

# Метод пакетных итераций Монте-Карло для решения задач глобальной оптимизации<sup>1</sup>

Б.С. Дарховский, А.Ю. Попков, Ю.С. Попков

**Аннотация.** Предлагается новый метод решения задач глобальной оптимизации на компактных множествах, описываемых непрерывными функциями гельдеровского класса, которые заданы алгоритмически. Метод основан на пакетных итерациях Монте-Карло для построения последовательностей «квази-глобальных» минимумов и их декрементов. Последняя используется для оценивания констант Гельдера минимизируемой функции. Исследованы вероятностные свойства указанных последовательностей, и доказана сходимость метода и экспоненциальная скорость сходимости с вероятностью 1. Получены оценки расстояния при конечном числе итераций до точного значения глобального минимума и его вероятности. Работоспособность метода подтверждена на многочисленных тестовых задачах.

**Ключевые слова:** глобальная минимизация, каноническая форма задач глобальной оптимизации, преобразование к единичному неотрицательному кубу, константы Гельдера, модуль непрерывности, метод Монте-Карло, пакетные итерации, вероятностная сходимость, последовательность «квази-глобальных» минимумов, последовательность декрементов, МНК-оценки.

## Введение

Проблема поиска глобального экстремума на компактном множестве традиционно привлекает интерес исследователей. Он обусловлен, с одной стороны, ростом количества прикладных задач, где требуется отыскивать глобальный экстремум функций, определенных на пространствах достаточно высокой размерности, а с другой, отсутствием сходящихся численных методов для решения прикладных задач, в которых отсутствует априорная информация о свойствах целевой функции и морфологии компакта.

Теории глобальной оптимизации посвящено огромное количество работ, ориентированных на определенные классы задач. Не претендуя на полноту классификации, можно выделить три направления исследований.

Одно из них связано с конфигурацией целевой функции и допустимого множества. Наиболее продвинутом в этом классе является так называемая *DC*-минимизация, когда целевая функция и функции, описывающие допустимое множество, строятся в виде разностей двух выпуклых функций. Наиболее полное представление о достижениях этого направления можно составить по монографиям [1-3].

Другое направление изучает задачи глобальной оптимизации на простых допустимых множествах (например, параллелепипедах) и целевых функций с известной константой Липшица. Прекрасный обзор результатов в этом направлении представлен в монографиях [4, 5]. Среди работ этого направления следует выделить работы, посвященные редукции *n*-мерной задачи к одномерной с помощью кривых Пеано [6, 7].

<sup>1</sup> Работа поддержана программой фундаментальных исследований РАН «Математическое моделирование, анализ и синтез сложных систем», проект 103.

И наконец, третье, наиболее продуктивное направление базируется на случайном поиске (методе Монте-Карло) и его разнообразных интеллектуализированных эвристиках [8-10]. Одна из существенных проблем, возникающих при применении испытаний Монте-Карло — генерация равномерно распределенных случайных векторов в заданной области пространства поиска. По-видимому базовыми в этой проблеме являются метод «Hit-and-Run» и его многочисленные модификации [11, 12], методы, использующие марковские цепи [13, 14] и энтропию Кульбака—Ляйблера [15, 16].

В данной статье предлагается отличный от существующих подход к проблеме поиска глобального минимума, основанный на простых испытаниях Монте-Карло с последующей их селекцией, новизна и потенциальная эффективность которого состоит в следующем:

- ориентирован на общие задачи глобальной оптимизации с алгоритмически вычисляемыми функциями, удовлетворяющими условию Гельдера, но с неизвестными константами;
- используются пакетные итерации с простыми переборными испытаниями Монте-Карло для формирования последовательности «квази-глобальных» минимумов;
- в отличие от существующих методов случайного поиска (Монте-Карло) доказываемся сходимость пакетных итераций с экспоненциальной скоростью с вероятностью 1;
- сформулировано вероятностное правило остановки и получены вероятностные характеристики приближенного (при конечном числе итераций) решения.

## 1. Каноническая форма задачи глобальной оптимизации

Рассмотрим задачу глобальной минимизации (globmin):

$$\text{globmin } f(\mathbf{x})$$

при ограничениях:

$$\mathbf{x} \in \mathcal{G}_x = \{\mathbf{x}: \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}, \mathbf{x} \in R^d\}, \mathbf{g} \in R^r, r < d, \quad (1.1)$$

Целевая функция  $f(\mathbf{x})$  удовлетворяет условию Гельдера с константами  $H > 0$  и  $w > 0$ , т.е. ее модуль непрерывности имеет вид

$$\omega(t) = \max_{(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{y}}) \in R^d: \|\tilde{\mathbf{v}} - \tilde{\mathbf{y}}\| \leq t} |f(\tilde{\mathbf{v}}) - f(\tilde{\mathbf{y}})| \leq Ht^w. \quad (1.2)$$

Функции  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  в (1.1) предполагаются непрерывными.

Каноническую форму задачи (1.1) представим в виде:

$$\text{globmin } F(\mathbf{z}) \quad (1.3)$$

при ограничениях:

$$\mathbf{z} \in \mathcal{K}_z = \mathcal{G}_z \cap Z_+^d,$$

$$Z_+^d = \{\mathbf{z}: \mathbf{0} \leq \mathbf{z} \leq \mathbf{1}\} \subset R^d,$$

$$\mathcal{G}_z = \{\mathbf{z}: \mathbf{w}(\mathbf{z}) \leq \mathbf{0}, \mathbf{z} \in Z_+^d\}, \quad \mathbf{w} \in R^r, r < d. \quad (1.4)$$

Связь между исходной задачей и ее канонической формой определяется непрерывно-дифференцируемым и взаимно-однозначным преобразованием переменных:

$$\mathbf{z} = \mathcal{J}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = \mathcal{J}^{(-1)}(\mathbf{z}). \quad (1.5)$$

Этим условиям удовлетворяют довольно много преобразований. Например, следующее:

$$\mathbf{z} = \frac{1}{1 + \exp(-\mathbf{a} \otimes \mathbf{x})}, \quad \mathbf{x} = -\frac{1}{\mathbf{a}} \otimes \ln\left(\frac{1-\mathbf{z}}{\mathbf{z}}\right). \quad (1.6)$$

Здесь  $\exp(-\bullet \otimes \bullet)$ ,  $\ln(\bullet)$  —  $n$ -мерные вектора с компонентами  $\exp(-\circ_i \circ_i)$  и  $\ln(-\circ_i)$  соответственно.

Во многих прикладных задачах областью определения переменных  $\mathbf{x}$  является не все пространство  $R^d$ , а его подмножество —  $d$ -мерный параллелепипед  $\Pi_x$ . Тогда задача (1.1) формулируется следующим образом:

$$\text{globmin } f(\mathbf{x}) \quad \text{для } \mathbf{x} \in \Pi_x \cap \mathcal{G}_x, \quad (1.7)$$

где

$$\Pi_x = \{\mathbf{x}: \mathbf{a} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}, \quad \mathbf{x} \in R^d, \quad (1.8)$$

$$\mathcal{G}_x = \{\mathbf{x}: \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}, \mathbf{x} \in R^d\}, \quad \mathbf{g} \in R^r, r < d;$$

В этих выражениях  $n$ -мерные векторы  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  имеют фиксированные компоненты  $a_i, b_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , и функции  $g_l(\mathbf{x})$ ,  $l = \overline{1, r}$  — непрерывны.

Преобразование (1.5) приобретает следующий простой вид:

$$\mathbf{z} = (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \otimes \left( \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{b} - \mathbf{a}} \right). \quad (1.9)$$

Обозначим через  $\mathbb{Z}^*$  множество  $\mathbf{z}^*$  точек глобального минимума, а через  $F(\mathbf{z}^*) = F^*$  — значение глобального минимума в задаче (1.3).

Функция  $F(\mathbf{z})$  в силу непрерывности преобразования (1.5), очевидно, ограничена снизу на  $\mathcal{K}_{\mathbf{z}}$ , т.е. существует константа  $c$ , для которой

$$F^* \geq c. \quad (1.10)$$

Константа  $c$  в общем случае неизвестна, но в некоторых специальных задачах глобальной минимизации она равна нулю. Это так, например, в задачах, где функция  $F(\mathbf{z})$  имеет смысл невязки между левой и правой частями некоторой системы уравнений.

Функция  $F(\mathbf{z})$  также удовлетворяет условию Гельдера, но с другими константами  $L$  и  $s$ :

$$\omega(h) = \max_{(\mathbf{v}, \mathbf{y}) \in \mathcal{K}_{\mathbf{x}}: \|\mathbf{v} - \mathbf{y}\| \leq h} |F(\mathbf{v}) - F(\mathbf{y})| \leq Lh^s. \quad (1.11)$$

Цель работы состоит в построении сходящегося с вероятностью 1 алгоритма (будем называть его **GFS** «generation, filtration, selection») поиска какой-либо точки  $\mathbf{z}^* \in \mathbb{Z}^*$  глобального минимума функции  $F(\mathbf{z})$  на множестве  $\mathcal{K}_{\mathbf{z}}$  с использованием простых переборных испытаний Монте-Карло.

## 2. Общая идея алгоритма GFS

Рассмотрим случай, когда допустимое множество представляет собой единичный неотрицательный куб  $Z_+^n$  (1.3). В разделе 5 будет показано, как работает алгоритм, если допустимое множество в (2.1) задается непрерывными функциями  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ .

На  $k$ -м шаге алгоритма ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) генерируется пакет  $\mathcal{Z}_k$  из  $N_k$  независимых и равномерно распределенных на  $Z_+^n$  случайных векторов  $\{\mathbf{z}^1, \dots, \mathbf{z}^{N_k}\}$ . Вычисляются значения функции  $F(\mathbf{z}^j)$ ,  $j = \overline{1, N_k}$ , находится ее минимальное значение  $F_k^*$  и аргумент  $\mathbf{z}_k^*$  для  $k$ -го пакета. В силу случайного характера МК-испытаний «квази-глобальное» значение целевой функции  $F_k^*$  — случайное.

Переход к  $(k + 1)$ -му шагу состоит в увеличении количества случайных векторов по определенному правилу и нахождению нового

«квази-глобального» минимума  $F_{k+1}^*$  для  $(k + 1)$ -го пакета.

Формируется строго-монотонно убывающая последовательность значений «квази-глобальных» минимумов

$$F^* = \{F_0^* > F_1^* > \dots\}, \quad (2.1)$$

и последовательность ее декрементов

$$\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_k, \dots\}, \quad (2.2)$$

где  $u_i = F_i^* - F_{i+1}^*$ .

Алгоритм останавливается, когда последовательность случайных величин  $u_k$  в течение  $\rho$  шагов остается в заданной -окрестности нуля, т.е. количество шагов до остановки алгоритма

$$\tau = \min \{k: \max_{k-\rho \leq s \leq k} u_s \leq \delta\}. \quad (2.3)$$

Под решением задачи (2.3) понимается набор

$$S = \{F_\tau^*, \mathbf{z}_\tau^*, r_\tau^+, \mathbf{P}(\mathcal{E}_{r_\tau^+})\}, \quad (2.4)$$

где:

- $F_\tau^*, \mathbf{z}_\tau^*$  — приближенные значения глобального минимума и его аргумента соответственно;
- $r_\tau^+$  — оценка максимального расстояния от полученного значения «квази-глобального» минимума до его точного значения;
- событие

$$\mathcal{E}_{r_\tau^+} = \{F_\tau^* - F^* \leq r_\tau^+\}; \quad (2.5)$$

- $\mathbf{P}(\mathcal{E}_{r_\tau^+})$  — оценка вероятности события (2.5).

## 3. Теоретический анализ свойств алгоритма GFS

### 3.1. Вероятностные характеристики пакета $\mathcal{Z}_k$

Источником формирования пакета  $\mathcal{Z}_k$  является датчик случайных последовательностей, который на  $k$ -ом шаге генерирует  $(d \times M_k)$ -мерный массив независимых случайных чисел, равномерно распределенных на отрезке  $[0, 1]$ . Из них формируется пакет из  $N_k$  независимых и равномерно распределенных на неотрицательном единичном кубе случайных векторов  $\mathcal{Z}_k = \{\mathbf{z}^1, \dots, \mathbf{z}^{N_k}\}$ . Преобразование  $(d \times M_k)$ -

мерного массива независимых случайных чисел в случайные векторы может реализовывать разными алгоритмами.

Например, связь между  $M_k$  и  $N_k$  может иметь следующий вид:

$$N_k = M_k^d, \quad (3.1)$$

или

$$N_k = M_k. \quad (3.2)$$

При тестировании алгоритма использовался датчик случайных векторов (3.2). В дальнейшем будет использоваться переменная  $M_k$ , если рассматриваются координаты  $z_j^i$  векторов  $\mathbf{z}^i$ . Для обозначения количества случайных векторов в пакете  $Z_k$  будет использоваться переменная  $N_k$ .

Объем пакета  $N_k$  (и объем каждой координатной последовательности из  $M_k$  случайных чисел) случайных векторов изменяется от шага к шагу для (3.2) по следующему правилу:

$$N_{k+1} = \alpha N_k, \quad M_{k+1} = \alpha M_k, \quad \alpha > 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

Рассмотрим единичный куб  $Z_+^d$  (1.3) и его разбиение на элементарные кубы с помощью равномерной решетки с шагом

$$\eta_k = M_k^{-q}, \quad (0 < \gamma \leq q \leq \beta < 1) \quad (3.4)$$

по каждой из его  $d$  координат.

Обозначим через  $\mathbf{P}(N_k, d, q)$  вероятность того, что найдется элементарный куб, который не содержит ни одного из  $N_k$  сгенерированных на  $k$ -м шаге векторов. Оценка для этой вероятности определяется следующей леммой.

**Лемма 1.** Имеет место оценка

$$\mathbf{P}(N_k, d, q) \leq \left[ (N_k^q + 1)(1 - N_k^{-q})^{N_k} \right]^d = \mathbf{Q}(k, d, q), \quad (3.5)$$

где при  $k \rightarrow \infty$

$$\mathbf{Q}(k, d, q) \sim \mathbb{Q}(k, d, q) = N_k^{qd} \exp(-dN_k^{1-q}). \quad (3.6)$$

*Доказательство.* Вероятность того, что в интервал длины  $\eta_k$  ни попадет ни одна из  $M_k$  сгенерированных независимых и равномерно распределенных на  $[0, 1]$  случайных величин, равна  $(1 - M_k^{-q})^{M_k}$ .

Пусть  $A_i$  — событие, состоящее в том, что для  $i$ -ой координаты такой интервал на отрезке  $[0, 1]$  найдется. Тогда

$$\mathbf{P}(A_i) \leq (M_k^q + 1)(1 - M_k^{-q})^{M_k} = \mathbf{R}(k, d, q). \quad (3.6)$$

Здесь  $(M_k^{-q} + 1)$  — верхняя оценка количества сегментов разбиения интервала  $[0, 1]$  решеткой с шагом  $M_k^{-q}$ .

Так как

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1 - x^{-q})^x}{\exp(-x^{1-q})} = 1,$$

то в (3.6) имеет место следующее неравенство:

$$\mathbf{P}(A_i) \leq \mathbf{R}(k, d, q) \sim M_k^q \exp(-M_k^{1-q}) \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \quad (3.7)$$

Пусть  $B$  — событие, состоящее в том, что найдется  $d$ -мерный элементарный куб, не содержащий ни одного из сгенерированных векторов. Тогда  $B = \bigcap_{i=1}^d A_i$ . Поскольку по каждой координате генерируется независимый набор случайных величин, то отсюда получаем, что при  $k \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(N_k, d, q) = (\mathbf{P}(A_i))^d \leq ((N_k^q + 1)(1 - N_k^{-q})^{N_k})^d. \quad (3.8)$$

Учитывая (3.7), получим утверждение леммы. ■

**Следствие 1.** При  $k \rightarrow \infty$  с вероятностью не менее чем  $1 - \mathbf{Q}(k, d, q)$  в каждый элементарный куб со стороной  $M_k^{-q}$  попадает хотя бы один из сгенерированных на  $k$ -м шаге случайных векторов пакета. При достаточно больших  $k$  указанная вероятность оценивается величиной  $1 - \mathbf{Q}(k, d, q)$ .

### 3.2. Вероятностные свойства последовательности $\mathcal{F}_k^*$

Рассмотрим последовательность «квази-глобальных» минимумов  $\mathcal{F}^* = \{F_0^*, \dots, F_k^*, \dots\}$

и последовательность их аргументов  $Z^* = \{z_0^*, \dots, z_k^*, \dots\}$ .

Пусть  $Z^*$  — множество точек глобального минимума функции  $F(\cdot)$  на единичном кубе. Введем расстояние  $l(\cdot)$  от произвольной точки  $z$  до множества  $Z^*$  (учитывая, что оно компактно):

$$l(z, Z^*) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{y \in Z^*} \|z - y\| \quad (3.9)$$

**Лемма 2.** С вероятностью не менее, чем  $1 - Q(k, d, q)$  имеет место оценка

$$|F^* - F_k^*| \leq \omega(h_k), \quad (3.10)$$

где  $\omega(h_k)$  — модуль непрерывности функции  $F(z)$  (2.11) и  $h_k = \eta_k \frac{\sqrt{d}}{2}$ .

*Доказательство.* Пусть  $\hat{z}$  — ближайшая (в смысле введенного расстояния (3.9)) к множеству  $Z^*$  точка из совокупности сгенерированных на  $k$ -м шаге случайных точек.

Так как в каждый элементарный куб со стороной  $\eta_k$  попадает с вероятностью не менее чем  $1 - Q(k, d, q)$  хотя бы одна из сгенерированных точек, то расстояние

$$h_k = \|z^* - \hat{z}\| \leq \eta_k \frac{\sqrt{d}}{2}. \quad (3.11)$$

Это произойдет, если точка глобального минимума  $z^*$  находится в центре куба со стороной  $\eta_k$ , а ближайшие случайные точки расположились в вершинах этого куба, так что выполняется условие, что в каждом кубе есть хотя бы одна случайная точка.

Тогда

$$|F^* - F(\hat{z})| \leq \omega(h_k). \quad (3.12)$$

С другой стороны,

$$F^* = F(z^*) = \min_{z \in Z^*} F(z) \leq \min_{1 \leq s \leq k} F_s^* < F(\hat{z}), \quad (3.13)$$

т. е., с учетом (3.12)

$$-\omega(h_k) \leq F^* - F(\hat{z}) \leq \min_{z \in Z^*} F(z) - \min_{1 \leq s \leq k} F(z_s) \leq 0. \quad (3.14)$$

Окончательно,

$$|\min_{z \in Z^*} F(z) - \min_{1 \leq s \leq k} F(z_s)| \leq \omega(h_k) \quad (3.15)$$

с вероятностью не менее, чем  $1 - Q(k, d, q)$ . ■

**Следствие 2.** Для функций класса (1.11) существуют константы  $L > 0$ ,  $s > 0$  такие, что с вероятностью не менее чем  $1 - Q(k, d, q)$  справедлива оценка:

$$|F^* - F_k^*| \leq L \left(\frac{\sqrt{d}}{2}\right)^p N_k^{-pq} = r_k(q); \quad (3.16)$$

или

$$P\{|F^* - F_k^*| \leq r_k(q)\} \geq 1 - Q(k, d, q). \quad (3.17)$$

**Замечание.** Оценки (4.16, 4.17) зависят от параметра  $q$ , который влияет на величину объема элементарного куба в (3.4). Параметры  $\gamma, \beta$  следует выбирать из соображений приемлемости оценок размера окрестности и соответствующей вероятности.

### 3.3. Сходимость алгоритма к глобальному минимуму

Полученные выше вероятностные характеристики последовательности  $F^*$  «квази-глобальных» минимумов позволяют сформулировать следующую теорему о ее сходимости:

**Теорема 1.** Для функций, удовлетворяющих условию Гельдера, справедливы следующие утверждения:

- i) последовательность  $F^*$  значений минимумов  $F_k^*$  сходится с вероятностью 1 к значению истинного минимума  $F^*$  с экспоненциальной скоростью;
- ii) последовательность аргументов значений минимумов  $z_k^*$  сходится к множеству  $Z^*$  (в смысле расстояния (3.9)) с вероятностью 1.

*Доказательство.* i) Фиксируем достаточно малое число  $\varepsilon > 0$  и найдем число  $K(\varepsilon)$  из условия  $K(\varepsilon) = \min\{k: r_k \leq \varepsilon\}$ , где  $r(k)$  определяется в (3.16).

Тогда при  $k > K(\varepsilon)$  имеет место следующее вложение событий:

$$\{|F^* - F_k^*| > \varepsilon\} \subset \{|F^* - F_k^*| > r_k\}. \quad (3.18)$$

Поэтому из (4.16) получаем, что вероятность последнего события оценивается, согласно (3.6), следующим образом:

$$P\{|F^* - F_k^*| > \varepsilon\} \leq Q(k, d, q). \quad (3.19)$$

Согласно (3.3) имеем:

$$M_k = \alpha^k M_0 > kM_0, \quad \text{для } \alpha > 1, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.20)$$

Оценку для  $Q(k, n, q)$  (3.5) представим в следующем виде:

$$Q(k, n, q) = \alpha^{qd} M_0^{qd} \exp\left(-\frac{d}{2} \alpha^{(1-q)k} M_0^{(1-q)}\right) \exp\left(-\frac{d}{2} \alpha^{(1-q)k} M_0^{(1-q)}\right). \quad (3.21)$$

Одну из экспонент оценим, используя (3.20):

$$\exp\left(-\frac{d}{2} \alpha^{(1-q)k} M_0^{(1-q)}\right) < \exp\left(-\frac{k(1-q)}{2} M_0^{(1-q)}\right). \quad (3.22)$$

Теперь, полагая  $x = \alpha^k M_0$ , из (3.21) и (3.22), получим:

$$Q(k, d, q) \leq \tilde{Q} \exp\left(-\frac{k(1-q)}{2} M_0^{(1-q)}\right), \quad (3.23)$$

где

$$\tilde{Q} = \max_{x \geq 0} x^{qd} \exp\left(-\frac{dx^{(1-q)}}{2}\right).$$

Обозначим

$$C = \frac{1-q}{2} M^{(1-q)}.$$

Тогда вероятность (3.19) может быть оценена следующим образом:

$$\mathbf{P}\{|F^* - F_k^*| > \varepsilon\} \leq \tilde{Q} \exp(-Ck), \quad \text{для } k > K(\varepsilon). \quad (3.24)$$

Из (3.24) имеем:

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\left\{\sup_{s \geq 0} |F_k^* - F_{k+s}^*| > \varepsilon\right\} \leq \\ & \leq 2\mathbf{P}\left\{\sup_{s \geq k} |F^* - F_s^*| > \varepsilon/2\right\} \leq \\ & \leq 2 \sum_{s=k}^{\infty} \mathbf{P}\{|F^* - F_s^*| > \varepsilon/2\} \leq \\ & \leq 2Q \sum_{s=k}^{\infty} \exp(-Cs) \text{ при } k > K(\varepsilon/2). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Таким образом, из (3.25) получаем, что при любых (достаточно малых)  $\varepsilon > 0$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left\{\sup_{s \geq 0} |F_k^* - F_{k+s}^*| \geq \varepsilon\right\} = 0, \quad (3.26)$$

что является необходимым и достаточным условием сходимости последовательности  $\{F_k^*\}$  почти наверное. Из приведенных оценок следует, что скорость этой сходимости экспоненциальна.

ii) В предположении противного найдется подпоследовательность последовательности  $\{\mathbf{z}_k^*\}$  (без ограничения общности можно считать, что это сама последовательность  $\{\mathbf{z}_k^*\}$ ), которая с положительной вероятностью сходится к точке  $\tilde{\mathbf{z}} \notin Z^*$ . Тогда, в силу непрерывности функции  $F(\cdot)$ , с одной стороны,  $\lim_k F(\mathbf{z}_k^*) = F(\tilde{\mathbf{z}}) > F^*$  с положительной вероятностью, а с другой стороны, в силу доказанного в п. i),  $\lim_k F(\mathbf{z}_k^*) = \lim_k F_k^* = F^* = F(\tilde{\mathbf{z}})$  с вероятностью 1. Полученное противоречие доказывает утверждение. ■

**Следствие 3.** Строго-монотонная последовательность  $F^*$  (2.1) «квази-глобальных» минимумов сходится с вероятностью 1 к значению точного глобального минимума с экспоненциальной скоростью.

Последовательность  $F_k^*$  является подпоследовательностью сходящейся с вероятностью 1 и имеющей экспоненциальную скорость сходимости последовательности  $F^*$ .

**Следствие 4.** Последовательность декрементов  $\mathcal{U}_k$  (2.2) сходится с вероятностью 1 к нулю.

**Замечание.** Если существует окрестность  $U$  множества  $Z^*$ , в которой справедлива оценка  $F(\mathbf{z}) - F^* \geq b(l(\mathbf{z}, Z^*))$ ,  $\mathbf{z} \in U$  для некоторой монотонной функции  $g$ , то из (4.24) будет следовать экспоненциальная скорость сходимости последовательности  $\{\mathbf{z}_k^*\}$  к множеству  $Z^*$  с вероятностью 1. Здесь  $l(\mathbf{z}, Z^*)$  — расстояние между вектором  $\mathbf{z}$  и множеством  $Z$  точек глобального минимума.

### 3.4. Аппроксимация последовательности декрементов и оценивание констант Гельдера

Для функций, удовлетворяющих условию Гельдера, имеет место оценка (3.16):

$$|F_k^* - F^*| \approx L \left(\frac{\sqrt{d}}{2} \frac{1}{N_k^q}\right)^s = r_k(q). \quad (3.27)$$

Тогда

$$|F_{k+1}^* - F^*| \approx L \left(\frac{\sqrt{d}}{2} \frac{1}{N_{k+1}^q}\right)^s. \quad (3.28)$$

Вычитая из первого выражения второе и используя (4.3), получим:

$$u_k \approx L \left( \frac{\sqrt{d}}{2} \frac{1}{N_k^q} \right)^s (1 - \alpha^{-qp}) \sim L \left( \frac{\sqrt{d}}{2} \frac{1}{N_k^q} \right)^s = \tilde{u}_k, \quad (3.29)$$

полагая  $\alpha^{-qs} \ll 1$ .

Прологарифмируем (3.29):

$$v_k = \log \tilde{u}_k = \log L - s \left( q \log N_k - \log \frac{\sqrt{d}}{2} \right). \quad (3.30)$$

Введем следующие обозначения:

$$A^{(k)} = \log L, \quad n_k = \log N_k, \quad \tilde{n}_k(q) = qn_k - \log \frac{\sqrt{d}}{2}. \quad (3.31)$$

Можно высказать вторую гипотезу<sup>1</sup>: оформленную в виде следующей теоретической модели процесса  $v_k$  (3.30) (при достаточно большом  $n_k$ ):

$$v_k = A^{(k)} - s^{(k)} \tilde{n}_k(q) + \zeta_k, \quad (3.32)$$

где  $\zeta_k$  — последовательность случайных величин с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $D$ .

Параметры  $A^{(k)}$ ,  $s^{(k)}$  связаны с константами Гельдера (3.30)  $L, s$ . Будем определять их оценки  $\hat{A}^{(k)}(q)$ ,  $\hat{s}^{(k)}(q)$  методом наименьших квадратов по текущей информации об элементах последовательностей  $\{v_k\}$  и  $\{n_k\}$ .

Таким образом, имеем оценки констант Гельдера  $L^{(k)}(q) = a^{\hat{A}^{(k)}(q)}$  ( $a$  — основание логарифма) и  $s^{(k)}(q)$ , с использованием которых определяется оценка расстояния (3.27) до точного значения глобального минимума:

$$r_k(q) = L^{(k)}(q) \left( \frac{\sqrt{d}}{2} \frac{1}{N_k^q} \right)^{s^{(k)}(q)}. \quad (3.33)$$

<sup>1</sup> Для иллюстрации этой гипотезы был проведен вычислительный эксперимент по определению зависимости  $\log(F_k^* - F^*)$  от  $\log k$  при  $F^* = 0$ . Результаты его показаны на рис. 1. По этим данным методом наименьших квадратов определялись параметры и с.к.о. аппроксимации (3.27). Последняя составила менее 12%, что поддерживает данную гипотезу и адекватность модели (3.32).

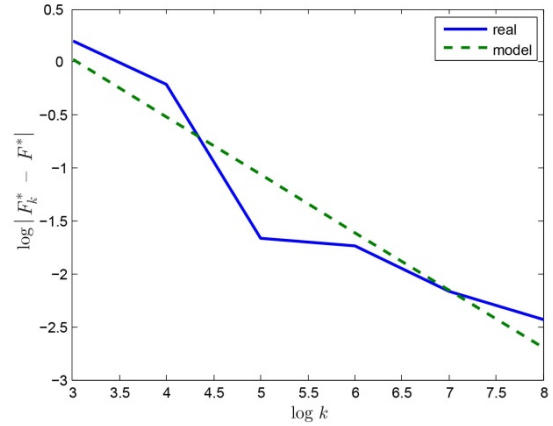


Рис. 1.

### 3.5. Оценка среднего числа шагов алгоритма

**Теорема 2.** Оценка среднего числа шагов алгоритма до его остановки на шаге  $\tau$  имеет вид:

$$\mathbf{E}\{\tau\} \leq O \left( \sum_{T=1}^{\infty} \frac{1}{T^2} \right). \quad (3.34)$$

*Доказательство.* Введем целочисленную переменную  $T > 0$  и рассмотрим событие

$$\mathcal{E} = \{\tau > T\}, \quad (3.35)$$

где  $\tau$  — шаг, на котором происходит остановка алгоритма.

Имеем

$$\mathcal{E} \subset \cup_{s=T-\rho}^T \{u_s > \delta\}. \quad (3.36)$$

Поэтому

$$\mathbf{P}(\mathcal{E}) \leq \sum_{s=T-\rho}^T \mathbf{P}\{v_s > \log \delta\} \leq (\rho + 1) \max_{T-\rho \leq s \leq T} \mathbf{P}\{v_s > \log \delta\}. \quad (3.37)$$

Из (3.32) получаем, используя неравенство Чебышева, следующее выражение:

$$\frac{\mathbf{P}\{v_s > \log \delta\}}{\hat{D}^{(T)}} = \frac{\mathbf{P}\{\zeta_s > \log \delta - \hat{A}^{(T)} + \hat{s}^{(T)} s\}}{(\log \delta - \hat{A}^{(T)} + \hat{s}^{(T)} s)^2}. \quad (3.38)$$

Таким образом, согласно (3.37) имеем оценку искомой вероятности

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathcal{E}) &= (\rho + 1) \max_{T-\rho \leq s \leq T} \frac{\hat{D}^{(T)}}{(\log \delta - \hat{A}^{(T)} + \hat{s}^{(T)} s)^2} \leq \\ &\leq \frac{(\rho + 1) \hat{D}^{(T)}}{(\log \delta - \hat{A}^{(T)} + \hat{s}^{(T)} (T - \rho))^2} = O(1/T^2). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Здесь  $\widehat{D}^{(T)}$  — оценка дисперсии случайной величины  $\zeta$  в (3.32).

По определению среднее число шагов работы алгоритма до остановки равно

$$E\{\tau\} = \sum_{m=1}^{\infty} m P\{\tau = m\}. \quad (3.40)$$

Для  $T > 2$  имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^T m P\{\tau = m\} = \\ &= \sum_{m=2}^T m (P\{\tau > m-1\} - P\{\tau > m\}) = \\ &= \sum_{m=2}^T (m-1)P\{\tau > m-1\} + \sum_{m=2}^T P\{\tau > m-1\} - \\ & - \sum_{m=2}^T m P\{\tau > m\} = \sum_{m=1}^{T-1} P\{\tau > m\} - TP\{\tau > T\}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Согласно (3.39)

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T P\{\tau > T\} \leq \lim_{T \rightarrow \infty} T O(1/T^2) = 0. \quad (3.42)$$

Переходя в равенстве (3.41) к пределу при  $T \rightarrow \infty$ , получим:

$$E\{\tau\} = \sum_{T=1}^{\infty} P\{\tau > T\} \leq O(\sum_{T=1}^{\infty} 1/T^2). \quad (3.43)$$

Поскольку в правиле остановки используется последовательность декрементов, а точнее их логарифмов, то необходимо установить вероятность того, что после остановки алгоритма хотя бы одно значение  $F_{\tau-\rho}^*, F_{\tau-\rho+1}^*, \dots, F_{\tau}^*$  окажется вне окрестности значения точного глобального минимума. Но из (3.16) и (3.24) следует, что эта вероятность при больших  $k$  она стремиться к нулю. ■

**Замечание.** Если допустимое множество есть часть единичного куба вида (1.3), то при оценке вероятностей в разделе 3 изменится только число элементарных кубов в разбиении допустимого множества, но оно заведомо не превосходит число таких кубов при разбиении единичного куба. Поэтому оценки вероятностей (а значит, и утверждения о сходимости алгоритма), приведенные в этом разделе, имеют место и в случае компакта вида (1.3), имеюще-

го положительную меру Лебега. При реализации алгоритма в этом случае следует на каждом шаге проверять принадлежность каждой случайной точки допустимому множеству.

### 3.6. Вероятностные характеристики решения

В момент остановки алгоритма на шаге  $\tau$  имеются оценки параметров  $A^{(\tau)}(q), p^{(\tau)}(q)$  в уравнении (3.33). Используя их, можно оценить удаленность найденного значения «квази-глобального» минимума  $F_{\tau}^*$  от значения глобального минимума  $F^*$ .

Согласно следствию 2, (3.16) и (3.33) имеем:

$$|F_{\tau}^* - F^*| \leq \max_{0 < \gamma \leq q \leq \beta < 1} r_{\tau}(q) = r_{\tau}^+. \quad (3.44)$$

Нижняя оценка вероятности события  $\mathcal{E}_{r_{\tau}^+}$  (2.5), согласно лемме 1 имеет вид:

$$P_{r_{\tau}^+}^* = \min_{0 < \gamma \leq q \leq \beta < 1} (1 - N_{\tau}^{qd} \exp(-d[N_{\tau}]^{(1-q)})). \quad (3.45)$$

## 4. Логическая структура алгоритма GFS

Алгоритм *GFS* ориентирован на поиск глобального экстремума для канонической формы задачи (1.3). Он состоит из двух процедур *SeqLocMin* и *EstProb*, первая из которых предназначена для формирования последовательностей локальных минимумов и их декрементов, и включает правило остановки, вторая для вычисления нижней оценки вероятности найденного значения «квази-глобального» минимума.

Процедуры состоят из последовательности  $k$  шагов, внутри которых выполняется некоторое количество  $s$  операций. Поэтому этапы процедуры будем индексировать парой  $(k, s)$ .

### Процедура SeqLocMin

Введем следующие обозначения:

- $d$  — размерность вектора  $\mathbf{z}$ ;
- $M_k$  — длина набора значений случайных чисел на шаге  $k$  по каждой из координат вектора  $\mathbf{z}$ ;
- $N_k$  — объем пакета  $\mathcal{Z}_k$  случайных векторов на шаге  $k$  ( $N_k = M_k$ );



- $Z_k = \{\mathbf{z}^1, \dots, \mathbf{z}^{N_k}\}$  — пакет случайных равномерно распределенных в  $Z_+^n$  векторов  $\mathbf{z}$ ;
- $\mathcal{Y}_k = \{\mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^{\tilde{N}_k}\}$ ,  $\tilde{N}_k \leq N_k$  — пакет допустимых случайных векторов, принадлежащих допустимому множеству  $\mathcal{K}$  (1.3);
- $\tilde{N}_k$  — объем пакета  $\mathcal{Y}_k$ ;
- $F_k^* = \min_{\mathbf{y} \in \mathcal{Y}_k} F(\mathbf{y})$  — минимум целевой функции  $F$  на допустимом пакете  $\mathcal{Y}_k$ ;
- $\mathcal{F}^k = \{F_0^*, F_1^*, \dots, F_k^*\}$  — последовательность «квази-глобальных» минимумов;
- $u_i = |F_i^* - F_{(i-1)}^*|$ ,  $i = \overline{1, k}$  — декремент последовательности  $\mathcal{F}^k$ ;
- $\mathcal{U}^k = \{u_0, u_1, \dots, u_k\}$  — последовательность декрементов;
- $v_i = \log u_i$ ,  $i = \overline{0, k}$ ;
- $\mathcal{V}^k = \{v_0, v_1, \dots, v_k\}$  — последовательность логарифмов декрементов;
- $\tilde{\mathcal{V}}^k(\rho) = \{\tilde{v}_{k-\rho}, \tilde{v}_{k-\rho+1}, \dots, \tilde{v}_k\}$  — последовательность логарифмов декрементов меньших  $\log \delta$ ;
- $n_i = \log \tilde{N}_i$ ,  $i = \overline{0, k}$ ;
- $\mathcal{N}^k = \{n_0, n_1, \dots, n_k\}$  — последовательность логарифмов объемов пакетов;
- $\delta$  — допустимая погрешность вычисления значений декрементов;
- $\rho$  — заданное количество элементов последовательности  $\tilde{\mathcal{V}}^k(\rho)$ , которые должны оставаться внутри заданной трубки.

Каждый шаг  $k$  состоит из трех основных этапов:

- *Генерация* — создание набора случайных точек;
- *Фильтрация* — отбор допустимых точек;
- *Выбор* — выбор минимального значения целевой функции на множестве допустимых точек.

Этапы выполняются последовательно. Таким образом вычислительная схема  $k$ -го шага данной процедуры состоит в следующем:

#### 1. Генерация

- Формируется пакет случайных векторов  $Z_k = \{\mathbf{z}^1, \dots, \mathbf{z}^{N_k}\}$ ,  $N_k = \alpha N_{k-1}$ ;

#### 2. Фильтрация

- Из пакета  $Z_k$  выбираются вектора принадлежащие допустимому множеству  $\mathcal{K}$ , т.е. формируется пакет  $\mathcal{Y}_k$  объемом  $\tilde{N}_k$ ;

### 3. Выбор

- Вычисляются значения целевой функции на допустимом наборе точек  $F(\mathbf{y}^i)$ ,  $i = \overline{1, \tilde{N}_k}$ ;
- Выбирается минимальное  $F_k^* = \min_{1 \leq i \leq \tilde{N}_k} F(\mathbf{y}^i)$ ;
- Вычисляется декремент  $u_k = |F_k^* - F_{k-1}^*|$ ,  $v_k = \log u_k$  и  $n_k = \log N_k$ ;

Таким образом, в результате работы процедуры формируются последовательности  $\mathcal{F}_k$ ,  $\mathcal{U}_k$ ,  $\mathcal{V}_k$ ,  $\mathcal{N}_k$ . В случае, если на текущем шаге  $k$   $v_k < \log \delta$ , то значение  $v_k$  включается в последовательность  $\tilde{\mathcal{V}}_k$ .

Если последовательность  $\tilde{\mathcal{V}}_k$  содержит не менее  $\rho$  элементов, то происходит переход к процедуре EstProb.

### Процедура EstProb

Введем следующие обозначения:

- $\hat{A}^{(k)}, \hat{p}^{(k)}$  — оценки параметров аппроксимации после  $k$  шагов;
- $\mathcal{E}_j$  — событие, состоящие в том, что  $v_j \leq \log \delta$ ;
- $\mathbf{P}_{r_\tau^-}^*$  — нижняя оценка вероятности (3.45);
- $r_\tau^+$  — верхняя оценка расстояния до точного решения (3.44);

Процедура состоит из двух основных этапов:

1. *Вычисление оценок* — вычисление оценок параметров аппроксимации процесса решения после  $k$  шагов;

2. *Вычисление показателей качества* — вычисление показателей, характеризующих качество полученного на шаге  $k$  решения.

Этапы выполняются последовательно. Таким образом вычислительная схема  $k$ -го шага данной процедуры состоит в следующем:

#### 1. Вычисление оценок

- Используя последовательности  $\mathcal{N}_k$  и  $\mathcal{V}_k$ , вычисляются оценки параметров  $\hat{A}^{(k)}, \hat{p}^{(k)}$  методов наименьших квадратов (МНК);

#### 2. Вычисление показателей качества

- Вычисляется расстояние  $r_\tau(q)$  (3.44) и его максимум  $r_\tau^+ = \max_{0 \leq \gamma < q < \beta \leq 1} r_\tau(q)$ ;
- Вычисляется вероятность  $\mathbf{P}_{r_\tau^-}^*$  (3.45).

На Рис. 2 изображена структурная схема алгоритма GFS.

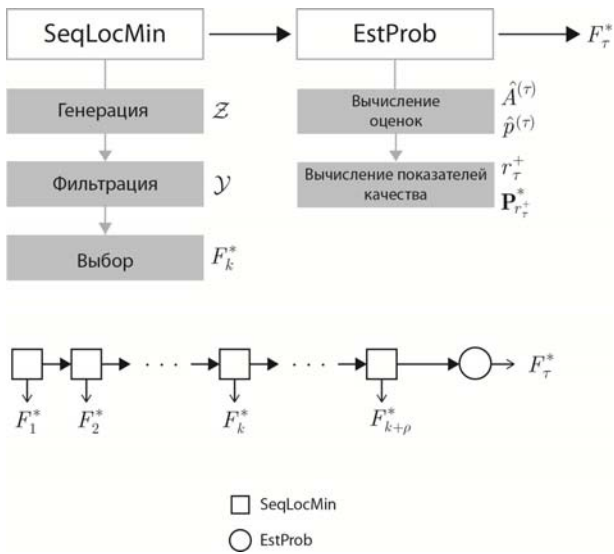


Рис. 2. Схема алгоритма GFS

### 5. Тестирование работоспособности алгоритма GFS

Тестирование вычислительного алгоритма предполагает проведение двухэтапных компьютерных экспериментов, на первом этапе которых исследуется работоспособность алгоритма на тестовых задачах, а на втором анализируется его сравнительная эффективность.

Исследование работоспособности GFS проводилось на некоторых задачах из [20, 21, 4, 19], в которых допустимая область представляла собой параллелепипед  $\Pi_x$  со сторонами, указанными в приложении. Аналитический вид функ-

ций  $f(\mathbf{x})$  в (2.1), значения глобального минимума и его аргумента, точного (со знаком =) и приближенного (со знаком  $\cong$ ) приведены в приложении (в Табл. 1 и Табл. 2, они обозначены A1–A10).

Во всех расчетах  $N_0 = 10, \alpha = 10, \delta = 0,001, \rho = 3, \tau = 9, \varepsilon_\tau = |f^* - f_\tau^*|$ . Результаты расчетов приведены в таблицах 1, 2, где  $t$  — время в секундах, затраченное на получение решения.

Алгоритм был реализован на платформе MATLAB R2012b с использованием модуля Parallel Computing Toolbox (PCT) версии 6.1. Три основных этапа процедуры SeqLocMin были реализованы для проведения вычислений на графическом процессоре, что позволило существенно снизить время получения решения задачи. Расчеты проводились на рабочей станции с процессором Intel Core i7-920, 6 Гб памяти и вычислительным процессором NVidia Tesla C2070 под управлением 64-разрядной операционной системы Microsoft Windows 7 Professional.

Из приведенных таблиц видно, что во всех задачах получены приближенные значения глобальных минимумов с погрешностью от  $10^{-9}$  до  $10^{-2}$ . Для задач A1–A7 получены адекватные значения верхних оценок  $r_\tau$  расстояний до точного глобального минимума с вероятностью почти 1. От размеров начальной области поиска численные результаты и временные затраты практически не зависят.

Табл. 1

Функция	$\Pi_x$	$f_\tau^*$	$\mathbf{x}_\tau^*$	$\varepsilon_\tau$	$r_\tau$	$t$ (сек)
A1	[-10; 10]	-9,6040	4,0556	0,5430	1,1763	918
			4,0280			
			4,0321			
			3,9698			
	[-5; 5]	-10,0231	3,9704	0,1299	0,5876	907
			3,9840			
			4,0060			
			4,0120			
	[0; 5]	-10,1325	4,0042	0,0205	0,2367	908
			3,9944			
			3,9875			
			4,0014			
	[3,5; 4,5]	-10,1515	3,9976	0,0015	0,0014	905
			4,0031			
			4,0017			
			4,0003			

Функция	$\Pi_x$	$f_\tau^*$	$\mathbf{x}_\tau^*$	$\varepsilon_\tau$	$r_\tau$	$t$ (сек)
A2	[-5; 5]	-156,6823	2,9119	0,0183	0,1351	723
			2,9105			
			2,8804			
A3	[-10; 10]	$2,05 \cdot 10^{-7}$	1,0004	$2,05 \cdot 10^{-7}$	$9,42 \cdot 10^{-6}$	556
			1,0090			
	[-50; 50]	$2,425 \cdot 10^{-5}$	1,0039	$2,42 \cdot 10^{-5}$	$4,22 \cdot 10^{-4}$	553
			1,0075			
A4	[-10; 10]	$1,4 \cdot 10^{-8}$	0,9999	$1,4 \cdot 10^{-8}$	$2,61 \cdot 10^{-6}$	580
			0,9998			
			0,5000			
A5	[-10; 10]	3,0000	3,0010	0,00004	0,0026	640
			1,77 $\cdot 10^{-7}$			
	[-1; 1]	3,0000	-0,0004	$4,11 \cdot 10^{-7}$	$1,09 \cdot 10^{-5}$	645
			$3,55 \cdot 10^{-5}$			
A6	[-10; 10]	$8,62 \cdot 10^{-4}$	0,0000	$1,26 \cdot 10^{-7}$	$9,65 \cdot 10^{-6}$	590
			0,0000			
			-1,0000			
A7	[-10; 10]	$4,35 \cdot 10^{-4}$	0,0001	0,00086	0,00102	583
			-0,0003			
			1,54 $\cdot 10^{-4}$			
A8	[-1; 1]	$4,81 \cdot 10^{-6}$	4,81 $\cdot 10^{-6}$			

Табл.2.

Функция	$\Pi_x$	$f_\tau^*$	$\mathbf{x}_\tau^*$	$\varepsilon_\tau$	$r_\tau$	$t$ (сек)		
A7	[-512; 512]	-959,6382	511,9998	0,0025	0,2292	938		
			404,2714					
			511,9983				0,0067	0,0652
A8	[0; 512]	-959,6340	404,2575	0,002	0,0055	951		
			511,9996					
			404,2073					
A9	[404; 512]	-959,6387	4,0027	0,0012	-	925		
			4,0024					
			0,0012				-	922
			4,0022				-	
A10	[3; 5]	-11,0310	4,0027	0,0012	-	916		
			4,0021					
			4,0021					
A9	[-50; 50]	-0,998	31,9775	$3,84 \cdot 10^{-6}$	-	1451		
			31,9810					
A10	[-5; 5]	-78,3	2,9035	0,0004	-	564		
			2,9035					

## Приложение

Ниже приведены описания тестовых задач поиска глобальных минимумов непрерывных функций на параллелепипедах.

### A1. Shekel function

$$f(x) = \sum_{i=1}^m (c_i + \sum_{j=1}^d (x_j - a_{ji})^2)^{-1}, \quad m = 5, \quad d = 4, \quad (1)$$

$$f^* = -10,153, \quad \mathbf{x}^* = \mathbf{4}, \mathbf{0}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 8 & 6 & 3 \\ 4 & 1 & 8 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 8 & 6 & 3 \\ 4 & 1 & 8 & 6 & 7 \end{pmatrix}, \quad c = \frac{1}{10}(1, 2, 2, 4, 4)$$

### A2. Styblinski-Tang function

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d x_i^4 - 16x_i^2 + 5x_i, \quad d = 4, \quad (2)$$

$$f^* = -156,664, \quad \mathbf{x}^* = \mathbf{2}, \mathbf{903534}.$$

### A3. Rosenbrock function

$$f(x) = \sum_{i=1}^d 100(x_{i+1} - x_i)^2 + (x_i - 1)^2, \quad d = 2, \quad (3)$$

$$f^* = 0, \quad \mathbf{x}^* = \mathbf{1}.$$

### A4. Beale's function

$$f(x) = (1,5 - x_1 + x_1x_2)^2 + (2,25 - x_1 + x_1x_2^2)^2 + (2,625 - x_1 + x_1x_2^3)^2, \quad (4)$$

$$f^* = 0, \quad \mathbf{x}^* = \{3; 0,5\}.$$

### A5. Goldstein-Price function

$$f(x) = (1 + (x_1 + x_2 + 1)^2 \times (19 - 14x_1 + 3x_2^2 - 14x_2 + 6x_1x_2 + 3x_2^2)) \times (30 + (2x_1 - 3x_2)^2 \times (18 - 32x_1 + 12x_1^2 + 48x_2 - 36x_1x_2 + 27x_2^2)), \quad (5)$$

$$f^* = 3, \quad \mathbf{x}^* = \{0; -1\}.$$

### A6. Ackley's function

$$f(x) = -20 \exp(-0,2(0,5(x_1^2 + x_2^2))^{\frac{1}{2}} - \exp(0,5(\cos(2\pi x_1) + \cos(2\pi x_2)))) + 20 + e \quad (6)$$

$$f^* = 0, \quad \mathbf{x}^* = \mathbf{0}.$$

### A7. Eggholder function

$$f(x) = -(x_2 + 47) \sin\left(\left|x_2 + \frac{x_1}{2} + 47\right|^{\frac{1}{2}}\right) - x_1 \sin(|x_1 - (x_2 + 47)|)^{\frac{1}{2}}, \quad (7)$$

$$f^* = -959,641, \quad \mathbf{x}^* = \{512, 404, 2319\}. \quad (8)$$

### A8. Shekel function

$$f(x) = \sum_{i=1}^m (c_i + \sum_{j=1}^d (x_j - a_{ji})^2)^{-1}, \quad m = 10, \quad d = 2, \quad (9)$$

$$f^* = -11,0298, \quad \mathbf{x}^* = \mathbf{4}, \mathbf{0}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 8 & 6 & 3 & 2 & 5 & 8 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 8 & 6 & 7 & 9 & 5 & 1 & 2 & 3,6 \end{pmatrix},$$

$$c = \frac{1}{10}(1, 2, 2, 4, 4, 6, 3, 7, 5, 5)$$

#### A9. De Jong 5th function

$$f(x) = \left(0,002 + \sum_{j=1}^m \left(j + \sum_{i=1}^2 (x_i - a_{ji})^6\right)^{-1}\right)^{-1}, \quad m = 25, \quad (10)$$

$$f^* = 0,998, \quad \mathbf{x}^* = -\mathbf{32},$$

$$a_{j1} = (-32, -16, 0, 16, 32, -32, -16, 0, 16, 32, -32, -16, 0, 16, 32, -32, 16, 0, 16, 32)^T,$$

$$a_{j2} = (-32, -32, -32, -32, -32, -16, -16, -16, -16, -16, 0, 0, 0, 0, 0, 16, 16, 16, 16, 16, 32, 32, 32, 32)^T.$$

#### A10. Styblinski—Tang function

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d x_i^4 - 16x_i^2 + 5x_i, \quad d = 2, \quad (11)$$

$$f^* = -39,16599d, \quad \mathbf{x}^* = \mathbf{2, 903534}.$$

## Заключение

Предложен новый метод поиска решений задач глобальной оптимизации с непрерывными целевой функцией и функциями в ограничениях, которые могут быть заданы только алгоритмически. Метод базируется на на простых испытаниях Монте-Карло, с помощью которых формируются в результате пакетных итераций последовательности «квази-глобальных» минимумов и их декрементов. Доказывается их сходимость с экспоненциальной скоростью и с вероятностью 1. Для конечного числа итераций получены верхние оценки удаленности от точного глобального минимума и нижние — для сопровождающей ее вероятности. Решения тестовых задач подтвердили работоспособность алгоритма *GFS*.

## Литература

- 1 Horst R., Pardalos P. M., and Thoai N. V. Introduction to Global Optimization. Kluwer Academic, 1996.
- 2 Стрекаловский А. С. Элементы невыпуклой оптимизации. Новосибирск: Наука, 2003.
- 3 Rubinov A. M. Abstract Convexity and Global Optimization, Dordrecht: Kluwer, 2000.
- 4 Strongin R. G., Sergeev Ya. D. Global Optimization with Non-Convex Constraints. Sequential and Parallel Algorithms. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000.
- 5 Сергеев Я. Д., Квасов Д. Е. Диагональные методы глобальной оптимизации. М.: Физматлит, 2008. 351 с.
6. Sergeev Y. D., Strongin R. G., Lera D. Introduction to Global Optimization Exploiting Space-Filling Curves. Springer Briefs in Optimization, 2013.
7. Тихонова М. В., Рябов В. В., Спивак С. И., Гибайдуллин И. М. Параллельная условная глобальная оптимизация при математическом моделировании кинетики химических реакций // Вычислительные методы и программирование. 2013. Т. 14. С. 262–268.
8. Caflisch R. E. Monte Carlo and quasi-Monte Carlo methods // Acta Numerica. 1998. P. 1–49.
9. Rubinstein R. Y., Kroese D. P. Simulation and the Monte Carlo Method. 2008, John Wiley & Sons.
10. Стронгин Р. Г., Гергель В. П., Гришагин В. А., Баркалов К. А. Параллельные вычисления в задачах глобальной оптимизации. М.: изд. Московского университета, 2012. 276 с.
11. Zabinsky Z. B., Smith R. L., McDonald F., Romeijn H. E., Kaufman D. E. Improving Hit-and-Run for Global Optimization // Journal of Global Optimization. 1993. V. 3. P. 171–192.
12. Polyak B., Gryasina E. Hit-and-Run: New design technique for stabilization, robustness and optimization of linear systems. In: Proc. of the IFAC World Congress. 2008. P. 376–380.
13. Hastings W. K. Monte Carlo sampling methods using Markov chains and its applications // Biometrika. 1970. v. 57. P. 92–109.
14. Боровков К. А. Об одном новом варианте метода Монте-Карло // Теория вероятностей и ее применения. 1991. Т. 36. Вып. 2. С. 342–346.
15. Rubinstein R. Y., Kroese D. P. The Cross-Entropy Methods. A Unified Approach to Combinatorial Optimization, Monte-Carlo Simulation, and Machine Learning. Springer, Information Science and Statistics, 2004. 300 p.
16. Зорин А. В., Федоткин М. А. Методы Монте-Карло для параллельных вычислений. М.: изд. Московского университета, 2013. 187 с.

17. Feller W. An Introduction to Probability Theory and its Applications. V. 1, 2. London, New York: John Wiley & Sons, Inc., 1957.
18. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа.
19. Fu M. C., Hu J., Marcus S. I. Model-Based Randomized Methods for Global Optimization. Proc. of the 17th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems, Kyoto, Japan, July 24–28, 2006.
20. Virtual Library of Simulation Experiments: Test Functions and Datasets [Электронный ресурс]. URL: <http://www.sfu.ca/ssurjano/optimization.html> (Дата обращения: 31.07.2014)
21. Test functions for optimization [Электронный ресурс]. URL: [http://en.wikipedia.org/wiki/Test\\_functions\\_for\\_optimization](http://en.wikipedia.org/wiki/Test_functions_for_optimization) (Дата обращения: 31.07.2014).

**Попков Юрий Соломонович.** Директор ИСА РАН. Окончил Московский энергетический институт в 1960 году. Доктор технических наук, профессор. Автор 170 печатных работ. Область научных интересов: системный анализ, математическое моделирование. E-mail: [popkov@isa.ru](mailto:popkov@isa.ru)

**Попков Алексей Юрьевич.** старший научный сотрудник. ИСА РАН. Окончил МГУ им. М.В. Ломоносова в 2002 году. Кандидат технических наук. Автор 19 печатных работ. Область научных интересов: математическое моделирование, высокопроизводительные вычисления, параллельные алгоритмы. Email: [apopkov@isa.ru](mailto:apopkov@isa.ru)

**Дарховский Борис Семенович.** Главный научный сотрудник ИСА РАН. Окончил Московский институт химического машиностроения в 1961 году и Московский государственный университет в 1966 году. Доктор физико-математических наук. Автор 100 печатных работ. Область научных интересов: математическая статистика, теория вероятностей, математические проблемы управления. E-mail: [darbor2004@mail.ru](mailto:darbor2004@mail.ru)