

# Оценка показателей работы вычислительной системы реального времени, содержащей узлы с параллельным выполнением процессов

В.Г. Литвин, Е.В. Чернышова, Ю.В. Литвин

**Аннотация.** В статье рассматривается аналитическая приближенная сетевая модель системы реального времени, содержащая узлы с параллельным выполнением разделенных на потоки процессов. Оценка времени выполнения процессов в параллельных узлах осуществляется с помощью методов порядковых статистик, использование которых позволило расширить существующие схемы расчета показателей производительности сетевых моделей. Расчет сетей, содержащих параллельные узлы, производился методом анализа средних значений (MVA). Применение разработанной схемы расчета сетевых моделей вычислительных систем иллюстрируется конкретными примерами.

**Ключевые слова:** системы реального времени, параллельное выполнение процессов, порядковые статистики, MVA.

## Введение

На различных стадиях жизненного цикла вычислительных систем (ВС) реального времени возникают потребности в анализе характеристик динамики процессов их работы, оценке времени ответа на поступающие запросы и определении возможных «узких мест». Механизмы планирования выполнения процессов таких систем весьма разнообразны [1, 2]. Для анализа принимаемых решений по организации вычислительного процесса в подобных системах часто используются два аналитических инструмента: модели систем и сетей массового обслуживания (СМО и СеМО) и стохастические сети Петри (ССП) [3-10]. В статье рассматривается первый подход к моделированию вычислительных систем реального времени, обеспечивающий оценку усредненных показателей их функционирования. Применение СеМО как инструмента анализа и обоснования

принимаемых решений по выбору архитектуры и организации вычислительного процесса обычно позволяет освободиться от второстепенных не значимых для конкретного исследования факторов и сконцентрировать свое внимание на ключевых особенностях динамики протекающих процессов.

Часто используемыми подходами к оценке показателей работы ВС, представленных СеМО, являются точные и приближенные аналитические алгоритмы расчета СеМО [4, 6, 8] и имитационные модели [11, 12]. Применение имитационного моделирования для решения указанных задач вполне приемлемо, а часто и единственно возможно, однако обычно это ведет к трудоемким процессам подготовки исходных данных и требует значительных затрат времени на проведение экспериментов.

Широкое распространение в практике аналитических расчетов СеМО приобрел метод анализа средних величин (MVA). На основе ре-

зультатов [13] получено множество точных и приближенных методов расчета СеМО, базирующихся на указанном методе [4, 7, 14, 15]. Итерационные процедуры данного метода строятся на двух ключевых положениях:

1. стационарные вероятности состояния сети в момент поступления запроса в узел  $i$  совпадают со стационарным состоянием сети без этого запроса для произвольного момента времени;

2. на формуле Литтла [7, 13]. Одной из особенностей ВС, требовавшей развития специальных методов оценок, позволяющих использовать алгоритмы MVA, является параллельное выполнение потоков работ в процессорных узлах сети [17-21]. Настоящий этап развития компьютеров в части повышения их производительности видится в использовании многоядерных процессоров и параллельного выполнения процессов. В то же время применение моделей ВС и методов их расчета, содержащих узлы с параллельным выполнением процессов при ограниченном числе ядер, в ряде случаев нуждается в особых подходах к расчету показателей производительности. Так, требования реального времени в некоторых системах накладывает известные ограничения на соответствующие процессы и используемые ими ресурсы. Например, закрепление за такими процессами ядер процессора или страниц основной памяти существенно сужает возможности влияния на них других процессов. Более того, существующий тренд в развитии и использовании памяти способствует уменьшению или даже устранению блокировок выполнения процессов из-за обращений к внешней памяти с механическими задержками в доступе к информации [22]. Существуют и другие примеры систем, в которых необходима оценка общего времени параллельно выполняемых работ. Так, при известных ограничениях подобные ситуации возникают при моделировании времени выполнения запросов файловой системой, наборы данных в которой разнесены по нескольким внешним накопителям, или при рассмотрении сети с коммутацией пакетов, когда разделенное на пакеты сообщение передается параллельно по сети передачи данных и требуется определить время передачи сообщения в целом и т.д.

Для оценки времени выполнения процесса, разделенного на потоки, при ограниченном

числе ядер процессора нами в статье разработана схема расчета, базирующаяся на методе порядковых статистик. В результате получены выражения для вероятностных распределений времени выполнения процессов в соответствующих узлах, а использование оценок средних характеристик дало возможность применить для расчета сетей массового обслуживания с параллельным выполнением потоков работ алгоритмы MVA.

## 1. Вероятностное распределение времени выполнения процесса на многоядерном процессоре

Пусть узел сети, состоящий из процессора с  $N$  ядрами, выполняет процесс, представленный в виде  $L$  потоков работ. Рассмотрим два случая:

А) случай, когда число потоков процесса, выполняемых параллельно, совпадает с числом ядер ( $L = N$ );

Б) случай, когда число протоков процесса превышает число ядер ( $L > N$ ).

А. Упрощенная схема модели для первого случая ( $L = N$ ) приведена на Рис.1. Переходы  $t_1$  и  $t_2$  блокируют выполнение новых процессов до полного завершения процесса, принятого к обслуживанию. Другие поступившие процессы ожидают в очереди к переходу  $t_1$ .

Считаем, что время выполнения каждого потока является непрерывной независимой случайной величиной  $X_i$  со своей функцией распределения (ФР)  $F_i(t) = P(X_i \leq t)$  и плотностью (ПР)  $f_i(t)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $t = \overline{0, \infty}$ . Так как все потоки при запуске процесса начинают выполняться одновременно, то моменты завершения каждого из них совпадают с  $X_i$ . Расположив случайные моменты времен завершения потоков работ в порядке возрастания, получим следующую упорядоченную последовательность:  $X_{1:N}, X_{2:N}, \dots, X_{N:N}$ , где  $X_{1:N} \leq X_{2:N} \leq \dots \leq X_{N:N}$ .  $X_{i:N}$ ,  $1 \leq i \leq N$ ,  $i$  называют  $i$ -ой порядковой статистикой выборки  $X_1, X_2, \dots, X_N$ . В общем случае (при  $N$  потоках) плотность распределения вероятностей времени  $X_{r:N}$ ,  $r = \overline{1, 2, \dots, N}$ , выражается через исходные функции и плотности распределения отдельных потоков следующим образом [23-25].



Рис. 1. Многопоточное выполнение процесса

$$f_{r:N}(t) = \frac{1}{(r-1)!(N-r)!} per(A_r) =$$

$$= \frac{1}{(r-1)!(N-r)!} \sum_P F_{i_1}(t) \dots F_{i_{r-1}}(t) \times$$

$$\times [1 - F_{i_{r+1}}(t)] \dots [1 - F_{i_N}(t)], (1)$$

где  $Per A_r$  – перманент матрицы  $A_r$ ;

$$A_r = \left( \begin{array}{cccc} F_1(t) & F_2(t) & \dots & F_N(t) \\ f_1(t) & f_2(t) & \dots & f_N(t) \\ 1 - F_1(t) & 1 - F_2(t) & \dots & 1 - F_N(t) \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \} r - 1 \\ \} 1 \\ \} N - r \end{array} \right. (2)$$

$\} i$  – обозначает  $i$  совпадающих строк матрицы;  
 $\sum_P$  – обозначает сумму всех  $N!$  перестановок  $(i_1, i_2, \dots, i_N)$  для  $(1, 2, \dots, N)$ .

Вычисление перманента представляет собой трудоемкую операцию. Для квадратной матрицы  $A$  перманент может быть рассчитан по следующей формуле [26]

$$per(A) = S(A) - \sum S(A^1) + \sum S(A^2) - \dots + (-1)^{N-1} \sum S(A^{N-1}), (3)$$

где  $A^i$  – матрица  $A$ , в которой элементы столбца  $i$  заменены нулями;

$S(A)$  – произведение сумм строк матрицы  $A$ ;  
 $\sum S(A^i)$  – сумма по всем столбцам произведений суммарных строк матрицы  $A^i$ .

Применяя перманент, можно определить также функции распределения порядковых статистик

$$F_{r:N} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{(N-1)!} per(B_{rk}) =$$

$$= \sum_{i=r}^N \frac{1}{i!(N-i)!} \sum_P F_{k_1}(t) \dots F_{k_i}(t) [1 - F_{k_{i+1}}(t)] \dots$$

$$[1 - F_{k_N}(t)] (4)$$

где

$$B_{rk} = \left( \begin{array}{ccc} F_1(t) & \dots & F_N(t) \\ 1 - F_1(t) & \dots & 1 - F_N(t) \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \} k \\ \} N - k \end{array} \right. (5)$$

Выражения (1) и (4) позволяют оценить распределения времени выполнения процессов с любым конечным числом одновременно выполняемых потоков.

Для обеспечения большей прозрачности рассмотрим технику использования порядковых статистик в решении рассматриваемой задачи на примере двухядерного процессора и процесса, представленного двумя потоками работ с ФР  $F_1(t)$  и  $F_2(t)$  и ПР  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$ . Переход к случаю с  $N$  потоками и соответствующим количеством ядер может быть произведен по аналогичной схеме, с помощью общих выражений (1) и (4).

Введем квадратные матрицы для определения распределения интервалов времени от начала выполнения до первого и второго моментов завершения выполняемых потоков:

$$A_1(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ 1 - F_1(t) & 1 - F_2(t) \end{pmatrix}$$

для  $r=1$ ,

$$A_2(t) = \begin{pmatrix} F_1(t) & F_2(t) \\ f_1(t) & f_2(t) \end{pmatrix}$$

для  $r=2$ .

Используя (1) и воспользовавшись формулой (3), найдем выражения для плотности распределения времени до завершения одного и другого потоков. ПР интервалов времени до первого и второго моментов завершения выполнения потоков определяются следующим образом:

$$f_{1:2}(t) = per(A_1) =$$

$$= [(f_1(t) + f_2(t))][(1 - F_1(t)) + (1 - F_2(t))] -$$

$$- f_1(t)(1 - F_1(t)) - f_2(t)(1 - F_2(t)) =$$

$$= f_1(t)(1 - F_2(t)) + f_2(t)(1 - F_1(t)), t \geq 0. (6)$$

$$f_{2:2}(t) = per(A_2) = (F_1(t) + F_2(t))(f_1(t) + f_2(t)) - (F_1(t)f_1(t) + F_2(t)f_2(t)) = f_1(t)F_2(t) + f_2(t)F_1(t), t \geq 0. \quad (7)$$

Понятно, что для случая с двумя потоками выражения для плотностей порядковых статистик могут быть выписаны напрямую без использования перманента. Отметим, что приведенная процедура расчета распределений сохраняется и в случае дискретных случайных величин. Процедуры и примеры поиска дискретных распределений случайных величин приведены в [25] для параллельно выполняемых работ проектов.

На практике при аналитическом исследовании систем в качестве исходных законов распределения времен выполнения каких-либо работ часто используют экспоненциальные распределения в непрерывном случае и геометрические распределения - в дискретном. Это позволяет получить явные компактные формулы для распределений и их моментов. Рассмотрим эти случаи на двух упрощенных примерах.

Пример 1. Экспоненциальное время выполнения потоков ( $F_i(t) = 1 - e^{-\mu_i t}, i = 1, 2$ ). Используя (7), выпишем следующие выражения для распределения времени выполнения процесса.

$$f_{2:2}(t) = \mu_1 e^{-\mu_1 t} + \mu_2 e^{-\mu_2 t} - (\mu_1 + \mu_2) e^{-(\mu_1 + \mu_2)t}.$$

Если  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ , то

$$f_{2:2}(t) = f(t) * F(t) = 2\mu e^{-\mu t} (1 - e^{-\mu t}).$$

Моменты времени выполнения процесса определим, используя преобразование Лапласа плотности распределения  $f_{2:2}(t)$ .

$$\hat{f}_{2:2}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f_{2:2}(t) dt = \frac{\mu_1}{s + \mu_1} + \frac{\mu_2}{s + \mu_2} - \frac{\mu_1 + \mu_2}{s + \mu_1 + \mu_2}. \quad (8)$$

Теперь стандартным образом можно получить явные выражения для среднего времени ( $\bar{\theta}_{2:2}$ ) и среднего квадратического отклонения ( $\bar{\sigma}_{2:2}$ ) времени выполнения процесса:

$$\bar{\theta}_{2:2} = -\frac{d}{ds} \hat{f}_{2:2}(s)|_{s=0} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_1 + \mu_2}. \quad (9)$$

Второй начальный момент определяется так

$$\overline{\tau}_{2:2}^{(2)} = \frac{d^2}{ds^2} \hat{f}_{2:2}(s)|_{s=0} = \frac{2}{\mu_1^2} + \frac{2}{\mu_2^2} - \frac{2}{(\mu_1 + \mu_2)^2}.$$

Тогда среднее квадратичное отклонение (с.к.о.) ( $\bar{\sigma}_{2:2}$ ) определяется стандартным образом

$$\bar{\sigma}_{2:2} = \sqrt{\overline{\tau}_{2:2}^{(2)} - (\bar{\theta}_{2:2})^2}. \quad (10)$$

Пример 2. Геометрическое распределение для двух ядер процессора ( $N=2$ ). Пусть времена выполнения отдельных потоков ( $X_1$  и  $X_2$ ) принимают дискретные значения на множестве  $t = 1, 2, \dots$  с распределениями  $f_i(t) = q_i^{t-1} p_i, p_i + q_i = 1, i = 1, 2$ . Тогда ПР длительности выполнения процесса будет иметь следующий вид:

$$f_{2:2}(t) = q_1^{t-1} p_1 F_2(t) + q_2^{t-1} p_2 F_1(t-1) = q_1^{t-1} p_1 (1 - q_2^t) + q_2^{t-1} p_2 (1 - q_1^{t-1}),$$

где  $F_i(t) = (1 - q_i^t), i = 1, 2; t = 1, 2, \dots$ .

Выпишем для  $f_{2:2}(t)$  производящую функцию и определим моменты подобно экспоненциальному случаю:

$$\begin{aligned} \hat{f}_{2:2}(z) &= zG(z) = z \left[ \frac{p_1}{1 - q_1 z} + \frac{p_2}{1 - q_2 z} - \frac{p_1 q_2 + p_2}{1 - q_1 q_2 z} \right], \\ |z| &\leq 1, \\ \bar{\tau}_{2:2} &= G(z)|_{z=1} - \frac{d}{dz} G(z)|_{z=1} = 1 + \frac{q_1}{p_1} + \frac{q_2}{p_2} - \frac{q_1 q_2 (p_1 q_2 + p_2)}{(1 - q_1 q_2)^2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Используя (11), можно найти явное выражение для с.к.о. времени выполнения процесса.

Аналогичным образом поступают в случае большего количества ядер и потоков и произвольных законов распределения времени выполнения потоков.

Б. Более интересный для практики, но и более сложный случай возникает, когда количество ядер процессора меньше одновременно выполняемых потоков и требуется определить распределение полного времени выполнения процесса до начала обслуживания других процессов. Рассмотрим процессор с  $N$  ядрами, выполняющий процесс, состоящий из  $L$  потоков ( $L > N$ ). Предполагается, что последовательность поступления потоков на процессор упорядочена - в начальный момент времени процессор выполняет  $N$  первых потоков, затем, после завершения выполнения одного из них и освобождения ядра, из очереди выбирается следующий поток и т.д. (Рис.2). Для данного варианта поиск функций и плотностей распределений

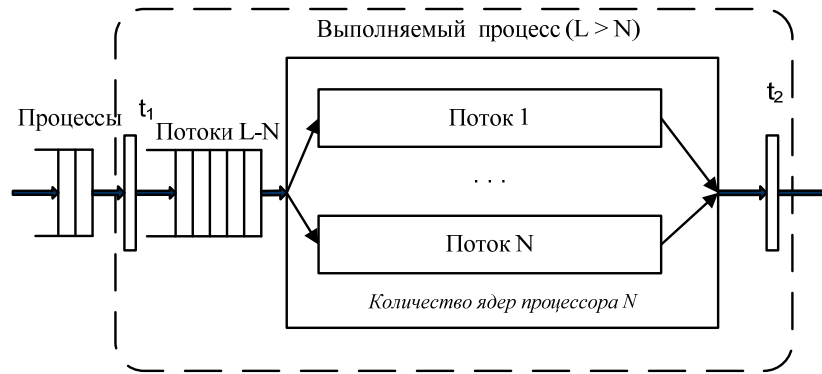


Рис.2. Выполнение процесса на процессоре с количеством потоков, превышающих количество ядер

времени выполнения процесса существенно усложняется даже при экспоненциальных предположениях распределений времени выполнения потоков ( $F_i(t) = 1 - e^{-\mu_i t}, i = \overline{1, L}$ ).

Будем проводить анализ одновременного выполнения потоков на специально выделенных временных периодах. Первый период начинается с параллельного выполнения  $N$  потоков и завершается освобождением одного из ядер. В этот момент поток, завершивший свое выполнение, покидает ядро, а его место занимает новый поток рассматриваемого процесса. Таким образом, в очереди невыполненных потоков остается  $L-N-1$  поток и  $N$  потоков продолжают выполняться процессором. С этого момента берет начало второй период, в течение которого обслуживаются незавершенные потоки из первого периода и вновь поступивший новый поток, и т.д. После исчезновения внешней очереди потоков, дальнейшее выполнение оставшихся  $N$  потоков продолжается до завершения выполнения процесса в целом. Этот период мы обозначим через  $L-N+1$ . Схематично указанные случайные интервалы времени показаны на Рис.3; их сумма определяет время выполнения процесса в целом.

Следует отметить, что в каждый период меняется состав одновременно выполняемых по-

токов, т.е. появляются и уходят потоки со своими законами распределения.

Распределение времени выполнения процесса будем искать путем реализации трех шагов:

1) определение ПР длительностей первых  $L-N$  периодов времени;

2) определение распределения времени выполнения оставшихся  $N$  потоков (период  $L-N+1$ );

3) свертка полученных распределений и определение конечного результата – распределения времени выполнения процесса в целом.

Для расчета распределений времени первого периода (до завершения выполнения первого потока) используются формулы (1) и (4), в которых в качестве ПР и ФР подставлены исходные экспоненциальные распределения параллельно выполняемых потоков.

Так как для каждого из  $L-N$  интервалов нас интересуют распределения первого завершенного потока, введем для них следующие обозначения: для ПР –  $w_j(t) = f_{1:N}(j, t)$ ; для ФР –  $W_j(t) = F_{1:N}(j, t)$ . При этом расчеты ПР и ФР проводятся по формулам (1) и (4), только в качестве матриц берутся те из них, которые соответствуют периоду оценки. Для этого на каждом периоде расчета необходимо модифицировать матрицы предыдущего периода, так

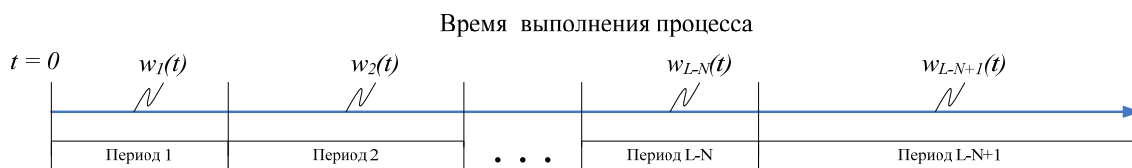


Рис.3. Интервалы времени выполнения потоков процесса

как из состава параллельно выполняемых потоков в новом периоде исключается поток, завершивший свое выполнение, и включается новый поток из очереди невыполненных.

Ввиду экспоненциальности и независимости времени выполнения каждого потока, вероятность того, что первым завершится  $k$ -ый поток из  $N$  одновременно выполняемых на интервале  $j$ , определяется следующим образом  $q_k(j) = \frac{\mu_k(j)}{\sum_{k=1}^N \mu_k(j)}$ , ( $\sum_{k=1}^N q_k(j) = 1$ ). Таким образом для очередного невыполненного потока периода  $j$  в матрицах (2) и (5) поочередно заменяются столбцы матрицы для всех  $k, k=\overline{1, N}$  периода  $j-1$ , и производится последовательный расчет новых ПР  $f_{1:N}^k(j, t)$  и ФР  $F_{1:n}^k(j, t)$  по формулам (1) и (4). Матрицы  $A$  и  $B$  последовательно вычисляются по мере замены столбцов путем взвешивания вероятностями заменяемых столбцов. Например, для периода  $j$  матрица  $A$  вычисляется следующим образом

$$A_1(j) = \sum_{k=1}^N q_k(j-1)A_1(j, k),$$

где  $j = \overline{1, L-N}$ ;

$A_1(j, k)$ - матрица, в которой  $k$ -ый столбец заменен распределениями вновь поступившего на выполнение очередного потока, причем в качестве исходной для замены берется матрица  $A_1(j-1)$ ;

$q_k(j-1)$  - вероятность того, что на интервале  $j$  будет заменен столбец  $k$ .

Подставив полученные матрицы в (1) и (4), найдем искомые распределения интервала  $j$ :  $w_j(t) = f_{1:N}(j, t)$  и  $W_j(t) = F_{1:N}(j, t)$ .

Время выполнения оставшихся потоков (последний интервал времени завершения выполнения процесса  $L-N+1$ ) определяется стандартным образом как размах порядковых статистик  $X_{L-N+1:N} - X_{N:N}$  [23]. Чтобы формулы для последнего периода имели более привычный вид, переобозначим индексы следующим образом:  $L-N+1$  обозначим через  $1$ ,  $L$  - через  $N$ , а  $w_{L-N+2}(t)$  - через  $w'(t)$ . Тогда распределение размаха будет определяться стандартным образом

$$w'(t) = \frac{1}{(N-2)!} \int_{-\infty}^{\infty} per(C_{1N}) d\tau =$$

$$= \frac{1}{(N-2)!} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_P f_{l_1}(1, t) [F_{l_1}(1, t + \tau) - F_{l_1}(1, t)] \dots [F_{l_N}(1, t + \tau) - F_{l_N}(1, t)] f_{l_N}(1, \tau) d\tau,$$

где матрица  $C$  определяется через ранее полученные выражения для плотностей и функций распределений длительности выполнения потоков на интервале  $L-N+1$

$$C_{1N} = \begin{pmatrix} f_1(1, t) & \dots & f_N(1, t) \\ F_1(1, t + \tau) - F_1(1, t) & \dots & F_N(1, t + \tau) - F_N(1, t) \\ f_1(1, \tau) & \dots & f_N(1, \tau) \end{pmatrix} \begin{matrix} \} 1 \\ \} N-2 \\ \} 1. \end{matrix}$$

И наконец, плотность распределения времени выполнения процесса в целом будет определяться через свертку полученных плотностей выделенных периодов.

Пример 3. Рассмотрим двухядерный процессор, в котором в отличие от примера 1 процесс делится на три потока, время выполнения каждого из которых имеет свое экспоненциальное распределение  $F_i(t) = 1 - e^{-\mu_i t}$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Таким образом, в соответствии с предложенной схемой расчета, мы будем иметь три периода.

1. Плотность распределения времени завершения выполнения первого по порядку потока определяется по (1).

$$w_1(t) = f_{1:2}(t) = per(A_1) = (\mu_1 + \mu_2)e^{-(\mu_1 + \mu_2)t},$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} \mu_1 e^{-\mu_1 t} & \mu_2 e^{-\mu_2 t} \\ e^{-\mu_1 t} & e^{-\mu_2 t} \end{pmatrix}.$$

Преобразование Лапласа ПР  $w_1(t)$  имеет следующий вид:

$$\hat{w}_1(s) = \frac{\mu_1 + \mu_2}{s + \mu_1 + \mu_2}.$$

Среднее значение первого интервала  $\bar{\theta}_1$

$$\bar{\theta}_1 = - \frac{d\hat{w}_1(s)}{ds} \Big|_{s=0} = \frac{1}{\mu_1 + \mu_2}.$$

2. Вероятность того, что из двух потоков первым завершит свое выполнение поток  $i$ , равна

$$q_i = \frac{\mu_i}{\mu_1 + \mu_2}, i = 1, 2.$$

3. Определение матрицы  $A_1(2)$  учитывает тот факт, что на втором интервале будет выполняться либо поток 1 с вероятностью  $q_2$ , либо поток 2 с вероятностью  $q_1$

$$A_1(2) = \begin{pmatrix} q_2\mu_1 e^{-\mu_1 t} + q_1\mu_2 e^{-\mu_2 t} & \mu_3 e^{-\mu_3 t} \\ q_2 e^{-\mu_1 t} + q_1 e^{-\mu_2 t} & e^{-\mu_3 t} \end{pmatrix}.$$

4. Определение плотности распределения времени второго периода

$$w_2(t) = f_{1;2}^2(t) = per(A_1(2)) = q_1[\mu_2 e^{-(\mu_2+\mu_3)t} + \mu_3 e^{-(\mu_2+\mu_3)t}] + q_2[\mu_1 e^{-(\mu_1+\mu_3)t} + \mu_3 e^{-(\mu_1+\mu_3)t}].$$

$$\widehat{w}_2(s) = q_1 \left[ \frac{\mu_2}{s + \mu_2 + \mu_3} + \frac{\mu_3}{s + \mu_2 + \mu_3} \right] + q_2 \left[ \frac{\mu_1}{s + \mu_1 + \mu_3} + \frac{\mu_3}{s + \mu_1 + \mu_3} \right].$$

Среднее значение второго интервала  $\bar{\theta}_2$

$$\bar{\theta}_2 = q_1 \frac{1}{\mu_2 + \mu_3} + q_2 \frac{1}{\mu_1 + \mu_3}.$$

5. Плотность распределения третьего периода будет иметь следующий вид

$$w_3(t) = q_1 \left[ \frac{\mu_2}{\mu_2 + \mu_3} \mu_3 e^{-\mu_3 t} + \frac{\mu_3}{\mu_2 + \mu_3} \mu_2 e^{-\mu_2 t} \right] + q_2 \left[ \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_3} \mu_3 e^{-\mu_3 t} + \frac{\mu_3}{\mu_1 + \mu_3} \mu_1 e^{-\mu_1 t} \right].$$

$$\widehat{w}_3(s) = q_1 \frac{\mu_2 \mu_3}{\mu_2 + \mu_3} \left[ \frac{1}{s + \mu_3} + \frac{1}{s + \mu_2} \right] + q_2 \frac{\mu_1 \mu_3}{\mu_1 + \mu_3} \left[ \frac{1}{s + \mu_3} + \frac{1}{s + \mu_1} \right].$$

Среднее значение третьего интервала  $\bar{\theta}_3$

$$\bar{\theta}_3 = q_1 \frac{1}{\mu_2 + \mu_3} \left[ \frac{\mu_3}{\mu_2} + \frac{\mu_2}{\mu_3} \right] + q_2 \frac{1}{\mu_1 + \mu_3} \left[ \frac{\mu_3}{\mu_1} + \frac{\mu_1}{\mu_3} \right].$$

6. Преобразование Лапласа плотности распределения времени выполнения процесса (свертка полученных распределений интервалов) и моменты определяются стандартным образом.

Так как узлы с параллельным выполнением работ входят в состав СеМО, то для приближенной оценки ее характеристик с использованием метода средних величин (MVA) достаточно было найти первый момент полученного распределения процесса  $\bar{\theta} = \bar{\theta}_1 + \bar{\theta}_2 + \bar{\theta}_3$ .

2. Расчет показателей работы сети, содержащей узлы с параллельным выполнением процессов.

Рассмотрим простейшую сеть, состоящую из терминального узла (М терминалов) и трех узлов (СМО), в которых образуются очереди поступающих запросов и созданных по ним процессов (Рис.4). В рассматриваемом примере сохранены лишь те объекты и процессы реальной системы, которые позволяют отразить особенности предлагаемого аналитического подхода к оценкам производительности таких систем, содержащих узлы с параллельным обслуживанием. При необходимости без существенных изменений данный подход может быть рас-

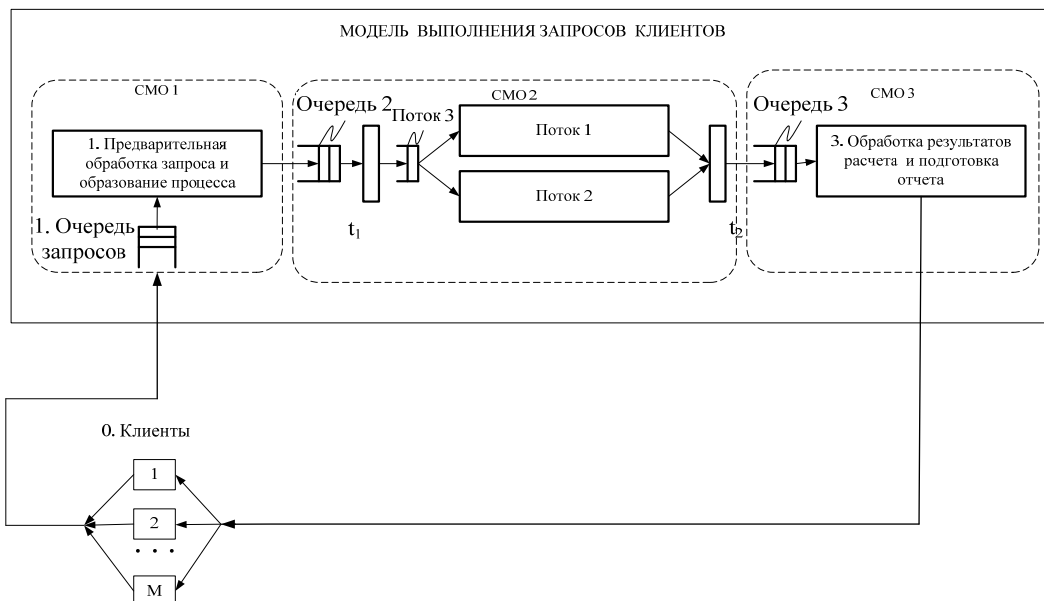


Рис.4. Упрощенная замкнутая сетевая модель системы

пространен на другие, более общие случаи, содержащие подобные механизмы выполнения процессов. В модели выделено четыре узла: клиентский узел (0); предварительная обработка поступивших запросов и образование процессов (1); выполнение потоков работ одного из процессов (2); обработка результатов расчета, подготовка и отправка отчетов клиенту (3). В модель сети включены два перехода ( $t_i, i = \overline{1,2}$ ), управляющих поступлением процессов на двухядерный процессор. Переход  $t_1$  пропускает процесс из очереди 2 в блок 2 и после того как его выполнение будет завершено, процесс через  $t_2$  попадает в блок 3, а через  $t_1$  в блок 2 поступает новый процесс. При отсутствии готовых к выполнению процессов в очереди 2 переход  $t_1$  находится в открытом состоянии. Считаем, что очереди 1, 2 и 3 организуются в порядке поступления.

Так как сеть замкнута, то количество запросов (процессов) в ней не может превзойти числа одновременно работающих в системе клиентов (M). Принято, что времена выполнения являются случайными, статистически независимыми и не зависят от количества запросов в очередях. Для того, чтобы не создавать ситуаций, когда

выполняемый поток процесса ожидает завершения каких-то других событий, например, подкачки требуемой страницы из внешней памяти, считаем, что для его выполнения зарезервирован необходимый объем ресурсов, это часто характерно для систем реального времени. Время пребывания запроса в терминальном узле также является случайным и определяется длительностью обдумывания клиентом полученных результатов расчета и подготовкой нового запроса. Процессор узла 2 содержит два ядра, а каждый процесс делится на три потока. Для расчета методом MVA времени ответа ВС и нагрузки на отдельные узлы требуется оценить среднее время выполнения процесса в узле 2. Считаем, что для остальных узлов средние времена выполнения процессов имеют экспоненциальное распределение со значениями параметров, приведенными в Табл. 1.

Расчеты показателей СеМО и имитация в среде AnyLogic выполнены для различного числа одновременно работающих клиентов. В Табл. 2 приведены результаты расчета производительности и среднего времени ответа замкнутой СеМО методом MVA, а также средние времена ответа, полученные на имитационной модели.

Табл. 1. Исходные данные для выполнения расчетов и имитационного моделирования

Параметр	Значение	Комментарий
Количество узлов СеМО	4	Рассматривается случай сети с четырьмя узлами
$S_0$	18 с	Среднее время обдумывания результатов расчета
$S_1$	0,5 с	Среднее время обработки поступившего запроса
$S_2$	Среднее время выполнения процесса в узле 2: расчетное $S_2 = 3,01$ с; имитация $S_2 = 3,01$ с	Параметры модели: Поток 1 – $S_{21} = 2$ с; поток 2 – $S_{22} = 1$ с; поток 3 – $S_{23} = 1,43$ с
$S_3$	2,5 с	Среднее время обработки результатов и подготовка отчета

Табл. 2. Результаты аналитических расчетов и имитации СеМО, содержащих СМО с параллельным выполнением потоков

Клиенты (M)	Производительность (Xi)	Нагрузка ( $\rho_i$ )			Среднее время ответа ( $\bar{\tau}$ )		Отклонение	
		СМО1	СМО 2*	СМО3	Расчет	Имитация	Абсолютная (с)	Относит. (%)
1	0,04	0,02	0,13	0,10	6,01	6,01	0	0%
3	0,12	0,06	0,36	0,30	7,42	7,13	0,29	4,0%
5	0,18	0,9	0,55	0,46	9,35	8,67	0,68	7,8%
7	0,23	0,12	0,70	0,58	11,94	10,88	1,06	9,8%
9	0,27	0,14	0,81	0,68	15,3	14,00	1,3	9,3%
11	0,29	0,15	0,89	0,74	19,4	18,04	1,36	7,6%
20	0,33	0,16	0,98	0,82	43,17	42,64	0,53	1,2%
100	0,33	0,16	1,00	0,83	283,03	283,15	-0,12	0%

\*) Нагрузка на СМО2 определяется для узла в целом как произведение интенсивности входного потока на среднее время пребывания процесса в узле



Выполненные расчеты и имитация рассматриваемого примера замкнутой СеМО позволяют сделать следующие выводы:

1) Для замкнутой СеМО, содержащей узлы с параллельным выполнением потоков при количестве ядер процессора, меньшим числа потоков для каждого процесса, аналитический расчет методом MVA на основе порядковых статистик обеспечивают хорошую точность.

2) Увеличение количества одновременно работающих клиентов в сети ведет к перегрузке («узкое место») одного из узлов, в данном случае второго узла. Для заданных параметров СеМО, начиная с 10 клиентов, дальнейшее увеличение числа клиентов практически не ведет к росту производительности системы, так как она определяется производительность 2-го узла. При этом следует отметить, что хотя данный узел ведет параллельную обработку потоков, точность расчетов с ростом числа клиентов повышается.

## Заключение

Ускорение времен выполнения процессов путем применения методов распараллеливания на этапах программирования, компиляции и выполнения создает ощутимый эффект в повышении производительности. Использование порядковых статистик для различных исходных распределений времени выполнения потоков при ограниченном количестве ядер процессора позволяет существенно расширить возможности детального анализа протекающего в нем вычислительного процесса, включая определение распределений времени пребывания в узле, что важно при оценках вероятностно-временных характеристик времени ответа систем реального времени.

## Литература

- Олифер В. Г., Олифер Н. А. Компьютерные сети. Принципы, технологии, протоколы. – СПб.: Питер, 2010.
- Лав Р. Linux. Системное программирование. – СПб.: Питер, 2008.
- Gunter B., Greiner S. Queueing networks and Markov chains : modeling and performance evaluation with computer science. - Hoboken, New Jersey., John Wiley & Sons, Inc. 2006.
- Gunther N. J. Analyzing Performance Computer System with Perl::PDQ. Springer, New York, 2011.
- Башарин Г.П., Бочаров П.П., Коган Я.А. Анализ очередей в вычислительных сетях. – М.: «Наука», 1989.
- Клейнрок Л. Вычислительные системы с очередями. – М.: Мир, 1979.
- Вишневский В.М. Теоретические основы проектирования компьютерных сетей. – М.: «Техносфера», 2003.
- Grinshpan, L. A. Solving enterprise applications performance puzzles : queuing models to the rescue. - Hoboken, New Jersey., John Wiley & Sons, Inc. 2012.
- Hass P.J. Stochastic Petri nets : modelling, stability, simulation. - New York., Springer-Verlag, 2002.
- Petri Nets – Manufacturing and Computer Science. Edited by Pawel Pawlewski. Printed in Croatia, 2012.
- Кельтон В., Лоу А. Имитационное моделирование. Классика CS. – СПб.: Питер, 2004.
- Guizani M., Rayes A., Khan B., Al-Fuqaha A. Network Modeling and Simulation: A Practical Perspective. - GB, John Wiley & Sons, Inc. 2010.
- Reiser M., Lavenberg S. Mean-Value Analysis of Closed Multichain Queuing Networks. – J. ACM, vol. 27, № 2. 1980. P. 313-322
- Bryant R. M., Krzesinski A. E., Lakshmi M.S., Chandy K.M. The MVA Priority Approximation. – J. ACM Transactions on Computer Systems, Vol.2, №4, 1984, P.313-322.
- Akyildiz I.F.. Mean Value Analysis for blocking queueing networks. IEEE Transactions on Software Engineering, Vol. 14, № 4, 1988.P.418–428
- Gennaro C., King P. Parallellising the Mean Value Analysis Algorithm. The Society for Computer Simulation International, Vol. 16, № 1, 1999. P16-22.
- Барский А.Б. Параллельные информационные технологии. – М.: Бинном, 2007.
- Grana A., Gupta A., Karypis G., Kumar V. Introduction to Parallel Computing. 2003, [http://www.360doc.com/content/10/0720/00/4910\\_40196927.shtml](http://www.360doc.com/content/10/0720/00/4910_40196927.shtml).
- Peterson W.P., Arbenz P. Introduction to Parallel Computing. - Oxford University Press, 2004.
- Иванов Н.Н., Игнатушенко В.В., Михайлов А.Ю. Статистическое прогнозирование времени выполнения комплексных взаимосвязанных работ в многопроцессорных вычислительных системах. – Автоматика и телемеханика, №6, 2005. С.89 – 102.
- Игнатушенко В.В., Исаева Н.А. Резервирование взаимосвязанных программных моделей для управляющих параллельных вычислительных систем: организация, оценка отказоустойчивости, формальное писание. – Автоматика и телемеханика, №10, 2008. С.142 – 161.
- Kelly T., Shen K., Zhang A., Stewart C. Operational Analysis of Parallel Servers. 16th IEEE International Symposium on Modeling, Analysis, and Simulation of Computer and Telecommunication Systems (MASCOTS'0B), 2008.
- Balakrishnan N . Permanents, Order Statistics, Outliers, and Robustness. - Rev. Mat. Complut., vol. 20, №1, 2007. P.7 – 107.

24. Balakrishnan N. and Rao C. R. Order Statistics: An Introduction. - Handbook of Statistics 16, Elsevier Science Pub Co, Vol. 16. 1998. P. 3 - 24
25. Литвин Ю.В. Интеграция сетевых моделей проектов и оценка их рисков. - Проблемы экономики и менеджмента, № 8, 2013. С. 46 – 58.
26. Ryser H.J. Combinatorial mathematics – New Jersey: Quinn & Boden Company, Inc. 1963. P. 154.

**Литвин Василий Григорьевич.** Главный научный сотрудник НИИ автоматической аппаратуры им. акад. Семенихина. Окончил Таганрогский радиотехнический институт в 1967 году. Доктор технических наук, профессор. Автор 115 научных публикаций. Область научных интересов: методы и модели вычислительного процесса, системный анализ и исследование операций, управление проектами и бизнес-процессами. E-mail: litvg@mail.ru

**Чернышова Елена Викторовна.** Начальник НТЦ НИИ автоматической аппаратуры им. акад. Семенихина. Окончила Московский энергетический институт (технический университет). Институт проблем энергетической эффективности в 2005 году и Executive MBA ИБДА РАНХ и ГС при Президенте РФ – в 2013 году. Кандидат технических наук. Область научных интересов: методы и модели вычислительного процесса, системный анализ и исследование операций, управление проектами и бизнес-процессами. E-mail: dibs@list.ru

**Литвин Юрий Васильевич.** Заместитель заведующего отделом ООО «НИИгазэкономика». Кандидат экономических наук. Окончил МИФИ в 2007 году. Автор более 20 научных публикаций. Область научных интересов: методы и модели управления рисками, управление инвестиционными проектами, применение математических методов в сложных системах, финансовый менеджмент. E-mail: litvinj@simplecs.ru