идентификация стохастических линейных систем. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2009. [ISBN 978-5-7782-1182-7]
26. Semushin I.V., Dulov E.V. and Kalinin L.V. Stable Estimate Renewal According to Measurements // Pattern Recognition and Image Analysis, Conference Proceedings. – St. Petersburg–Moscow: MAIK “Nauka / Interperiodica” Publishing, 1996, Vol. 6, No. 1, p. 86.
27. Семушин И.В. (Гл.1 и Гл.2), Цыганова Ю.В. (Гл.3), Куликова М.В. (Гл.4), Фатьянова О.А. (Гл.5) и Кондратьев А.Е. (Гл.5). Адаптивные системы фильтрации, управления и обнаружения: коллективная монография под ред. проф. И.В. Семушина. – Ульяновск: Изд-во УлГУ, 2011. – 298 с. – ISBN 978-5-88866-399-8.
28. Куликова М.В. О скаляризованном вычислении функции правдоподобия в квадратно-корневых матричных алгоритмах фильтрации // Автоматика и телемеханика, 2009, № 5, с. 122–139.
29. Kulikova, M.V. Likelihood Gradient Evaluation Using Square-Root Covariance Filters // IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 54, No. 3, March 2009, pp. 646–651.
30. Цыганова Ю.В. Вычисление градиента вспомогательного функционала качества в задаче параметрической идентификации стохастических систем // Автоматика и телемеханика, 2011, № 9, с. 142–160.
31. Захаров К.В. Динамическая настройка алгоритма обнаружения маневра морской цели // Автоматизация процессов управления, 2011, № 4(26), с. 88–92.
32. Маттис А.В. Оптимальное управление движением морских подвижных комплексов // Автоматизация процессов управления, 2011, № 1(23), с. 88–92.
33. Li, X.R. and V.P. Jilkov. Survey of Maneuvering Target Tracking. Part I: Dynamic Models // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, October 2003, Vol. 39, No. 4, pp. 1333–1364.
34. Bar-Shalom Y., Li X.R. and Kurubarajan T. Estimation with Application to Tracking and Navigation. – Wiley, 2001.
35. Сейдж Э., Мелса Дж. Л. Идентификация систем управления. – М.: Наука, 1974.
36. Daowang F.; Teng L., and Tao H.Z. Square-Root Second-Order Extended Kalman Filter and Its Application in Target Motion Analysis // Radar, Sonar & Navigation, IET, No. 4, Iss. 3, pp. 329 – 335. [doi: 10.1049/iet-rsn.2008.0070]
37. Carlson N. A. Fast triangular formulation of the square root filter // AIAA Journal, Vol. 11, No. 9, pp. 1259–1265, 1973.
38. Agee W. S. and Turner R. H. Triangular Decomposition of a Positive Definite Matrix Plus a Symmetric Dyad, with Applications to Kalman Filtering, White Sands Missile Range Tech. Rep. No. 38, Oct. 1972.
39. Willigenburg G.V. UD and LD Factorization of Nonnegative Matrices and Associated Kalman Filter Implementations // <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/32537-udu-factorization-kalman-filtering> – 15 Aug 2011 (Updated 03 Mar 2012).
40. Gentleman W. M. Least squares computations by Givens transformations without square roots // Journal of the Institute for Mathematical Applications, Vol. 12, pp. 329–336, 1973.
41. Thornton C. L. and Bierman G. J. A Numerical Comparison of Discrete Kalman Filtering Algorithms: An Orbit Determination Case Study, JPL Technical Memorandum 33-771, Pasadena, 1976.
42. Dyer P., McReynolds S. Extension of square-root filtering to include process noise // Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 3, pp. 444–458, 1969.
43. Morf M. and Kailath T. Square root algorithms for least squares estimation // IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 20, pp. 487–497, 1975.
44. Higham, N. J. J-orthogonal matrices: properties and generalization // SIAM Review. V. 45. No. 3. 2003. P. 504–519.
45. Morf M., Sidhu G. and Kailath T. Some new algorithms for recursive estimation in constant, linear, discrete-time systems // IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 19, pp. 315–323, 1974.
46. Swerling P. First order error propagation in a stagewise differential smoothing procedure for satellite observations // Journal of Astronautical Sciences, Vol. 6, pp. 46–52, 1959.
47. Bar-Itzhak I.V. Medan Y. Efficient Square Root Algorithm for Measurement Update in Kalman Filtering // Journal of Guidance, Control and Dynamics, 1983, Vol. 6, No.1, pp. 129–134 [Русский перевод: И. Бар-Ицхак, И. Мэден // Аэрокосмическая техника, 1984, Т. 2, №1, С. 141–147.]
48. Катханов М.Н. Теория судовых автоматических систем. – Л.: Судостроение, 1985.
49. Лукомский Ю.А., Пешехонов В.Г., Скороходов Д.А. Навигация и управление движением судов. – СПб.: Элмор, 1996.
50. Павленко В.Г. Ходкость и управляемость судов. – М.: Транспорт, 1991.
51. Справочник по теории корабля: Гидродинамика. Сопротивление движению судов. Судовые движители. В 3-х т. Под ред. Я.И. Войткунского. – Л.: Судостроение, т. 1, 1985.
52. Barrios C., Himberg H., Motai Yu., Sadek A. Multiple Model Framework of Adaptive Extended Kalman Filtering

- for Predicting Vehicle Location // Proceedings of the 2006 IEEE Intelligent Transportation Systems Conference, Toronto, Canada, September 17-20, 2006, pp. 1053-1059.
53. Юдович А.Б. Столкновения морских судов, их причины и предупреждение. – М: Изд-во “Транспорт”, 1972.
54. Semoushin I.V, Tsyganova Y.V, Kulikova M.V. Fault Point Detection with the Bank of Competitive Kalman Filters // Soot, P. M A et al (eds) Computational Science ICCS 2003. Proceedings, Part II: Lecture Notes in Computer Science. 2003. P. 417-426.
55. Hanlon P.D., Maybeck P.S. Interrelationship of Single-Filter and Multiple-Model Adaptive Algorithms // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1998, Vol. 34, No. 3, pp. 934-946/
56. Wald A. Sequential Analysis.— New York: Wiley, 1947.
57. Semoushin I. V., Tsyganova J. V. An Efficient Way to Evaluate Likelihood Functions in Terms of Kalman Filter Variables // Adaptive, Cooperative and Competitive Processes in Systems Modelling, Design and Analysis, Alexandru Murgu and George E. Lasker (eds.). – The International Institute for Advanced Studies in Systems Research & Cybernetics: University of Windsor, Windsor, Ontario, Canada, 2001, pp. 67-74.
58. Захаров К.В. Новый метод формирования банка фильтров Калмана при обнаружении нарушения // Научный обозреватель, 2011, №9. – С. 52-54.
59. Вагущенко Л.Л., Вагущенко А.Л. Поддержка решений по расхождению с судами. К.: Фенікс, 2010.
60. Semushin I.V. Adaptation in Stochastic Dynamic Systems – Survey and New Results III: Robust LQ Regulator Modification // Int. J. Communications, Network and System Sciences, 2012, No.5, pp.609-623 doi:10.4236/ijcns.2012.529071 Published Online September 2012 (<http://www.SciRP.org/journal/ijcns>).

Семушин Иннокентий Васильевич. Профессор кафедры информационных технологий Ульяновского государственного университета (УлГУ). Окончил Ленинградский электротехнический институт (ЛЭТИ) им. В.И. Ульянова (Ленина) в 1964 году. Доктор технических наук. Автор 216 печатных работ, включая 3 монографии и 5 патентов. Область научных интересов: фильтрация и управление по неопределенным и подверженным непредвиденным изменениям данным. E-mail: kentvsem@yandex.ru, <http://staff.ulsu.ru/semushin/>

Цыганова Юлия Владимировна. Доцент кафедры информационных технологий УлГУ. Окончила Ульяновский государственный университет (УлГУ) в 1996 году. Кандидат физико-математических наук. Автор 53 печатных работ и 1 монографии. Область научных интересов: параметрическая идентификация, адаптивная фильтрация и численно эффективные алгоритмы для стохастических систем. E-mail: tsyganovajv@gmail.com

Захаров Климент Валерьевич. Инженер-программист ФНПЦ ОАО «НПО «Марс». Окончил Ульяновский государственный университет (УлГУ) в 2008 году. Автор 12 печатных работ. Область научных интересов: специальные статистические приложения и модели, цифровое имитирование и моделирование систем, системы судовождения и управления судном. E-mail: zaharov-k@yandex.ru