

# Метод проективно инвариантного описания овалов с осевой либо центральной симметрией

П.П. Николаев

**Аннотация.** Рассмотрен метод проективно инвариантного описания овалов (плоских выпуклых фигур непрерывной кривизны), имеющих неявно выраженную осевую либо центральную симметрию (декартовы признаки которой утрачены в результате проективного преобразования фигуры). В обсуждаемой численной модели метода, на основе проективно инвариантных структур (так называемых Н-поляр и Т-поляр), предложенных автором ранее, использованы новые объекты анализа фигур – дуальные поляры, с помощью которых удастся локализовать образы оси и/или центра овала единой вычислительной процедурой. Для разработанных процедур детекции элементов симметрии фигур показана их концептуальная связь с плюккеровой полюс-полярной дуальностью коник. Предлагаемый алгоритм поиска неявных элементов симметрии позволяет строить проективно инвариантное описание плоских фигур, не обладающих никакими иными геометрическими особенностями, кроме свойств скрытой симметрии (любого из двух родов).

**Ключевые слова:** овал, проективное преобразование, вурф, касательная, полюс и поляра, гармоническое соответствие.

## Введение

Данная статья продолжает исследование задачи, отраженное в цикле авторских работ по распознаванию формы объекта по его плоской центральной проекции инвариантно к группе мелко линейных (проективных) преобразований картинной плоскости в  $3D$  пространстве [1-6]. Объектами исследования в них были плоские гладкие фигуры с минимумом особенностей, а локализация «особенности» (дифференциальных свойств их контура либо элементов неявной симметрии) обеспечивала возможность ее использования в качестве «опорной структуры» для создания проективно инвариантной их репрезентации (в виде проекции на 4-точечный эталон либо отображения на плоскость вурфов), что, в свою очередь, делало разрешимой целевую задачу распознавания. В рамках этой

работы нас будет интересовать этап вычисления позиции образа центра (ОЦ) либо образа оси (ОО) симметрии овала, адекватная локализация каковых и приводит на этапе финальном к инвариантному представлению фигуры, т.е. к возможности классифицировать разнообразие фигуры, относя их к проективно эквивалентным семействам, либо к формированию «эталонного образа» данного овала для последующих нужд в задачах распознавания. В отличие от ранее описанных методов детекции ОО [3, 4] и ОЦ [5, 6], вполне независимых процедурно, здесь будут рассмотрены (лишь наиболее важные) алгоритмические аспекты численного метода обнаружения элемента симметрии – вне априорного знания, каким именно типом неявной симметрии (центральной, осевой либо их комбинацией) обладает овал. Требования необходимости для читателя предварительного

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-12107).

его знакомства с современной предысторией вопроса и со свойствами полюс-полярного (дуального) соответствия у коник [7, 8], как следствия пюккерова *принципа двойственности*, делают целесообразным включение в текст статьи краткого экскурса в задачу, с вводимой попутно терминологией (необходимой для понимания дальнейших деклараций читателем, не знакомым с аппаратом проективной геометрии и конкретными авторскими предложениями по обсуждаемой теме) и изложением полученных ранее результатов численного моделирования с использованием инвариантных структур, введенных в работе [2]. Внятность концептуальной установки («дуальитет отношений ОО и ОЦ») и «прозрачность идеи» промоделированного нового метода призваны обеспечить язык *синтетической* (в противовес – аналитической) геометрии и весь используемый далее иллюстративный материал. Итак, общая постановка задачи распадается естественным образом на два этапа: поиск и локализация *опорных элементов* (ОЭ – точек и прямых, выражающих проективные свойства симметрии фигуры) опознаваемого контура; проективно инвариантное его представление, полученное на этой основе. В рамках этого сообщения (в статусе *предварительного*) рассмотрен только первый этап процедуры распознавания. Кроме того, по причине заметно возрастающего объема комментариев, требуемых для поддержания уровня ясности у читателя, не знакомого с математическим существом излагаемого, текст не касается применений метода при обработке кривых, обладающих одновременно ОЦ и набором ОО (что, например, характерно для семейства *суперэллипсов*). Поскольку класс фигур нами намеренно ограничен *овалями*, т.е. «всюду гладкими чисто выпуклыми кривыми», то *явные* ОЭ (точки перегиба, излома, возврата и прочие, детекция которых производится посредством манипуляций с касательными) не могут оказаться полезными для формирования проективно инвариантного базиса контура (у овальной кривой их нет), в силу чего постановка задачи для первого этапа формулируется через поиск *неявных* ОЭ. Эта роль отведена *прямой* ОО и *точке* ОЦ, обнаружение которых не может опираться на всем известные *декартовы* свойства осевой и

центральной симметрии, требуя существенного усложнения применимых свойств – на уровне характеристик, обладающих инвариантностью к группе дробно линейных преобразований, что следует из требований задачи: фигуру необходимо охарактеризовать безотносительно к смене ракурса ее оптической регистрации. Это новая тема, близких аналогов которой автору пока не удалось разыскать в современной литературе и в классических трудах, где рассматривались аналитические свойства овалов с точки зрения проективной геометрии [10-12]. В последнее время в связи с актуальностью темы проективно инвариантного распознавания гладких фигур заметно вырос поток фундаментальных работ аналитического и прикладного характера [13-17]. Ряд формальных аспектов этой обширной темы (быстродействие и устойчивость алгоритмов обработки центрально симметричных овалов) рассмотрены нами в отдельной публикации [9].

## 1. О полюс-полярных отношениях квадратичных кривых

В пособиях по аналитической геометрии подробно рассматриваются свойства кривых второго порядка – *коник* [8]. Индекс порядка соответствует максимальной степени многочлена, задающего кривую в самой общей форме (ее именуют *квадратичной*). Она описывает для декартовой плоскости различные эллипсы, параболы и гиперболы, каковые в *проективной* модели уже не различаются между собой (они – проективно *эквивалентны*). Подобное свойство для нашей задачи распознавания можно охарактеризовать как свойство *вырожденности* коник. Иными словами, не существует метода анализа, позволяющего установить, в результате какого проективного преобразования один эллипс перепроецирован в другой и какие особенности формы (эксцентриситет, положение центра и осей симметрии) тот и другой «имеют реально», а, значит, проблема «физической корреспонденции точек» для такой пары объектов неразрешима в принципе. Сей мрачной аттестации («коник, являясь сугубо частной разновидностью овалов, исключаются из числа возможных объектов распознавания при сменах

ракурса наблюдения») удается противопоставить мажорный контрапункт, давший основания авторской концепции. А именно: в однородных проективных координатах может быть выражена суть так называемой *теоремы взаимности* (иначе «свойства дуальности поляр и полюсов») для коник, объявляющей симметричность обмена прямой и точки («поляры» и «полюса») у коник, а применительно к нашей задаче – наталкивающей на гипотезу о сходных ролях для пары уникальных ОЭ – ОЦ и ОО) и являющейся проективным обобщением *принципа двойственности* Пюккера (XIX век, 30-е годы, заря становления аналитической проективной геометрии). *Полюсом* для эллипса, фиксированного на плоскости, может быть объявлена любая точка на ней (как вне, так и внутри фигуры), однозначно позиционно связанная с прямой, называемой *полярной*, на языке объектов синтетической (выразимой графическим построением) геометрии определяемой посредством пар касательных из точки (точек) вне эллипса. В случае полюса внешнего расположения его полярю задают по точкам касания пары

лучей из полюса к контуру фигуры. Это определение не использует понятий «угол» и «расстояние» (вкуче со списком аффинно устойчивых признаков как то: «параллельность», «центр масс» либо «простое отношение длин»), являясь *проективно инвариантным*. Равным образом это относится и к ситуации, когда полюс и полярю меняются местами (т.е. полярю *внешнего* расположения детерминирует позицию *внутреннего* полюса). Для *полигональных* объектов также существует свой тип ограничений при использовании их в численном распознавании: «все треугольники и четырехугольники проективно эквивалентны», что, тем не менее, не мешает привлечению правильного 4-вершинника в качестве реперной конфигурации при формировании эталонной проекции овала [1]. Для уяснения ряда важных положений *теоремы взаимности* Рис. 1 дает пример симметричных отношений, связывающих полюса  $P1$  и  $P2$  с дуальными им полярями  $A1-B1$ ,  $A2-B2$  (прямыми, проходящими через  $A$  и  $B$ ).

Одна из возможных формулировок теоремы такая. «Для любого эллипса при произвольной

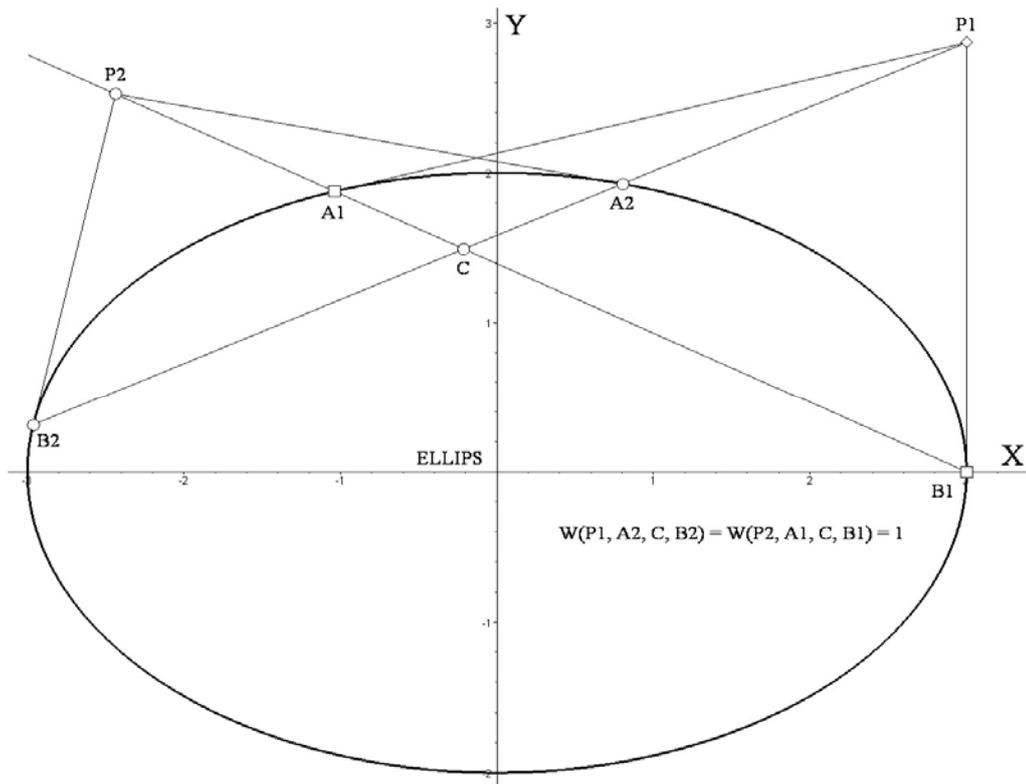


Рис. 1. Конфигурация полюсов  $P1$ ,  $P2$  и их полярю  $A1-B1$ ,  $A2-B2$  согласно теореме взаимности

позиции  $P_1$  с произвольным положением второго полюса  $P_2$  на его поляре через тт.  $A_1$  и  $B_1$  вторая поляра проходит через тт.  $P_1$ ,  $A_2$  и  $B_2$ . Однако это только «тангенциальный» фрагмент теоремы (его констатацией чаще всего и ограничиваются). Не менее важна «гармоническая» часть формулировки: «при этом т.  $C$  пересечения поляр образует гармонические пары, где паре тт.  $A_1$ ,  $B_1$  соответствует пара  $C$ ,  $P_2$ , а паре  $A_2$ ,  $B_2$  – пара  $C$ ,  $P_1$ ». Гармонической четверкой тт. называют такую композицию их коллинеарного расположения, для которой вурф (основной проективный инвариант, иначе называемый «двойным отношением») принимает значение  $-1$ . Стандартная нотация этого условия для квартета тт.  $P$ - $A$ - $C$ - $B$  имеет вид:  $w(P, A, C, B) = -1$  (на полях Рис. 1 оно записано без учета знака – через длины трех отрезков, образуемых кварталом, тогда как в «строго симметричной» форме отрезки полагают *ориентированными*). В развитой (фактически – завершенной) теории квадратичных кривых факт гармонических отношений (на их важность обращал внимание Плюккер, разработавший систему тангенциальных координат) особо не акцентируется, поскольку он «повсеместен – без важных следствий». Возвращаясь от вырожденного (для задач проективного распознавания) подсемейства коник к стоящей перед нами задаче анализа проективных свойств овалов с симметриями, попробуем воспроизвести цепь гипотез, приведших к авторской концепции «дуальность ОЭ овалов центральной и осевой симметрии» и обеспечившей решение задачи их описания посредством *дуальных* поляр. В этой цепи важнейшим звеном были процедурные предложения об использовании вспомогательных проективно инвариантных структур анализа овала, названных нами  $T$ -полямирами и  $H$ -полямирами и ставшими «структурной предтечей  $D$ - и  $d$ -поляр», о чем и пойдет речь в следующем разделе.

## 2. О полюс-полярных отношениях овалов осевой и центральной симметрии

В работе [2] для дуальной пары структурных категорий – «из мира коник» – предложено обобщение, не теряющее проективно инвари-

антных свойств (у модифицированной пары) при переходе к классам симметричных овалов двух типов, причем основной особенностью «нового аппарата» стало функциональное разделение качеств объекта «поляра» в виде носителей только *гармонических* ( $H$ ) либо исключительно *тангенциальных* ( $T$ ) качеств. Существенным отличием нововведения является и изменение роли дуалитета при его перенесении на класс фигур с иной детерминацией форм, предписанных теорией: для коник пары «полюс и поляра» равноправно континуальны (и не информативны для описания формы той или иной кривой), тогда как у «неявно-симметричных» овалов они представляют собой пару *уникальную*, принадлежа ОЭ их структуры. Уточним предложенную дифференциацию элементов каждой пары с точки зрения инвариантных геометрических свойств. ОО – прямая, т.е. объект «на ролях поляры», а ОЦ – точка или в новом истолковании – «полюс», стало быть поляре ОО должен быть позиционно сопоставлен некий дуальный ей «полюс», а полюсу ОЦ желательнее «отыскать его поляру». В работах [3, 5, 6] сформулированы списки проективно инвариантных свойств овалов неявной симметрии двух типов, где *центр* с его декартовыми свойствами у фигуры в *ортоформе* был обобщен до категории *образ центра* ОЦ с законами описания, справедливыми при операциях перепроецирования, а декартова *ось* симметрии ортоформ второго типа была инвариантно перепреопределена до категории *образ оси* ОО. Данные новые определения включили и ОЭ, дополняящие ОЦ и ОО до получения дуальных пар. Ими стали: *внешний полюс симметрии PS* у овалов с *осевой* симметрией (его позиция – в точке пересечения касательных, полученных для точек пересечения контура овала прямой ОО) и внешнего расположения *линия горизонта HL* у *центрально* симметричных фигур (являющаяся для любой из ортоформ овала *несобственной прямой* проективной плоскости, каковая в результате проективного преобразования фигуры становится *прямой собственной*, т.е. радикально меняет позицию, проецируясь из бесконечно удаленных областей плоскости овала  $o$  в сомасштабные ему окрестности  $o$ ). Итак, наличествует зеркальная симметрия по-

ложений дуальных ОЭ в сравниваемой паре типов симметрии фигур: внутренней полярю ОО дуален внешний полюс  $PS$ , а внутреннему полюсу ОЦ дуальна внешняя полярю  $HL$ . Поскольку объекты  $PS$  и  $HL$  задаются для ОО и ОЦ исключительно через позиции касательных и «согласно законам для коник» (линию горизонта  $HL$  относительно полюса ОЦ детерминирует то же правило, что и внешнюю полярю  $p$  для внутреннего полюса у коник: две вспомогательные полярю для любой пары точек на искомой  $p$  пересекается в точке полюса), то на этом уровне терминологической структуризации привычные трактовки еще не нарушены.

Нетрадиционное истолкование термина *полярю* дает о себе знать с введением особого типа точки – *тестового полюса*  $P$  – на плоскости овала, позиция которой во *внутреннем* поле фигуры задает – *вовне* ее – полярю новых типов ( $T$  и  $H$ ). Общим процедурным узлом для формирования обеих является учет (тангенциальных и гармонических) свойств хорды  $AB$  при ее вращении вокруг полюса  $P$  (концевые точки  $A$ ,  $B$  хорды принадлежат контуру овала). Любой полуоборот хорды (т.е. стартующий из произвольной позиции  $A_0$  до финального положения в  $B_0$ ; в дискретном представлении – по вершинам  $i$  ломаной, аппроксимирующей контур овала) создает возможность вычисления полярю обоих типов. *Криволинейная T-полярю* представляет собой гладкую цепь точек  $T_i$  пересечения текущей  $i$ -ой пары касательных в  $A_i$  и  $B_i$ . *H-полярю* (также криволинейная) определена как геометрическое место точек внешнего гармонического расширения для текущих коллинеарных триад  $A_i-P-B_i$  (иными словами, каждая текущая точка  $H_i$  полярю в паре с тестовым полюсом  $P$  гармонически сопряжена паре  $A_i$  и  $B_i$ ). Единственное исключение из закона *криволинейности* для новых полярю (согласно развитой теории) имеет место для ситуации, когда полюс  $P$  оказывается в позиции ОЦ. В этом (важном для решения задачи поиска ОЦ) случае обе полярю *совмещены* с прямой  $HL$ . Таким образом, уникальный полюс ОЦ, оценка координат которого достаточна для решения задачи распознавания [5, 6], можно позиционно локализовать целенаправленным перебором *тестовых* полюсов (например, в виде коллинеарного их

ряда произвольной ориентации либо стартового полюса  $P_0$ , из некоей случайной позиции итеративно сближаемого с координатами детектируемого ОЦ) в той или иной схеме поиска ОЦ, использующей какое-либо из проективно инвариантных его свойств. По «зеркально симметричной» аналогии с целевой ситуацией совмещения с ОЦ тестового полюса  $P$  можно привести (теперь уже для осесимметричного овала) замечательное свойство обоих типов криволинейных полярю [3] – в обязательном порядке проходить через полюс симметрии  $PS$  – в случае принадлежности тестовой точки  $P$  внутреннему отрезку прямой ОО (и это безотносительно к тому, на каком участке хорды ОО произошло совмещение с ней полюса  $P$ ).

### 3. Идея полярю с двумя ветвями или «погоня за двумя зайцами»

Среди методов, разработанных для задачи детекции ОЭ (как «полюса» ОЦ и его «полярю»  $HL$ , так и «полярю» ОО и ее «полюса»  $PS$ ), преимуществы вычислительной «простоты» можно усмотреть в общем для них подходе к перебору тестовых полюсов  $P_i$  по ходу поиска некоей «ключевой» конфигурации (формируемой для каждой позиции  $P_i$ ) из «прямых и точек», для которой теория декларирует выполнение *необходимого* свойства искомого ОЭ. Рассмотрим на условном примере подобного подхода идею поиска позиции  $PS$  у имеющего ОО овала (Рис. 2).

Исходный уровень детализации предлагаемой процедуры таков. Анализ сцены (поля овала с его окрестностью, включающей полюс  $PS$  и «информативную» часть касательной  $t$  в точке  $P$ ) производится посредством сканирования лучом  $R_i$  из точки  $P$  на контуре овала (фиксированной в некоей случайным образом выбранной позиции), где луч пересекает дискретный ряд  $i$  текущих тестовых точек  $P_i$ . При этом на каждом шаге выполняются однотипные операции с касательными и проверки на условие гармонизма для коллинеарных квартетов точек на луче, где одна пара – это точки  $P$  и  $P_i$ , а координаты второй пары, гармонически сопряженной с первой, требуется вычислить, исходя из условий, обязательным образом выполняющихся для полюса  $PS$  (и для парной ему точки  $h_s$ ). При

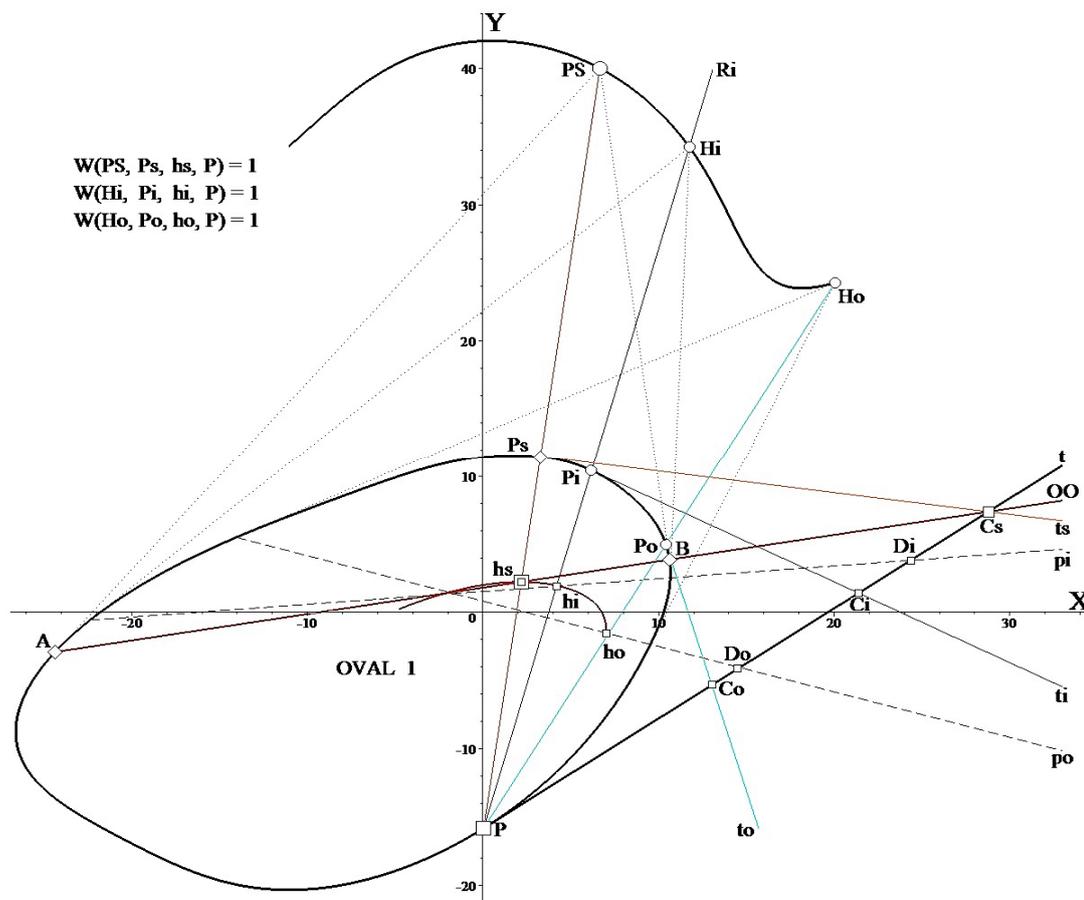


Рис. 2. К детекции ОО по позиции  $PS$  методом перебора полюсов  $P_i$  при фиксированном  $P$

условии, что по правилам для  $PS$  на каждом  $i$ -м луче удастся найти пару точек  $H_i$  и  $h_i$ , сопряженную с текущей парой  $P$  и  $P_i$ , окажутся сформированными две ветви – внешняя и внутренняя, причем внешняя обязательно пройдет через полюс  $PS$ , а приданная ей в пару точка  $h_s$  будет расположена на прямой  $OO$ . Завершение процедуры альтернативно: либо цикл вычислений придется повторить для иных положений точки  $P$  на контуре (и тогда все новые внешние ветви локализуют точку  $PS$ , в ней *пересекаясь*, а внутренние – детерминируют положение  $OO$ ), либо при *единственной* реализации пары ветвей (для  $P$ ) от теории потребуются указать *уникальное* свойство полюса  $PS$  (необходимое и достаточное условие принадлежности некой точки на внешней ветви искомому полюсу). На данный момент доказана *необходимость* требуемого условия (его достаточность еще предстоит показать, в силу чего универсальный ха-

рактер процедуры поиска можно гарантировать пока для схемы «пересечениями ветвей в  $PS$ »), а само это условие отражают построения на Рис. 2, которые мы ниже прокомментируем.

Итак, пояснений требуют две группы условий: во-первых, каким закономерностям должны удовлетворять текущие точки обеих ветвей (сопряженную с  $P$ ,  $P_i$  пару необходимо однозначно фиксировать неким *дополнительным* условием, поскольку *единственно* закон *гармонизма* для искомой пары имеет следствием однопараметрическое множество таких гармонических пар) и, во-вторых, в чем состоит свойство, выделяющее полюс  $PS$  среди прочих точек внешней ветви. Ответ на первый вопрос возвращает нас к известным свойствам прямолинейных поляр *коник* с их совместным выполнением гармонического и тангенциального позиционных правил. Часть «гармоническая» на полях Рис. 2 представлена триадой вурф-

уравнений для начальной точки  $P_o$ , текущей  $P_i$  и «особой»  $P_s$ , лежащей на одном луче с  $PS$ . Свойство поляр, связанное у коник с поведением касательных, на рисунке демонстрируют прямые  $p_o, p_i$  и  $OO$ , положение которых задается правилом инцидентности (принадлежности) им пар точек касания к контуру овала, где каждая пара касательных формируется соответственно для «полюсов»  $H_o, H_i$  и  $PS$  (а именно они являются внешними точками гармонического расширения, составляя с его точками внутренними  $h_o, h_i$  и  $h_s$  триаду пар, сопряженных парам точек контура). Таким образом, любая внутренняя точка  $h_i$  входит в гармонический квартет на текущем луче  $R_i$ , являясь одновременно местом пересечения  $R_i$  с «простой полярю»  $p_i$ . О том, как размыкается рекурсия в вычислении гармонической пары  $H_i$  и  $h_i$ , сопряженной с парой  $P, P_i$ , будет сообщено в специальном разделе далее (это весьма важный блок разработанной процедуры, и его нецелесообразно включать во фрагмент, трактующий «идеи» и «концептуальные подходы»). Относительно проверки точек  $H_i$  на принадлежность к отыскиваемой  $PS$  (пока еще в статусе «необходимого признака») на том же Рис. 2 требуемую особенность конфигурации легко усмотреть в поведении текущей полярю  $p_i$  и касательной  $t_i$  в точках  $P_i$  контура овала по отношению к фиксированной в  $P$  касательной  $t$ : точка пересечения  $p_i$  и  $t_i$  не обязана принадлежать  $t$  (или же иначе: точка  $C_i$  пересечения  $t$  и  $t_i$  «регулярно не совпадает» с  $D_i$ , лежащей на пересечении  $t$  и  $p_i$ ), тогда как «уникальная полярю»  $OO$  и касательная  $t_s$  (в «особой» точке контура  $P_s$ , являющейся проективно симметричной по отношению к фиксированной  $P$ ) всегда пересекаются точно на касательной  $t$ . В альтернативных терминах (что можно рассматривать как тривиальное доказательство необходимого признака для искомого полюса  $PS$ , непосредственно следующее из проективных свойств аксиальной симметрии [3]) эта же самая особенность  $PS$  формулируется так: «полюс  $C_s$  прямолинейной полярю (из определения для коник) по симметричным точкам касания (на Рис. 2 это точки  $P$  и  $P_s$ , задающие «вторую полярю теоремы взаимности», в нашем случае – «уникальную») обязан принадлежать прямой  $OO$  (что очевидно – для орто-

формы овала с их осью, подчиняющейся декартовым правилам симметрии), а сама эта полярю с необходимостью включает полюс симметрии  $PS$  (являющийся для любой из ортоформ овала при произвольно выбранной паре симметричных точек контура – несобственной точкой проективной плоскости). «Уникальная» конфигурация для  $PS$  с «минимальной неполнотой» воспроизводит совокупность отношений, зеркально симметрично связывающих «полюса и полярю» теоремы взаимности у коник, – с единственным отличием: вурф  $W(A, h_s, B, C_s)$  в общем случае может и не быть гармоническим. При этом все тангенциальные соотношения и одно из гармонических ( $W(PS, P_s, h_s, P) = 1$ ), декларируемые для коник в «конфигурации теоремы взаимности» (Рис. 1), сходной со здесь рассматриваемой, всегда выполняются для овалов со скрытой аксиальной симметрией.

Навык, полученный при рассмотрении сцены с осесимметричной кривой, облегчит переход к целевому расширению семейства фигур (поиск ОЭ которых реализуем единым алгоритмом) множеством овалов с неявной центральной симметрией. Необходимые понятия и требуемые для обобщения вычислительные приемы описаны. Появился и «продукт вычислений» в виде ветвей (гармонически сопряженных с цепями текущих пар контура) внешнего и внутреннего расположения. Требуется при той же системе вычислительных установок показать, что замена полюса  $PS$  на «полярю»  $HL$  и центра ОЦ – на прямую  $OO$  для нового объекта анализа приведут к «зеркальной инверсии» особенностей у формируемых внешних и внутренних ветвей: в новых условиях теория гарантирует для внутренней ветви обязательное ее прохождение через центр ОЦ (его позицию и в этом случае обозначим  $PS$ , подразумевая полюс центральной симметрии), тогда как парная ей точка внешней ветви с необходимостью инцидентна прямой  $HL$  (Рис. 3), причем гармонически им сопряженная пара точек  $P, P_s$  контура овала обладает проективной симметрией (являясь теперь уже не осесимметричной, а радиально симметричной парой). Нет особой необходимости в текстуальном предъявлении доказательств свойств, перечисленных выше, поскольку все они демонстрируют свою справедливость при

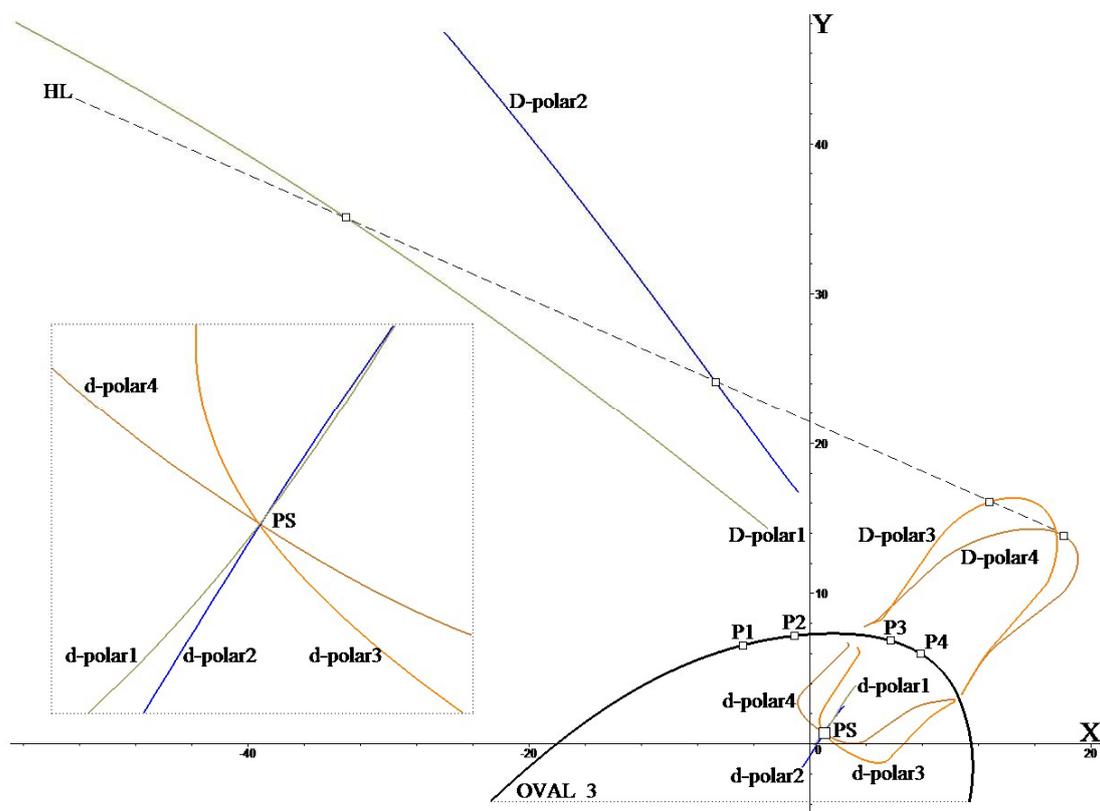


Рис. 3. Поиск центра  $PS$  и позиции  $HL$  по пересечению  $d$ -ветвей для случайного набора  $P1 \div P4$

рассмотрении *декартовых* особенностей симметричного расположения точек овальной кривой (обоих типов), присущих ее *ортоформе*, с последующим обобщением на *проективно инвариантный* случай [3, 6]. Далее станем именовать ветви «гармонического сопряжения текущим парам граничных точек овала» *дуальной полярой*, внешнюю ветвь которой назовем  $D$ -полярой, а внутреннюю –  $d$ -полярой (на Рис. 3 они фигурируют как  $D$ - $polar$  и  $d$ - $polar$ , с номерами задающего их набора фиксированных точек  $P1 \div P4$ ). Идея ограничиться вычислением только одной дуальной поляры – с детекцией на ее внутренней ветви «особой точки»  $PS$  – реализуема (с помощью проверки по «каскадному аналогу» теоремы взаимности [6]), но поиск ее должен вестись уже по другим правилам, что делает эту идею менее привлекательной в сравнении с методом «пересечений» (испытанным в компьютерных моделях детекции центров  $PS$ ), так как требует проводить две достаточно громоздкие проверки на каждом шаге  $i$  цикла вычислений.

Следует пояснить, что приведенный на Рис. 3 «типичный вид» ветвей дуальной поляры для фиксированных пар  $P1, P2$  и  $P3, P4$ , заметно отличающихся по форме (для *фрагментов* ветвей  $D$ - $polar1$  и  $D$ - $polar2$ , ограниченных «окном рисунка», она мало отличается от прямой, тогда как  $D$ - $polar3$ ,  $D$ - $polar4$ ,  $d$ - $polar3$  и  $d$ - $polar4$  отчетливо  $U$ -образны), не должен вводить в заблуждение относительно «вероятно резко отличных» дифференциально проективных свойств фигуры для этих пар. Причин обнаруживаемого (в численном эксперименте с аналитическим заданием ортоформы овала, модифицированной проективным преобразованием  $T$ ) несходства полученных кривых две: влияние конкретного преобразования  $T$  и недостаточная величина тех фрагментарных частей ветвей  $D$ - $polar1$  и  $D$ - $polar2$ , что вместило поле Рис. 3 (они не менее  $U$ -образны, но демонстрация их криволинейности путем значительного изменения масштаба сделала бы рисунок абсолютно неинформативным в части

свойств «объектов ближней зоны» овала). На врезке к Рис. 3 (слева внизу, в 10-кратном увеличении) изображены в окрестности  $PS$  фрагменты  $d$ -ветвей четырех поляр. Поведение поляр для  $P1$  и  $P2$  (помимо «адекватности» развитой теории и продуктивности схемы вычислений, реализованной на ее основе, вкуче с коллинеарностью позиций парных им точек  $D$ -ветвей, инцидентных  $HL$ ) показывает реальность случая их позиционной близости, для метода *пересечения ветвей* означающей недостаточность привлечения трех (задающих поляру) произвольных точек  $P$  контура. Их оптимум – квартет.

Прежде чем перейти к описанию итеративной схемы вычисления пары  $H_i, h_i$ , гармонически сопряженной паре  $P, P_i$ , напомним определение гармонического вурфа. Вурф  $w$  – это число, инвариантно к преобразованию  $T$  характеризующее коллинеарный квартет точек  $P1, P2, \dots, P4$  через их координаты в любой линейной координатной системе. Значение модуля  $w$  ( $W$ ) удовлетворяет компактному варианту формулы через длины трех отрезков  $a, b$  и  $c$ , на которые эта четверка разбивает прямую (нумеруем точки в порядке их расположения на прямой справа налево либо наоборот) Пусть  $a$  – это расстояние между  $P1$  и  $P2$ ,  $b$  – между  $P2$  и  $P3$ , а  $c$  – между  $P3$  и  $P4$ ), тогда  $W(P1, P2, P3, P4) = W(a, b, c) = a \cdot c / (b(a + b + c))$ . Четверка точек называется *гармонической*, если она проективно эквивалентна случаю, когда три смежные точки разделены равными интервалами, а четвертая бесконечно удалена (для элемента за пределами конечной области вводится особый термин: «четвертая точка – *несобственная*»), т.е.  $w(a, a, \infty) = -1$ .

#### 4. Об итеративном методе вычисления пары точек дуальной поляры на луче $R_i$

Поскольку для луча  $R_i$ , проходящего из  $P$  через  $P_i$ , обязательным условием инцидентности  $R_i$  точек  $h_i$  и  $H_i$ , как гармонической паре  $P, P_i$ , является еще и инцидентность  $h_i$  поляре  $p_i$  для  $H_i$  (в качестве дуального ее полюса, что фиксирует пару среди иных, «допустимых по свойству гармонически сопряженных»), а само это условие не содержит рецепта вычисления

координат искомой пары (ни для  $h_i$ , ни для  $H_i$ ), принадлежа к *проверочным*, то процедуру «перебора = подбора» пары требовалось оптимизировать (чтобы не проверять «все мыслимые позиции» на  $R_i$ ). Рассмотрим на конкретном модельном примере с тремя дуальными полярами, как для фиксированных тестовых полюсов  $P1 \div P3$  осуществлялся поиск ОО и ее полюса  $PS$  (Рис. 4). На специальном образом выбранной композиции  $P1 \div P3$  демонстрируются некоторые особенности поведения шести ветвей триады поляр.  $D$ -ветви не обязаны иметь  $U$ -образную форму, для них ( $D$ -*polar1*) возможен вариант асимптотического ухода в несобственную область – ровно так же, как это происходит со всякой  $T$ - и  $H$ -полярой [3]; вероятен случай «примерного» пересечения (Рис. 4 слева, вблизи контура) тройки ветвей, и «ошибочную адекватность подобной гипотезы о  $PS$ » не может достоверно изобличить *нарушение* свойства коллинеарности одноименных точек  $d$ -ветвей, однако ложность выбора подтверждается невыполнением свойства вурф-функции  $W(i)$  для точки ошибочной гипотезы:  $W(i)$  не будет всюду *гармонической*, что присуще  $PS$  [3]. Рис. 4 снабжен врезкой (точно так же, как и Рис. 3), на которой в 10-кратном увеличении показана окрестность полюса  $PS$  (всегда принадлежащего линии горизонта  $HL$ ), локализуемого на пересечении  $D$ -ветвей, при том, что одноименные точки  $d$ -ветвей принадлежат прямой ОО. Но вернемся к основному этапу вычисления *ветвей* поляры – к принципу поиска пар ее точек.

В попытках организовать для луча  $R_i$  некую регулярно компактную методику перебора пар кандидатов на роль гармонически сопряженных с  $P, P_i$  было обращено внимание на примеры использования метода *итерационного* уточнения производимой координатной оценки (ранее [2, 4, 6] неоднократно обеспечивавшего положительный эффект) при условии, что признаки сближения с «параметрами цели» известны и процесс уточнения ведет себя как «сходящийся» (т.е. обнаруживает гладкую монотонность в уменьшении «уточняющего шага»). Требуемое для пошагового уточнения координат  $H_i$  и  $h_i$  свойство симметричных кривых было обнаружено в ходе вычислительных экспериментов с

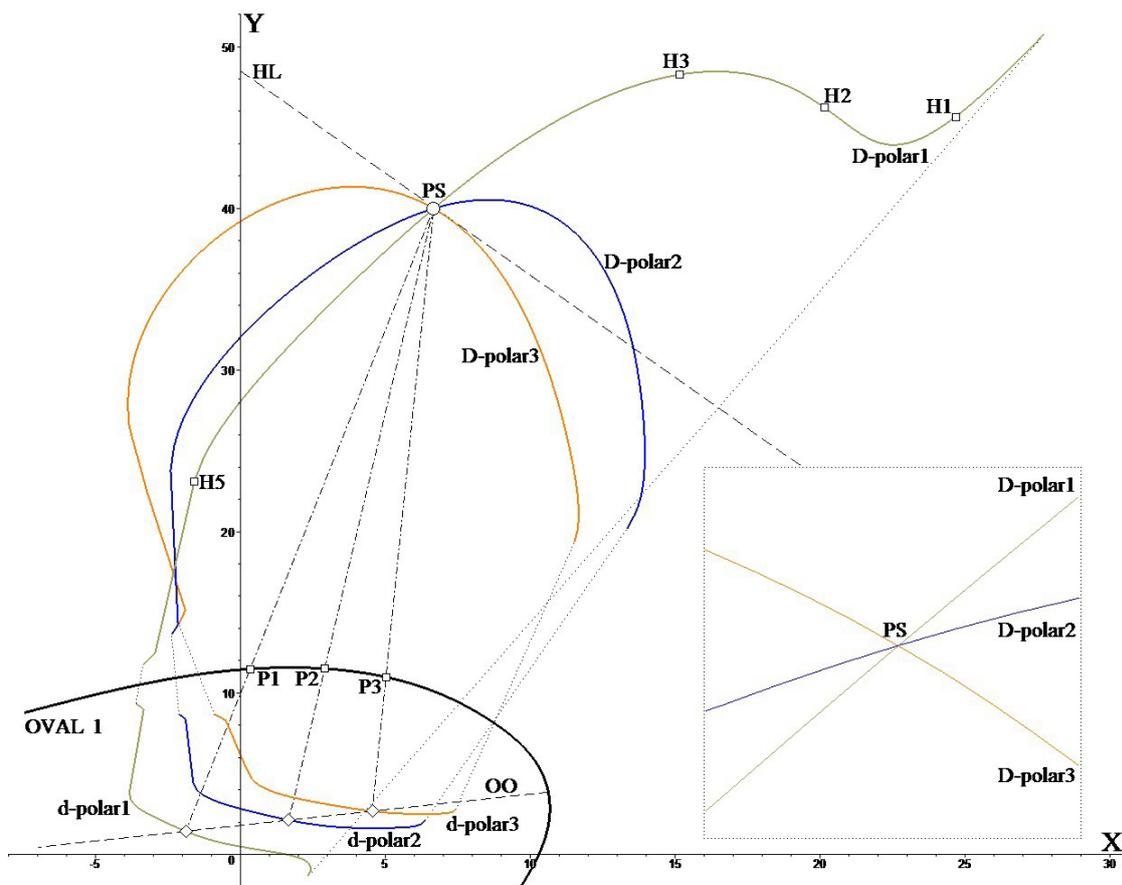


Рис. 4. Модельный пример детекции полюса PS по D-ветвям трех поляр осесимметричного овала

овалами заданной формы. Свойство это состоит в том, что для произвольного луча  $R_i$  (идушего из фиксированного полюса  $P$  через  $i$ -ую точку  $P_i$  на контуре) регулярным образом выполняется правило: для случайной стартовой позиции  $H_0$  на  $R_i$  «в качестве пробного полюса» может быть вычислена точка  $h_0$  пересечения его поляры  $p_0$  с  $R_i$ . Вычисление координат ее внешнего гармонического расширения по триаде  $P, h_0, P_i$  дает позицию  $H_1$ , не совпадающую с  $H_0$ , после чего процесс  $H_0 \rightarrow h_0 \rightarrow H_1 \rightarrow h_1 \rightarrow \dots \rightarrow H_j \rightarrow h_j$  может быть продолжен вплоть до достижения расстоянием между точками  $H_{m-1}$  и  $H_m$  некоторого малого значения, избранного «пороговым». В результате  $m$  повторов однотипных шагов такой цепи итераций на луче появляется коллинеарный гармонический квартет  $P, h_m, P_i, H_m$ , с заданной точностью аппроксимирующий искомые положения  $h_i$  и  $H_i$  текущей  $i$ -ой пары точек для ветвей формируемой дуальной поля-

ры, поскольку позиционная оценка, полученная в итоге, не только согласуется с требованием гармонического сопряжения пар  $h_m-H_m$ , и  $P-P_i$ , но и удовлетворяет тангенциальным свойствам «традиционной поляры»  $p_m$  относительно ее полюса  $H_m$ . На Рис. 5 справа показаны первые шаги итерационной процедуры для луча  $P1-PS$ , дающие представление о шаге сближения «уточняемой гипотезы о положении поляры» с истинной позицией  $OO$ . Из самых общих соображений понятно, что в зависимости от самой главной причины (а есть и второстепенные) – углового расстояния текущего луча  $R_i$  от азимутального направления «точно на  $PS$ » – скорость сходимости к финальной оценке координат может упасть (т.е. количество шагов  $m$  вырастет), что и показывает вид кривых  $fk$  – дельта  $dL$  уточнения  $H_i$  как функции  $n$  номера шага (Рис. 5, слева) для пяти позиций  $H1, H2, H3, PS, H5$  на ветви  $D-polar1$ , отмеченных на Рис. 4, где эта ветвь

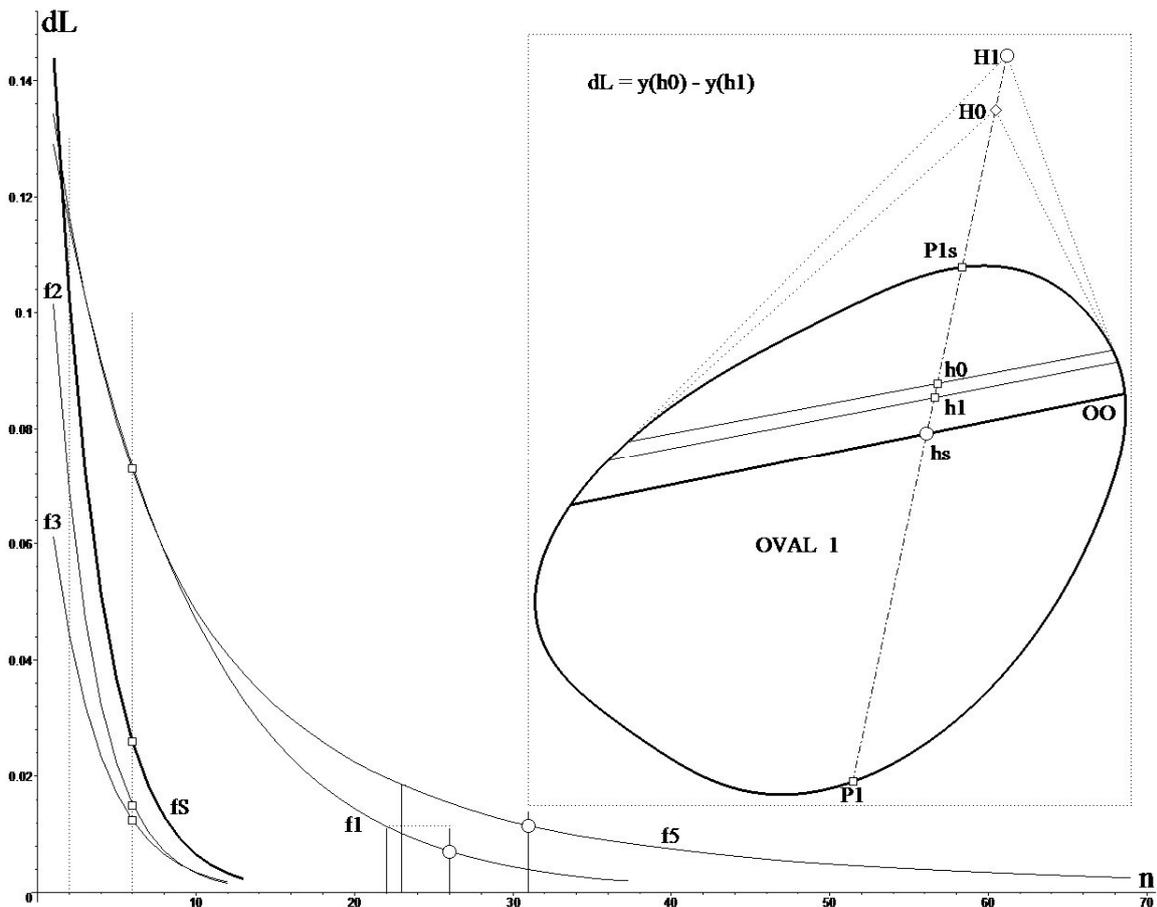


Рис. 5. Метод итеративного вычисления гармонической пары тт. для ветвей дуальной поляры

демонстрирует особенность асимптотического ухода от контура овала.

На Рис. 5 показано, что сходство формы кривых  $f_1, f_2, f_3, f_S$  и  $f_5$  (при их асимптотическом сближении с абсциссой графика) с гиперболой обманчиво: специально проведенные модельные расчеты показали, что по пяти ординатам  $f_k$  (через коэффициенты квадратичной формы для коник общего вида) не удастся вычислить финальную позицию  $hm$ , – для достижения этой цели (сокращающей длину итерационной цепи) необходим набор из 7-9 найденных ординат  $f_k$ .

Завершая описание вычислительных приемов формирования ветвей поляры, теперь уже на конкретном материале рассмотренной выше процедуры, охарактеризуем черты предлагаемого «дуального аппарата анализа» в отношении функциональной связи с двумя ранее вве-

денными инвариантными структурами –  $H$ - и  $T$ -полярами. В работе [3] обсуждена важная роль ансамбля точек  $E$  пересечения  $H$ - и  $T$ -поляра, среди которых «главная»  $E1$  согласно доказанному свойству – в случае принадлежности тестового полюса  $P$  (порождающего поляры) внутреннему отрезку прямой  $OO$  – должна в обязательном порядке оказаться в позиции искомого полюса  $PS$ . Можно перечислить ряд особенностей, проясняющих родство дуальной поляры с двумя «ее полярными предшественницами». При смене  $k$  позиций фиксированного полюса  $P_k$  на контуре, идущей по схеме «пересечений» (с изменением формы  $2k$  ветвей), для *внешней* ветви  $Dk$  прямым аналогом условия ее *прохождения* через полюс  $PS$  является факт неизменного *совпадения* координат  $E1$  и  $PS$  в результате смены позиций тестового полюса  $P$  (порождающего  $E1$ ) вдоль внутреннего отрезка

поляры  $OO$ . Сама же ветвь  $Dk$  дуальной поляры (при порождающих ее полюсах  $Pk$  и  $Pk_i$ ) – это точный эквивалент «траектории эллиптической точки  $E1$ », порождаемой смещениями тестового полюса  $P$  вдоль кривой, лишь единожды пересекающей отрезок  $OO$  (а порождающая кривая в этом случае тождественна цепочке из  $i$  точек  $hk_i$  внутренней ветви  $dk$  поляры). Если для дуальной схемы перейти к ее параллелям – с процедурной стороной разработанных методов поиска ОЦ радиально симметричных овалов [9], то теоретически гарантируемое свойство для набора ветвей  $dk$  – пересекаться в полюсе ОЦ – соответствует сути вычислительного приема в методе М1 [5]: там аналогично центром пучка  $k$  «цепочек решения вурфурованных уравнений» является ОЦ. Этими примерами функционального генезиса дуальных поляр и закончим данный раздел.

## Заключение

Далеко не все аспекты разработанного подхода к инвариантному представлению овалов с ОЭ проективной симметрии осевого и радиального типа обсуждены в предлагаемом сообщении. Ряд успешно проведенных серий машинных экспериментов (на репрезентативном материале тестирования процедуры при варьировании параметров моделируемых сцен) дал эмпирические «ответы» на многие из априорно фигурировавших (на уровне целевых установок) процедурных вопросов уже по ходу разработки алгоритма, из числа которых здесь рассмотрены лишь самые «идейно емкие» (не требующие обширной детализации в изложении «без купюр»). Необходимо продолжить теоретическую часть исследования – в отношении возможностей достичь целей в построении инвариантного описания фигур, не прибегая к повторным вычислениям дуальной поляры (оппозиция методу «пересечений»), тогда как основная роль модельных экспериментов видится в совершенствовании итеративного алгоритма получения гармонического оптимума (для позиций сопряженных пар точек на луче  $R_i$  – при формировании ветвей поляры), что в случае успеха позволит произвести асимптотическую оценку вычислительной сложности для оптимизированной версии алгоритма, а, значит,

и сравнить его эффективность среди аналогов процедуры детекции ОЭ, в которых эксплуатируется априорное знание типа симметрии овала. Оптимизацию алгоритма, вероятно, придется вести в двух направлениях: совершенствуя метод аппроксимационной оценки для «финальных» значений координат  $H_i$  и  $h_i$  (на луче  $R_i$ ) по 7-8-ми вершинам экстраполяции (что может дать до 10-кратного выигрыша по скорости на этом этапе) и реализовав прием использования базы «направляющих векторов касательных», формируемой на старте процедуры и привлекаемой во внутреннем ее цикле (шаги по  $j$ , если  $i$  – индекс цикла внешнего) для «ускоренного получения» итерированных координат точек касания «для  $p_i(j)$  – по полюсам  $H_i(j)$ » (упрощение процедуры может достичь  $n$ -кратного, где  $n$  – число квантованных вершин дискретно представляемого контура овала). Последнее особенно важно, поскольку акт вычисления касательной в заданной точке контура (представленного дискретно) не зависит от параметра  $n$ , тогда как операция формирования касательных к контуру извне (для определения позиций касания) требует перебора по  $n$ . Подведем краткие итоги доложенной работы.

Обрисованы: идея детекции ОЭ овалов со скрытой симметрией двух типов и схема ее процедурной реализации, проверенные в серии численных экспериментов на фигурах осевой и радиальной симметрии (в текст статьи не включены итоги успешного моделирования случаев одновременного наличия у фигуры обоих типов симметрии, что было сделано с привлечением семейств выпуклых суперэллипсов). Принцип двойственности Пюккера, «языком проективных координат (итог обмена переменных и констант) провозгласивший на плоскости – симметрию отношений точки и прямой» и давший для коник пример проективных связей полюса и поляры, в свое время не был распространен на более общее подсемейство овалов, у мира квадратичных кривых «наследующих» их свойства центральной и осевой симметрии уже не в выродившейся ее форме «позиционного произвола в полюс-полярном соответствии», а в качестве уникальных ОЭ инвариантного описания дифференциально проективных свойств распознаваемой фигуры. Попытка чего предпринята в

данном исследовании сначала при разработке приемов поиска ОЭ для овалов, обладающих скрытой осевой симметрией [3, 4], а затем – и радиальной [5, 6]. Но на уровне раздельного описания методов – приложимость принципа двойственности в качестве структурно функционального – была лишь авторской интенцией; и только с момента получения алгоритмического результата – при использовании аппарата дуальных поляр – она стала явной.

Касательно использования *криволинейных* поляр в давних геометрических исследованиях плоских кривых можно упомянуть фундаментальную работу Кремоны [12]; там они вводятся с помощью секущей, вращаемой в точке *полюса* с учетом гармонических правил пересечения с произвольной кривой *порядка*  $n$ , где поляра может оказаться криволинейной при условии  $n > 2$ . Однако многочисленные теоремные заявления относятся там исключительно к аналитическим кривым *целочисленного* *порядка*, свойства симметрии которых не рассматриваются. С другой стороны, в классических трудах Картана [10, 11] анализируются дифференциально проективные свойства *овала* (вводятся локальные инварианты кривой через производные высоких порядков), но подсемейство кривых с особенностями проективной симметрии не выделено на материале рассмотренных им случаев в особый раздел исследования – для целей выяснения базисной роли (в качестве возможных ОЭ) скрытых осей и центров овальной кривой. На основании попавшего в поле обозрения литературного материала по обсуждаемой теме автором данной работы может быть сделано заключение относительно *новизны* развитого им подхода к распознаванию овалов в рамках описания, инвариантного к преобразованию  $T$ , как для случаев, не предполагающих свойств проективно выраженной (неявной) симметрии [1, 2], так и при рассмотрении подобных особенностей геометрии плоских фигур с априорно разделяемыми типами симметрии [3-6], а в данной работе – применительно к предложенному алгоритмическому подходу их анализа, не требующего типизации симметрии, предваряющей обработку (что предполагало свои методы поиска ОЭ для осевого [3, 4] и радиального [5, 6] ее типов). Уро-

вень публикуемого материала еще не позволяет рекомендовать его (даже в чисто теоретическом плане) в качестве проекта для технических приложений. Этому этапу должна в обязательном порядке предшествовать фаза оптимизации всей вычислительной цепи (особенно во вложенном цикле, где по итерационной схеме формируются оценки пар координат для внешней и внутренней ветвей поляры). И уже по модифицированной версии алгоритма предстоит сделать важнейшую экспертную часть работы, – произвести (как это ранее реализовано [9] в отношении процедуры проективно инвариантной обработки овалов с неявной центральной симметрией) асимптотическую оценку его сложности.

Во введении к статье были оговорены «модельно-теоретическая» и «концептуальная» цели работы: сообщить о новом подходе к «единой процедуре анализа овалов с симметриями двух типов» и в образах синтетической геометрии продемонстрировать, как предложенный для этой задачи аппарат дуальных поляр – через зеркальную симметрию отношений его ОЭ (*полюсов* и *поляр*) реализует ряд фундаментальных положений *плюккерова принципа двойственности* – в предьявленной здесь попытке его приложения к классу контуров, не принадлежащих к кривым фиксированного аналитического порядка. В какой мере поставленных целей удалось достичь – судить читателю. Во всяком случае, намерения автора были именно таковыми.

## Литература

1. Николаев П.П. Проективно инвариантное распознавание составных овалов // Информационные технологии и вычислительные системы. 2010. № 4. С. 3-15.
2. Николаев П.П. Распознавание проективно преобразованных плоских фигур. II. Овал в композиции с дуальным элементом плоскости // Сенсорные системы. 2011. Т. 25. № 3. С. 245-266.
3. Николаев П.П. Распознавание проективно преобразованных плоских фигур. III. Обработка осесимметричных овалов методами анализа поляр // Сенсорные системы. 2011. Т. 25. № 4. С. 275-296.
4. Николаев П.П. Распознавание проективно преобразованных плоских фигур. IV. Методы формирования проективно инвариантного описания осесимметричных овалов // Сенсорные системы. 2012. Т. 26. № 4. С. 280-303.

5. Николаев П.П. Распознавание проективно преобразованных плоских фигур. V. Методы детекции образа центра у овалов с неявно выраженной центральной симметрией // Сенсорные системы. 2013. Т. 27. № 1. С. 10-34.
6. Николаев П.П. Распознавание проективно преобразованных плоских фигур. VI. Инвариантное представление и методы поиска образа центра овалов с неявно выраженной центральной симметрией // Сенсорные системы. 2014. Т. 28. № 1. С. 10-32.
7. Глаголев Н.А. Проективная геометрия. М.: Высшая школа. 1963. 344 с.
8. Моденов П.С. Аналитическая геометрия. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1969. 699 с.
9. Николаев П.П., Николаев Д.П. Проективно инвариантное распознавание плоских контуров на примере кривых с симметриями // Труды ИСА РАН. 2009. Т. 45. С. 209-221.
10. Cartan E. La Methode du Repere Mobile, la Theorie des Groupes Continus, et les Espaces Generalises, Exposes de Geometrie. No. 5. Hermann. Paris. 1935.
11. Cartan E. Lecons sur la Theorie des Espaces a Connexion Projective, Cahiers Scientifiques. Vol. 17. Gauthier-Villars. Paris. 1937.
12. Cremona L. Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane // Opere matematiche di Luigi Cremona. T. 1. Pubblicati sotto gli auspici della R. Accademia dei Lincei. Milano: U. Hoepli, 1914. P. 317-465.
13. Faugeras O. Cartan's moving frame method and its application to the geometry and evolution of curves in the euclidean, affine and projective planes. In: Applications of Invariance in Computer Vision, J.L. Mundy, A. Zisserman, D. Forsyth (eds.) / Springer-Verlag Lecture Notes in Computer Science. Vol. 825. 1994. pp. 11-46.
14. Fels M., Olver P.J. Moving coframes. I. A practical algorithm / Acta Appl. Math. 51: 1998. 161-213.
15. Olver P.J. Applications of Lie Groups to Differential Equations / Springer. New York. 1993.
16. Olver P.J. Equivalence, Invariants, and Symmetry / Cambridge University Press. Cambridge. 1995.
17. Olver P.J. Moving frames and singularities of prolonged group actions / Selecta Math. 6. 2000. 1-77.

**Николаев Петр Петрович.** Главный научный сотрудник Института проблем передачи информации им. А.А.Харкевича РАН. Окончил МГУ им. М.В. Ломоносова в 1966 году. Доктор физико-математических наук. Автор 83 печатных работ. Область научных интересов: искусственный интеллект, сенсорная физиология, психофизика зрительного восприятия, математическое моделирование процессов зрения. E-mail: nikol@iitp.ru