Управление доступом заданий к вычислительным ресурсам кластерной системы

М.Я. Агаларов, Я.М. Агаларов

Аннотация. Рассмотрена задача повышения эффективности планировщика заданий кластерной вычислительной системы с неопределенным временем выполнения заданий и не разделяемыми вычислительными ресурсами. Приведены результаты вычислительных экспериментов с использованием компьютерной модели кластерной системы и проведен анализ зависимости интенсивности потока выполненных заданий от различных процедур управления доступом заданий к вычислительным ресурсам системы.

Ключевые слова: кластерная вычислительная система, планировщик заданий, управление доступом заданий, динамическое программирование.

Введение

Результаты вычислительных экспериментов и опыт эксплуатации существующих кластерных вычислительных систем (КВС) показывают, что бесконтрольный допуск заданий на выполнение приводит к тому, что большая часть процессоров занимается короткими заданиями (заданиями, требующими для выполнения один вычислительный ресурс), отсюда возникает фрагментация ресурсов. Длинные задания (задания, требующие для выполнения два и более вычислительных ресурсов одновременно) из-за нехватки необходимого объема ресурсов не могут долго стартовать – возникнет эффект «зависания» (starvation) [1]. Одним из способов увеличения интенсивности потока успешно выполненных длинных заданий является назначение им приоритета перед короткими заданиями при доступе к ресурсам. С другой стороны, приоритетный доступ длинных заданий может резко снизить суммарную интенсивность успешно выполненных заданий. В данной работе рассматривается один из способов организации приоритетного доступа длинных заданий к ресурсам, ограничивающий снижение суммарной интенсивности выходного потока.

В настоящее время разработан ряд эффективных алгоритмов управления заданиями (например, алгоритм планирования BackFill в планировщике MAUI [2], равномерный планировщик и планировщик вычислительной мощности в системе Hadoop [3], алгоритмы, реализованные в системе СУПЗ МВС-1000М [4]), использующих объем запрашиваемых вычислительных ресурсов и время счета. В качестве основных показателей эффективности перечисленных алгоритмов приняты пропускная способность КВС и время пребывания задания в КВС.

В системах с неопределенным временем выполнения заданий невозможно вычислить моменты освобождения вычислительных ресурсов до завершения задания, поэтому в таких системах алгоритмы указанного типа не применимы и актуальна задача разработки эффективных алгоритмов, не требующих знания времени счета заданий. Исследуемые ниже алгоритмы управления доступом заданий предлагаются нами для планировщиков специализированных кластерных систем с пакетной обработкой, в которых поступающие задания имеют неопределенное время выполнения и могут различаться по количеству требуемых не разделяемых вычислительных ресурсов, по приоритетам, по типу требуемых вычислительных ресурсов [5]. Для управления доступом заданий в кластерных системах с пакетной обработкой могут быть применены пороговые методы (аналогично методам, используемым успешно в коммутаторах (маршрутизаторах) телекоммуникационных сетей связи) с выделением для каждого потока (для некоторых потоков) части ресурсов, доступных заданиям только этого потока, и определением порогов для числа заданий каждого потока, находящихся одновременно в общедоступной части КВС. Последующие разделы данной статьи посвящены разработке и исследованию пороговых процедур управления доступом заданий в специализированной КВС и их сравнительному анализу.

1. Модель системы и постановка задачи

В качестве модели КВС рассматривается СМО с M различными пуассоновскими потоками заданий и I группами (типами) по R_i приборов в i-й группе ($i -$ го типа), $i = 1, \dots, I$. Пусть потоки заданий пронумерованы числами 1, …, M, типы приборов и соответствующие потоки коротких заданий числами $1, \dots, I, I \leq M$.

Введены следующие предположения.

1) Интенсивности поступающих на СМО потоков равны $0 < \lambda_i < \infty$, $i = 1, \dots, M$. Задание потока с номером i таким, что $i \leq I$, может занимать один любой свободный прибор $i -$ го типа. Задания остальных потоков (с номерами $i = I + 1, \dots, M$) могут требовать для выполнения одновременно нескольких приборов определенного типа, причем обязательно различных типов.

2) Производительность приборов, длины заданий и процесс выполнения заданий таковы, что время выполнения задания в системе является случайной величиной с экспоненциальным распределением вероятностей с параметром μ.

3) К приборам $i -$ го типа, $i = 1, \dots, I$ допускается очередь только i-заданий ограниченной длины с пороговым значением w_i.

4) Если в момент поступления короткого i-задания ($i = 1, \dots, I$) в очереди к приборам $i -$ го типа w_i заданий, она сразу покидает узел, в противном случае при наличии свободного прибора соответствующего типа сразу поступает на выполнение, а при отсутствии – занимает место в очереди.

5) Если в момент поступления длинного i-задания ($i = I + 1, \dots, M$) хотя бы у одного требуемого типа приборов очередь переполнена или все приборы заняты длинными заданиями (тип приборов не доступен для длинного задания), оно сразу покидает систему.

6) Если в момент поступления длинного задания нет ограничений, указанных в пункте 5 (все требуемые типы приборов доступны для длинного задания), то оно допускается или не допускается на выполнение в зависимости от текущего состояния системы (числа заданий каждого типа в системе).

7) Если длинное задание допускается в систему и все приборы некоторого требуемого типа заняты, то одно из коротких заданий, занимающее требуемый прибор, освобождает его и занимает очередь к соответствующим приборам в виде отдельного задания. Сразу после этого поступившее длинное задание занимает по одному свободному прибору требуемого типа.

8) Задания одного типа становятся в очередь в порядке поступления в ВС.

9) Принятое в ВС задание дожидается полного выполнения.

10) Выполненное задание освобождает одновременно все занятые им приборы и покидает систему навсегда.

11) Известна плата за выполнение i-задания, $i = 1, \dots, M$.

Введем обозначения:

$d_i > 0$ – плата за выполнение i-задания, $i = 1, \dots, M$;

$R_i -$ число приборов $i -$ го типа, $i = 1, \dots, I$;

k_i – число i-заданий в системе в некоторый момент времени, $i = 1, \dots, M$;

$\bar{k} = k_1, \dots, k_M$ − вектор состояния системы;

c_{ij} − число приборов i − го типа, требующихся для выполнения i-задания (заметим, что, если приборы i − го типа не требуются для выполнения i-задания, то $c_{ij} = 0$, иначе $c_{ij} = 1$);

$z_i(\bar{k}) = \sum_{j=1}^{M} c_{ij} k_j$ − суммарное число заданий, занимающих приборы i − го типа или находящихся в очередях к ним;

$\Omega = \left\{\bar{k}: 0 \le k_i \le R_i + w_i \text{ при } i = 1, \dots, I \text{ и } 0 \le k_i \le \min_{j:c_{ji}=1} R_j \text{ при } i = I+1, \dots, M\right\}$ − пространство состояний системы (множество всех возможных состояний системы);

$v_i = R_i - \sum_{j=I+1}^{M} c_{ij} k_j$ − число приборов i − го типа, не занятых длинными заданиями;

$\Omega_i = \{\bar{k}: \bar{k} \epsilon \Omega, 0 \le k_i < R_i + w_i\}$ − множество состояний, при которых в системе есть хотя бы один свободный прибор для i-заданий, $i = 1, \dots, I$;

$\Omega_i = \{\bar{k}: \bar{k} \epsilon \Omega_j, v_j > 0 \text{ для всех } j: c_{ji} = 1\}$ − множество состояний, при которых в системе есть требуемые доступные типы приборов i-заданий, $i = I+1, \dots, M$;

$\bar{\Omega}_i = \{\bar{k}: \bar{k} \epsilon \Omega, k_i = R_i + w_i\}$ − множество состояний, при которых в системе нет требуемого числа приборов для i-заданий, $i = 1, \dots, I$;

$\bar{\Omega}_i = \{\bar{k}: \bar{k} \epsilon \bar{\Omega}_j \text{ или } v_j = 0 \text{ хотя бы для одного } j: c_{ji} = 1\}$ − множество состояний, при которых в системе хотя бы один требуемый тип приборов не доступен для i-заданий, $i = I+1, \dots, M$;

λ_i − интенсивность i − го потока заданий.

Пусть $\bar{s}(\bar{k}) = \left(s_1(\bar{k}), \dots, s_M(\bar{k})\right)$, где каждая компонента $s_i(\bar{k})$ может принимать одно из значений 0 или 1, если $\bar{k} \in \Omega_i$ и значение 1, если $\bar{k} \in \bar{\Omega}_i$. Пусть задан набор $\bar{s} = \{\bar{s}(\bar{k}),\ \bar{k} \in \Omega\}$. План управления доступом к ресурсам ВК определим с помощью целочисленной функции $\bar{s}(\bar{k})$ следующим образом. Если в момент поступления i-задания система находится в состоянии $\bar{k}$, то она принимается в систему в случае $s_i(\bar{k}) = 0$ и не принимается при $s_i(\bar{k}) = 1$, $i = 1, \dots, M$. Обозначим через $F(\bar{s})$ − среднее суммарного дохода (предполагаемой платы за выполнение заданий), теряемого системой в единицу времени из-за отсутствия в системе требуемых свободных приборов или недопуска в систему заданий. Обозначим через S множество всех возможных наборов $\bar{s}$.

Задача выбора оптимального плана управления доступом состоит в том, чтобы найти набор $\bar{s}' \in S$, при котором

$$F(\bar{s}') = \min_{\bar{s} \in S} F(\bar{s}) \qquad (1)$$

2. Метод решения задачи

Из введенных выше предположений следует, что для каждого фиксированного набора планов $\bar{s} \in S$ процесс перехода рассматриваемой СМО из одного состояния в другое описывается марковским процессом [6]. Для решения задачи (1) воспользуемся аппаратом теории марковских процессов принятия решений, а именно, итерационным алгоритмом динамического программирования, называемым итерационным алгоритмом Ховарда [7, 8]. В терминах указанной теории фиксированный набор $\bar{s}$ называется политикой (в данной задаче управления доступом), а последовательность политик, выбираемых на каждом шаге (в моменты поступления заданий) – стратегией. Стратегия называется стационарной, если на каждом шаге выбирается одна и та же политика. В данной главе рассматривается только стационарные стратегии, поэтому для удобства изложения слово «стационарная» будем опускать.

Обозначим через $\lambda_i(\bar{k})$ − интенсивность поступающего в систему потока i-заданий в состоянии $\bar{k}$ и $\mu_i(\bar{k})$ − интенсивность обслуженного потока -заданий в состоянии $\bar{k}$. Тогда из введенных предположений и определения стратегии $\bar{s}$ следует, что для любого $\bar{k} \in \Omega$ имеет место равенства:

$$\lambda_i(\bar{k}) = \begin{cases} 0, \text{если } s_i(\bar{k}) = 1, \\ \lambda_i, \text{если } s_i(\bar{k}) = 0, \end{cases}$$

$$\mu_i(\bar{k}) = \begin{cases} \mu v_i, \text{если } k_i > v_i, 1 \le i \le I, \\ \mu k_i, \text{если } k_i \le v_i \text{ и } 1 \le i \le I \text{ или } I+1 \le i \le M, \end{cases} \quad (2)$$

$i = 1, \dots, M.$

Как видно, в рассматриваемом марковском процессе переход системы из одного состояния в другое может произойти только в двух случаях: при поступлении задания или при окончании выполнения задания. Инфинитезимальная матрица (матрица интенсивностей перехода) $\Phi^{\bar{s}} = (\varphi^{\bar{s}}(\bar{k},\bar{l}))$ данного марковского процесса при стратегии $\bar{s}$ имеет следующий вид:

$$\varphi^{\bar{s}}(\bar{k},\bar{l}) = \begin{cases} \lambda_i \text{ при } \bar{k} \in \Omega_i, \bar{l} = \bar{l} + \bar{1}_i, s_i(\bar{k}) = 0, \\ \mu_i(\bar{k}) \text{ при } \bar{k} \in \Omega, k_i \ge 1, \bar{l} = \bar{l} - \bar{1}_i, \\ 0, \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (3)$$

если $\bar{k} \ne \bar{l}$, где $\varphi^{\bar{s}}(\bar{k},\bar{l})$ – интенсивность перехода из состояния $\bar{k}$ в $\bar{l}$, вызванного поступлением или окончанием выполнения i-задания, $\bar{1}_i$ – вектор-столбец размера M, у которого -я компонента равна 1, а остальные равны 0, $i = 1, \dots, M$, $\bar{k} \in \Omega, \bar{l} \in \Omega$. По определению инфинитезимальной матрицы

$$\varphi^{\bar{s}}(\bar{k},\bar{k}) = -\sum_{\bar{l}:\bar{l}\ne\bar{k}} \varphi^{\bar{s}}(\bar{k},\bar{l}), \bar{k} \in \Omega.$$

Отметим, что рассматриваемый марковский процесс всегда имеет стационарные вероятности состояний (это следует из введенных предположений и типа рассматриваемой СМО – неприводимая марковская цепь и конечное число состояний) [6].

Суть используемой ниже итерационной процедуры Ховарда заключается в следующем. Пусть $\bar{s}^0$ – заданная стратегия, $q(\bar{s},\bar{k})$ – норма стоимостных потерь в состоянии $\bar{k}$ (теряемый в единицу времени доход, когда система находится в состоянии $\bar{k}$) при стратегии $\bar{s}$. Согласно итерационной процедуре Ховарда для улучшения стратегии $\bar{s}^0$ достаточно найти решение $\bar{s}'(\bar{k})$ такое, чтобы хотя бы в одном состоянии $\bar{k}$ выполнялось условие:

$$q(\bar{s}',\bar{k}) + \sum_{\bar{l}\in\Omega} \varphi^{\bar{s}'}(\bar{k},\bar{l}) V_{\bar{l}} < F(\bar{s}^0), \quad (4)$$

где $F(\bar{s}^0)$ и $V_{\bar{l}}$ ($\bar{l} \in \Omega$) являются решением системы уравнений

$$q(\bar{s}^0,\bar{k}) + \sum_{\bar{l}\in\Omega} \varphi^{\bar{s}^0}(\bar{k},\bar{l}) V_{\bar{l}} = F(\bar{s}^0). \quad (5)$$

где заранее полагается $V_{\bar{0}} = 0$, $\bar{0}$ – нулевой вектор-столбец размера M, соответствующий нулевому состоянию системы. Кроме того, если $\bar{s}'$ – улучшенная стратегия, то:

$$F(\bar{s}') - F(\bar{s}^0) = \sum_{\bar{k}\in\Omega} \pi_{\bar{k}}^{\bar{s}'} \Delta_{\bar{k}},$$

где $\Delta_{\bar{k}} = q(\bar{s}^0,\bar{k}) + \sum_{\bar{l}\in\Omega} \varphi^{\bar{s}^0}(\bar{k},\bar{l}) V_{\bar{l}} - q(\bar{s}',\bar{k}) + \sum_{\bar{l}\in\Omega} \varphi^{\bar{s}'}(\bar{k},\bar{l}) V_{\bar{l}}$,

$\pi_{\bar{k}}^{\bar{s}'}$ – стационарные вероятности нахождения системы в состоянии $\bar{k}$ при стратегии $\bar{s}'$.

В дальнейшем всюду будем предполагать, что множество R включает только те стратегии, при которых рассматриваемый марковский процесс имеет только одно эргодическое множество состояний.

Возьмем в качестве $\bar{s}^0 = (s_1^0(\bar{k}), \dots, s_M^0(\bar{k}))$ стратегию, которая удовлетворяет следующим условиям: $s_i^0(\bar{k}) = 0$ при $\bar{k} \in \Omega_i$ и $\sum_{j=1}^{I} c_{ij} = 1$, $s_i^0(\bar{k}) = 1$ при $\bar{k} \in \bar{\Omega}_i$ и $\sum_{j=1}^{I} c_{ij} > 1$, $i = 1, \dots, M$. Заметим, что при стратегии $\bar{s}^0$ ресурсы ВК доступны только заданиям потоков $i = 1, \dots, M$, так как

$c_{ii} = 1$ при $i = 1, \dots, I$ и $c_{ij} = 0$ при $i = I + 1, \dots, M$, т.е. происходит полное разделение ресурсов между потоками $i = 1, \dots, I$, остальным потокам ресурсы не выделяются. В терминах рассматриваемой СМО при стратегии $\bar{s}^0$ в систему допускаются все задания, требующие для выполнения только один прибор, а задания, требующие одновременно более одного прибора, не допускаются в систему.

Из (3) следует, что при $\bar{s} = \bar{s}^0$ интенсивности $\varphi^{\bar{s}}(\bar{k}, \bar{l})$ при $\bar{k} \neq \bar{l}$ имеют вид:

$$\varphi^{\bar{s}^0}(\bar{k}, \bar{l}) = \begin{cases} \lambda_i \text{ при } \bar{k} \in \Omega_i, \bar{l} = \bar{l} + \bar{1}_i, s_i(\bar{k}) = 0, i = 1, \dots, I, \\ \mu_i(\bar{k}) \text{ при } \bar{k} \in \Omega, k_i \geq 1, \bar{l} = \bar{l} - \bar{1}_i, \\ 0, \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (6)$$

Получим выражения для нормы стоимостных потерь $q(\bar{s}, \bar{k})$ и функции $F(\bar{s}^0)$. Заметим, что при $\bar{s} = \bar{s}^0$ каждые i-й тип приборов и i-й поток заданий образуют СМО типа $M/M/R_i/w_i$ с ограниченной очередью. Тогда из определения рассматриваемых стратегий следует справедливость выражений:

$$q(\bar{s}, \bar{k}) = \sum_{i:\bar{k} \in \bar{\Omega}_i} d_i \lambda_i + \sum_{i:\bar{k} \in \Omega_i, s_i(\bar{k}) = 1} d_i \lambda_i, \bar{s} \in S, \bar{k} \in \Omega,$$

$$q(\bar{s}^0, \bar{k}) = \sum_{i=I+1}^{M} d_i \lambda_i + \sum_{i:z_i = R_i + w_i, i=1,..,I} d_i \lambda_i, \bar{k} \in \Omega, \quad (7)$$

$$F(\bar{s}^0) = \sum_{i=I+1}^{M} d_i \lambda_i + \sum_{i=1}^{I} d_i \lambda_i E_{R_i + w_i}(\rho_i),$$

где $E_{R_i + w_i}(\rho_i)$ – формула Эрланга [9] для системы $M/M/R_i/w_i$ с нагрузкой $\rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu}$,

$$E_{R_i + w_i}(\rho_i) = C_0 \frac{\rho_i^{R_i + w_i}}{R_i! \, R_i^{w_i}}, i = 1, \dots, I,$$

$$C_0 = \sum_{j=0}^{R_i} \frac{\rho_i^j}{j!} + \sum_{j=R_i+1}^{R_i + w_i} \frac{\rho_i^j}{R_i! \, R_i^{j - R_i}}.$$

Найдем решение системы уравнений (5) при $\bar{s} = \bar{s}^0$. Обозначим для краткости $E_i = E_{R_i + w_i}(\rho_i)$. Для стратегии $\bar{s}^0$ из (5), подставив (3) и (7), получим систему уравнений относительно неизвестных $V_{\bar{k}}$ $(\bar{k} \in \Omega)$:

$$\sum_{i=1}^{I} d_i \lambda_i E_i + \sum_{i=I+1}^{M} d_i \lambda_i = \sum_{i=I+1}^{M} d_i \lambda_i + \sum_{i:z_i(\bar{k}) = R_i + w_i, i=1,..,I} d_i \lambda_i +$$
$$+ \sum_{i:z_i(\bar{k}) < R_i + w_i, i=1,..,I} \lambda_i V_{\bar{k} + \bar{1}_i} + \sum_{i:k_i \geq 1} \mu_i(\bar{k}) V_{\bar{k} - \bar{1}_i} -$$
$$- \left(\sum_{i:z_i(\bar{k}) < R_i + w_i, i=1,..,I} \lambda_i + \sum_{i:k_i \geq 1} \mu_i(\bar{k}) \right) V_{\bar{k}}, \bar{k} \in \Omega. \quad (8)$$

Система уравнений (4.8) эквивалентна системе уравнений:

$$\sum_{i=1}^{I} d_i \lambda_i E_i = \sum_{i:z_i(\bar{k}) = R_i + w_i, i=1,..,I} d_i \lambda_i +$$
$$+ \sum_{i:z_i(\bar{k}) < R_i + w_i, i=1,..,I} \lambda_i V_{\bar{k} + \bar{1}_i} + \sum_{i:k_i \geq 1} \mu_i(\bar{k}) V_{\bar{k} - \bar{1}_i} -$$

$$-\left(\sum_{i:z_i(\bar{k})<R_i+w_i, i=1,..,I} \lambda_i + \sum_{i:k_i\geq 1} \mu_i(\bar{k})\right) V_{\bar{k}}, \bar{k} \in \Omega. \quad (9)$$

Докажем следующее утверждение.

Утверждение. Система уравнений (9) имеет решение вида

$$V_{\bar{k}} = \sum_{i=1}^{I} A_{z_i(\bar{k})},\ A_{z_i(\bar{k})} = A_{z_i(\bar{k})-1} + b_{z_i(\bar{k})}, \quad (10)$$

$$b_{z_i(\bar{k})} = \frac{\mu_{z_i(\bar{k})-1}}{\lambda_i} b_{z_i(\bar{k})-1} + d_i E_i, \quad (11)$$

$$A_{z_i(\bar{k})} = b_{z_i(\bar{k})} = 0 \text{ при } z_i(\bar{k}) = 0,$$
$$\mu_{z_i(\bar{k})} = \begin{cases} \mu z_i(\bar{k}) \text{ при } z_i(\bar{k}) < R_i, \\ \mu R_i \text{ при } z_i(\bar{k}) \geq R_i, \end{cases}$$
$$\bar{k} \in \Omega, z_i(\bar{k}) = 1, \dots, R_i + z_i(\bar{k}), i = 1, \dots, I.$$

Доказательство. Приведем уравнения (9) к виду

$$\sum_{i=1}^{I} \Big[d_i \lambda_i E_i - d_i \lambda_i \chi\big(z_i(\bar{k}) - R_i - w_i\big) -$$
$$-\lambda_i \left(1 - \chi\big(z_i(\bar{k}) - R_i - w_i\big)\right) \left(V_{\bar{k}+\bar{1}_i} - V_{\bar{k}}\right) + \chi(k_i)\mu_i(\bar{k})\big(V_{\bar{k}} - V_{\bar{k}-\bar{1}_i}\big)\Big] +$$
$$+ \sum_{i=I+1}^{M} \chi(k_i)\mu_i(\bar{k}) \left(V_{\bar{k}} - V_{\bar{k}-\bar{1}_i}\right) = 0, \bar{k} \in \Omega,$$

где $\chi(t)$ − функция Хевисайда, $\chi(t) = \begin{cases} 0, t < 0, \\ 1, t \geq 0. \end{cases}$

Подставив $V_{\bar{k}} = \sum_{i=1}^{I} A_{z_i(\bar{k})}$ в последнее уравнение, получим

$$\sum_{i=1}^{I} \Big[d_i \lambda_i E_i - d_i \lambda_i \chi\big(z_i(\bar{k}) - R_i - w_i\big) -$$
$$-\lambda_i \left(1 - \chi\big(z_i(\bar{k}) - R_i - w_i\big)\right) \left(A_{z_i(\bar{k})+1} - A_{z_i(\bar{k})}\right) +$$
$$+\chi(k_i)\mu_i(\bar{k})\big(A_{z_i(\bar{k})} - A_{z_i(\bar{k})-1}\big)\Big] +$$
$$+ \sum_{i=I+1}^{M} \chi(k_i)\mu_i(\bar{k}) \sum_{j=1}^{I} c_{ji} \left(A_{z_j(\bar{k})} - A_{z_j(\bar{k})-1}\right) = 0, \bar{k} \in \Omega,$$

что, как следует из (2), эквивалентно системе уравнений:

$$\sum_{i=1}^{I} \Big[d_i \lambda_i E_i - d_i \lambda_i \chi\big(z_i(\bar{k}) - R_i - w_i\big) -$$
$$-\lambda_i \left(1 - \chi\big(z_i(\bar{k}) - R_i - w_i\big)\right) \left(A_{z_i(\bar{k})+1} - A_{z_i(\bar{k})}\right) +$$
$$+ \chi\left(z_i(\bar{k})\right) \mu\left(z_i(\bar{k})\right) \left(A_{z_i(\bar{k})} - A_{z_i(\bar{k})-1}\right)\Big] = 0, \quad (12)$$

где $\mu\left(z_i(\bar{k})\right) = \mu_i(\bar{k}) + \sum_{j=I+1}^{M} c_{ij}\, \mu_j(\bar{k}) = \begin{cases} \mu R_i, \text{если } z_i(\bar{k}) > R_i, \\ \mu z_i(\bar{k}), \text{если } z_i(\bar{k}) < R_i, \end{cases}$

$1 \leq i \leq I, \bar{k} \in \Omega.$

Заменив в (12) $(A_{z_i(\bar{k})} - A_{z_i(\bar{k})-1})$ на $b_{z_i(\bar{k})}$, получим систему уравнений относительно неизвестных $b_{z_i(\bar{k})}$ $\left(z_i(\bar{k}) = 1, \dots, R_i + w_i, i = 1, \dots, I\right)$:

$$\sum_{i=1}^{I}\Big[d_i\lambda_i E_i - d_i\lambda_i\chi\big(z_i(\bar{k}) - R_i - w_i\big) -$$

$$-\lambda_i\left(1 - \chi\big(z_i(\bar{k}) - R_i - w_i\big)\right) b_{z_i(\bar{k})+1} + \chi\left(z_i(\bar{k})\right)\mu\left(z_i(\bar{k})\right) b_{z_i(\bar{k})}\Big] = 0,$$

$\bar{k} \in \Omega$.

Фиксировав i, решим следующую систему уравнений относительно неизвестных $b_{z_i(\bar{k})}$ $\left(z_i(\bar{k}) = 1, \dots, R_i + w_i\right)$:

$$d_i\lambda_i E_i - d_i\lambda_i\chi\big(z_i(\bar{k}) - R_i - w_i\big) - \lambda_i\left(1 - \chi\big(z_i(\bar{k}) - R_i - w_i\big)\right) b_{z_i(\bar{k})+1} + \chi\left(z_i(\bar{k})\right)\mu\left(z_i(\bar{k})\right) b_{z_i(\bar{k})} = 0, \quad (13)$$

$z_i(\bar{k}) = 1, \dots, R_i + w_i$.

Легко проверить, что решение системы (13) имеет вид

$$b_{z_i(\bar{k})} = d_i E_i + \frac{\mu\big(z_i(\bar{k}) - 1\big)}{\lambda_i} b_{z_i(\bar{k})-1}, z_i(\bar{k}) = 1, \dots, R_i + w_i,$$

где $b_{z_i(\bar{k})} = 0$ при $z_i(\bar{k}) = 0$.

Положив для всех $i = 1, \dots, I$ $A_{z_i(\bar{k})} = 0$ при $z_i(\bar{k}) = 0$, $A_{z_i(\bar{k})} = A_{z_i(\bar{k})-1} + b_{z_i(\bar{k})}$ при $z_i(\bar{k}) = 1, \dots, R_i + w_i$, получим, что $V_{\bar{k}} = \sum_{i=1}^{I} A_{z_i(\bar{k})} -$ решение системы уравнений (9). Утверждение доказано.

Следствие. Параметры $b_{z_i(\bar{k})}$ вычисляются по формуле

$$b_{z_i(\bar{k})} = \frac{d_i E_{R_i+w_i}(\rho_i)}{E_{z_i(\bar{k})-1}(\rho_i)}, \quad (14)$$

где $E_{z_i(\bar{k})}(\rho_i)$ – первая формула Эрланга с $z_i(\bar{k})$ приборами и нагрузкой ρ_i в случае $z_i(\bar{k}) \le R_i$ и вторая формула Эрланга для системы с R_i приборами, накопителем емкости $z_i(\bar{k}) - R_i$ и нагрузкой ρ_i в случае $z_i(\bar{k}) - R_i > 0$, $z_i(\bar{k}) = 1, \dots, R_i + w_i, i = 1, \dots, I$. Доказательство справедливости формулы следует из следующих рассуждений. Фиксируем значение индекса i $(i = 1, \dots, I)$. При $z_i(\bar{k}) = 1$ из (11) следует $b_{z_i(\bar{k})} = d_i E_{R_i+w_i}(\rho_i) = \frac{d_i E_{R_i+w_i}(\rho_i)}{E_0(\rho_i)}$, так как $E_{z_i(\bar{k})}(\rho_i) = 0$ при $z_i(\bar{k}) = 0$. Пусть для произвольного $z_i(\bar{k}) < R_i + w_i$ формула (4.14) верна. Тогда для $b_{z_i(\bar{k})+1}$ по формуле (11) получим

$$b_{z_i(\bar{k})+1} = d_i E_i + \frac{\mu\left(z_i(\bar{k})\right)}{\lambda_i} b_{z_i(\bar{k})} = d_i E_i \left[1 + \frac{\sum_{j=0}^{R_i}\frac{\rho_i{}^j}{j!} + \sum_{j=R_i+1}^{z_i(\bar{k})}\frac{\rho_i{}^j}{R_i!\,R_i{}^{j-R_i}}}{\frac{\lambda_i}{\mu\left(z_i(\bar{k})\right)}\frac{\rho_i{}^{z_i(\bar{k})}}{R_i!\,R_i{}^{z_i(\bar{k})-R_i}}}\right] =$$

$$= d_i E_i \left[1 + \frac{\sum_{j=0}^{R_i}\frac{\rho_i{}^j}{j!} + \sum_{j=R_i+1}^{z_i(\bar{k})}\frac{\rho_i{}^j}{R_i!\,R_i{}^{j-R_i}}}{\frac{\rho_i{}^{z_i(\bar{k})+1}}{R_i!\,R_i{}^{z_i(\bar{k})-R_i+1}}}\right] = \frac{d_i E_{R_i+w_i}(\rho_i)}{E_{z_i(\bar{k})}(\rho_i)}.$$

Точно также для $0 \le z_i(\bar{k}) < R_i$ получим

$$b_{z_i(\bar{k})+1} = d_i E_i + \frac{\mu\left(z_i(\bar{k})\right)}{\lambda_i} b_{z_i(\bar{k})} = d_i E_i \left[1 + \frac{\sum_{j=1}^{z_i(\bar{k})} \frac{\rho_i{}^j}{j!}}{\frac{\lambda_i}{\mu\left(z_i(\bar{k})\right)} \frac{\rho_i{}^{z_i(\bar{k})}}{z_i(\bar{k})!}}\right] =$$

$$= d_i E_i \left[1 + \frac{\sum_{j=1}^{z_i(\bar{k})} \frac{\rho_i{}^j}{j!}}{\frac{\rho_i{}^{z_i(\bar{k})+1}}{\left(z_i(\bar{k})+1\right)!}}\right] = \frac{d_i E_{R_i+w_i}(\rho_i)}{E_{z_i(\bar{k})}(\rho_i)}.$$

Тогда, как следует по индукции, формула (14) верна для всех $z_i(\bar{k}) = 1, \dots, R_i + w_i, i = 1, \dots, I.$

Найдем улучшенную стратегию. Рассмотрим левую часть неравенства (4) для некоторого фиксированного состояния $\bar{k}$. Подставив (3) и (7) в левую часть (4), имеем:

$$q(\bar{s}, \bar{k}) + \sum_{\bar{l} \in \Omega} \varphi^{\bar{s}}(\bar{k}, \bar{l})\, V_{\bar{l}} = \sum_{i:\bar{k} \in \bar{\Omega}_i} d_i \lambda_i +$$

$$+ \sum_{i:\bar{k} \in \Omega_i, s_i(\bar{k})=1} d_i \lambda_i + \sum_{i:\bar{k} \in \Omega_i, s_i(\bar{k})=0} \lambda_i\, V_{\bar{k}+\bar{1}_i} + \sum_{i:k_i \ge 1} \mu_i(\bar{k})\, V_{\bar{k}-\bar{1}_i} -$$

$$-\left(\sum_{i:\bar{k} \in \Omega_i, s_i(\bar{k})=0} \lambda_i + \sum_{i:k_i \ge 1} \mu_i(\bar{k})\right) V_{\bar{k}} = \sum_{i:\bar{k} \in \bar{\Omega}_i} d_i \lambda_i + \sum_{i:\bar{k} \in \Omega_i, s_i(\bar{k})=1} d_i \lambda_i +$$

$$+ \sum_{i:\bar{k} \in \Omega_i, s_i(\bar{k})=0} d_i \lambda_i - \sum_{i:\bar{k} \in \Omega_i, s_i(\bar{k})=0} d_i \lambda_i +$$

$$+ \sum_{i:\bar{k} \in \Omega_i, s_i(\bar{k})=0} \lambda_i \left(V_{\bar{k}+\bar{1}_i} - V_{\bar{k}}\right) - \sum_{i:k_i \ge 1} \mu_i(\bar{k}) \left(V_{\bar{k}} - V_{\bar{k}-\bar{1}_i}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{M} d_i \lambda_i - \sum_{i:\bar{k} \in \Omega_i, s_i(\bar{k})=0} d_i \lambda_i +$$

$$+ \sum_{i:\bar{k} \in \Omega_i, s_i(\bar{k})=0} \lambda_i \left(V_{\bar{k}+\bar{1}_i} - V_{\bar{k}}\right) - \sum_{i:k_i \ge 1} \mu_i(\bar{k}) \left(V_{\bar{k}} - V_{\bar{k}-\bar{1}_i}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{M} d_i \lambda_i + \sum_{i:\bar{k} \in \Omega_i, s_i(\bar{k})=0} \lambda_i \left(V_{\bar{k}+\bar{1}_i} - V_{\bar{k}} - d_i\right) -$$

$$- \sum_{i:k_i \ge 1} \mu_i(\bar{k}) \left(V_{\bar{k}} - V_{\bar{k}-\bar{1}_i}\right). \quad (15)$$

Найдем стратегию, при которой (15), т. е. левая часть (4), достигает минимума. Заметим, что в (15) все суммы, кроме второй, не зависят от стратегии. Следовательно, левая часть (4.4) и выражение

$$\sum_{i:\bar{k} \in \Omega_i, s_i(\bar{k})=0} \lambda_i \left(V_{\bar{k}+\bar{1}_i} - V_{\bar{k}} - d_i\right) \quad (16)$$

достигает минимума при одной и той же стратегии (одних и тех же стратегиях). Очевидно, (16) принимает минимальное значение при стратегии $\bar{s}'$, такой, что:

$$\bar{s}_i'(\bar{k}) = \begin{cases} 0, \text{если } V_{\bar{k}+\bar{1}_i} - V_{\bar{k}} < d_i, \\ 1, \text{если } V_{\bar{k}+\bar{1}_i} - V_{\bar{k}} \ge d_i, \end{cases}$$

$\bar{k} \in \Omega_i, i = 1, \dots, M.$

Как следует из (14), $b_{z_i(\bar{k})} < d_i, \bar{k} \in \Omega_i, i = 1, \dots, I$. Следовательно, (16) достигает минимума на стратегии $\bar{s}'$ такой, что

$$\bar{s}'_i(\bar{k}) = 0 \text{ при } \bar{k} \in \Omega_i \text{ и } i = 1, \dots, I, \ \bar{s}'_i(\bar{k}) = \begin{cases} 0, \text{если } d_i(\bar{k}) \le d_i, \\ 1, \text{если } d_i(\bar{k}) > d_i, \end{cases} \tag{17}$$

при $\bar{k} \in \Omega_i, i = I + 1, \dots, M$, где $d_i(\bar{k}) = \sum_{j=1}^{I} c_{ji} b_{z_j(\bar{k})+1}$ – функции стоимости потерь от предоставления приборов для i-задания.

Согласно этой стратегии:

– короткое задание при наличии свободного места в накопителе приборов требуемого типа допускается в систему;

– длинное задание при наличии требуемых доступных типов приборов допускается в систему, если доход за обслуживание пользователя выше значения соответствующей функции стоимости (величины $d_i(\bar{k})$), в противном случае получает отказ.

Покажем на примере существование лучшей стратегии $\bar{s}'$ такой, что $F(\bar{s}') < F(\bar{s}^0)$. Как следует из итерационной процедуры Ховарда $F(\bar{s}') < F(\bar{s}^0)$, если хотя бы для одного $\bar{k}$ выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^{M} d_i \lambda_i + \sum_{i:\bar{k}\in\Omega_i, s_i(\bar{k})=0} \lambda_i \left(V_{\bar{k}+\bar{1}_i} - V_{\bar{k}} - d_i\right) - \\ - \sum_{i:k_i\ge 1} \mu_i(\bar{k}) \left(V_{\bar{k}} - V_{\bar{k}-\bar{1}_i}\right) < \sum_{i=1}^{I} d_i \lambda_i E_i + \sum_{i=I+1}^{M} d_i \lambda_i. \tag{18}$$

Проведем эквивалентные преобразования данного неравенства:

$$\sum_{i=1}^{I} \left(V_{\bar{k}+\bar{1}_i} - V_{\bar{k}}\right) + \sum_{i\in\overline{(I+1,M)}:\bar{k}\in\Omega_i, s_i(\bar{k})=0} \lambda_i \left(V_{\bar{k}+\bar{1}_i} - V_{\bar{k}} - d_i\right) - \\ - \sum_{i:k_i\ge 1} \mu_i(\bar{k}) \left(V_{\bar{k}} - V_{\bar{k}-\bar{1}_i}\right) < \sum_{i=1}^{I} d_i \lambda_i E_i,$$

$$\sum_{i=1}^{I} \lambda_i b_{z_i(\bar{k})+1} + \sum_{i\in\overline{(I+1,M)}:\bar{k}\in\Omega_i, s_i(\bar{k})=0} \lambda_i \left(V_{\bar{k}+\bar{1}_i} - V_{\bar{k}} - d_i\right) - \\ - \sum_{i:k_i\ge 1} \mu_i(\bar{k}) \sum_{j=1}^{I} c_{ji} b_{z_j(\bar{k})+1} < \sum_{i=1}^{I} d_i \lambda_i E_i,$$

$$\sum_{i=1}^{I} \lambda_i b_{z_i(\bar{k})+1} + \sum_{i\in\overline{(I+1,M)}:\bar{k}\in\Omega_i, s_i(\bar{k})=0} \lambda_i \left(V_{\bar{k}+\bar{1}_i} - V_{\bar{k}} - d_i\right) - \\ - \sum_{i=1}^{I} \mu\left(z_i(\bar{k})\right) b_{z_j(\bar{k})} < \sum_{i=1}^{I} d_i \lambda_i E_i.$$

Выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^{I} \lambda_i b_{z_i(\bar{k})+1} - \sum_{i=1}^{I} \mu\left(z_i(\bar{k})\right) b_{z_j(\bar{k})} - \sum_{i=1}^{I} d_i \lambda_i E_i = 0,$$

Это следует из того, что

$$\sum_{i=1}^{I}\left[\lambda_i b_{z_i(\bar{k})+1} - \mu\left(z_i(\bar{k})\right) b_{z_j(\bar{k})} - d_i\lambda_i E_i\right] = 0,$$

которое в свою очередь следует из равенств (9).

$$\lambda_i b_{z_i(\bar{k})+1} - \mu\left(z_i(\bar{k})\right) b_{z_j(\bar{k})} - d_i\lambda_i E_i = 0, i = 1, \dots, I.$$

Следовательно, (18) эквивалентно неравенству

$$\sum_{i\in(\overline{I+1,M}):\bar{k}\in\Omega_i, s_i(\bar{k})=0} \lambda_i\left(V_{\bar{k}+\bar{1}_i} - V_{\bar{k}} - d_i\right) < 0 \text{ или } \sum_{i\in(\overline{I+1,M}):\bar{k}\in\Omega_i, s_i(\bar{k})=0} \lambda_i\left(d_i(\bar{k}) - d_i\right) < 0. \quad (19)$$

Возьмем стратегию следующего вида:

$$\bar{s}_i'(\bar{k}) = \begin{cases} 0, \text{если } z_i(\bar{k}) < R_i + w_i, i \in (\overline{1,I}), \\ 1, \text{если } i = (\overline{I+1,M}), i \neq j', \\ 0, \text{если } i = j' \text{ и } z_l(\bar{k}) = 0 \text{ для всех } l \text{ таких, что } c_{lj'} = 1, \end{cases}$$

$i = 1, \dots, M$. Как видим, данная стратегия отличается от $\bar{s}^0$ только тем, что j'-задания допускаются в систему, когда все R_i приборов $i -$ го типа, требуемого для выполнения j'-задания, свободны. Тогда последнее неравенство эквивалентно неравенству:

$d_{j'}(\bar{k}) - d_{j'} < 0$ или $\sum_{i=1}^{I} c_{ij'} b_{z_i(\bar{k})+1} < d_{j'}$.

Пусть для простоты $M = 3, I = 2, c_{1j'} = c_{2j'} = 1$ для $j' = 3$, $R_1 = R_2 = 1$. Пусть $\bar{k} \in \Omega$ такое, что $z_1(\bar{k}) = 0, z_2(\bar{k}) = 0$. Использовав (10), перепишем последнее неравенство в виде

$$\frac{d_1 E_{1+w_1}(\rho_1)}{E_{z_1(\bar{k})}(\rho_1)} + \frac{d_2 E_{1+w_2}(\rho_2)}{E_{z_2(\bar{k})}(\rho_2)} < d_{j'}. \quad (20)$$

Так как $E_{z_1(\bar{k})}(\rho_1) = 1$ и $E_{z_2(\bar{k})}(\rho_1) = 1$ при $z_1(\bar{k}) = 0,\ z_2(\bar{k}) = 0$, получим

$$d_1\frac{{\rho_1}^{w_1+1}}{1+\rho_1+\dots+{\rho_1}^{w_1+1}} + d_2\frac{{\rho_2}^{w_2+1}}{1+\rho_2+\dots+{\rho_2}^{w_2+1}} < d_{j'}.$$

Как видим, например, при $\rho_1 = \rho_2 = \frac{2}{3}, d_1 = d_2 = d_{j'}$ и $w_1 = w_2 = 1$ последнее неравенство выполняется, т.е. в данном частном случае стратегия $\bar{s}'$ лучше, чем $\bar{s}^0$ в смысле $F(\bar{s}') < F(\bar{s}^0)$.

Приведем теперь пример, когда длинное задание не получит доступ в систему, если даже длины очередей к всем требуемым типам приборов меньше соответствующих пороговых значений. Пусть, как и в предыдущем примере, $M = 3, I = 2,\ c_{1j'} = c_{2j'} = 1$ для $j' = 3,\ R_1 = R_2 = 1,\ d_1 = d_2 = d_3,\ w_1 = w_2 = 1,\ \rho_1 = \rho_2 = \frac{2}{3}$. Тогда, рассчитав левую часть в (20), видим, что для этой системы при $z_1(\bar{k}) > 0,\ z_2(\bar{k}) > 0$ не выполняется неравенство (19), а точнее неравенство (19) выполняется тогда и только тогда, когда выполняется неравенство $z_1(\bar{k}) + z_2(\bar{k}) \le 1$, т.е. согласно улучшенной стратегии длинные задания допускаются в систему, если они застают систему в состоянии $\bar{k}$ таком, что $z_1(\bar{k}) + z_2(\bar{k}) \le 1$ и не допускаются, если $z_1(\bar{k}) + z_2(\bar{k}) > 1$.

Как выше было замечено, при стратегии $\bar{s}^0$ происходит полное разделение ресурсов вычислительного комплекса между потоками, при этом, возможно, некоторые потоки будут отклонены полностью. Напомним, что разделение ресурсов вычислительного комплекса (назначение значений параметров $R_i, w_i, c_{ij},\ i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, M, I \le M$) происходит таким образом, чтобы время выполнения в среднем было одинаковым, т.е. пропорциональным длинам заданий. Очевидно, данное условие ограничивает возможность применения предлагаемого способа управления доступом заданий при сильно различающихся контрольных временах выполнения различного типа заданий.

3. Вычислительные эксперименты

Ниже приведены результаты вычислительного эксперимента, полученные с использованием имитационной модели описанной выше системы, для следующих схем доступа к ресурсам:

- НЕДОП (полное разделение) – использует стратегию $\bar{s}^0$ (полное разделение вычислительных ресурсов между потоками $i = 1, \dots, I$);
- ПОЛДОП_1 (полный доступ) – использует стратегию, в которой

$$s_i(\bar{k}) = \begin{cases} 0 \text{ при } z_i(\bar{k}) < R_i + w_i, \; i \in (\overline{1, I}), \\ 0 \text{ при } c_{li} z_i(\bar{k}) < R_i + w_i \text{ для всех } l = 1, \dots, I, i \in (\overline{I+1, M}) \end{cases}$$

и выполняются в порядке очереди (свободные вычислительные ресурсы и накопители доступны всем заданиям);

- ПОЛДОП – частный случай процедуры ПОЛДОП_1, когда длинные задания не допускаются в очередь;
- ОПР – отличается от процедуры ПОЛДОП_1 только тем, что длинные задания в очереди имеют относительный приоритет перед короткими;
- АПР (абсолютный приоритет) – использует стратегию, в которой

$$s_i(\bar{k}) = \begin{cases} 0 \text{ при } z_i(\bar{k}) < R_i + w_i, \; i \in (\overline{1, I}), \\ 0 \text{ при } c_{li} z_i(\bar{k}) < R_i + w_i \text{ для всех } l = 1, \dots, I, i \in (\overline{I+1, M}) \end{cases}$$

и задания, $i = I + 1, \dots, M$, являются приоритетными (имеют абсолютный приоритет), неприоритетные после прерывания выполняются заново;

- ДПР (динамический приоритет) – использует улучшенную стратегию $\bar{s}'$.

Была рассмотрена система со следующими параметрами: I = 20; M=25; R=200; R_i =10, w_i= 10 при i = 1,…, 20; L_i = 1, i = 1,…, 20; L_{21} = {1,2,3,4,5}; L_{22} = {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}, L_{23} = {5, 6,7,8,9,10}; L_{24} = {5, 6,7,8,9,10, 11,12,13,14,15}, L_{25} = {10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20}, где L_i – множество номеров ВР, выделенных для задания i – го потока; среднее время выполнения любого задания равно единице; p_i =0.04, i = 1,…, 25, где p_i – доля потока i – го вида; λ = 60, 80, 100, 120, 140, 160, 180, λ - интенсивность суммарного входного потока заданий. На Рис. 1–Рис. 4 приведены графики, отражающие поведение системы при различных процедурах доступа к ВС. Графики на Рис. 4 получены для КВС со следующими параметрами: I = 3; M = 6; R_i =10, w_i = 10 при i = 1, 2, 3; L_1 = 1; L_2 = 2; L_3 = 3, L_4 = {1, 2}; L_5 = {2, 3}, L_6 = {1, 2, 3}; $p_1 = p_2 = p_3$ = 0.2, $p_4 = p_5$ = 0.1, p_6 = 0.2.

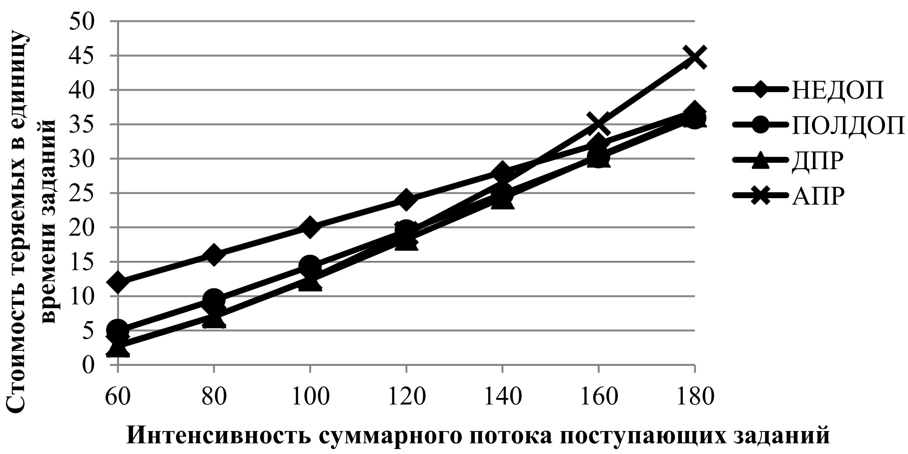

Рис. 1. Стоимость теряемых в единицу времени заданий при d_i=1, i=1,…,25

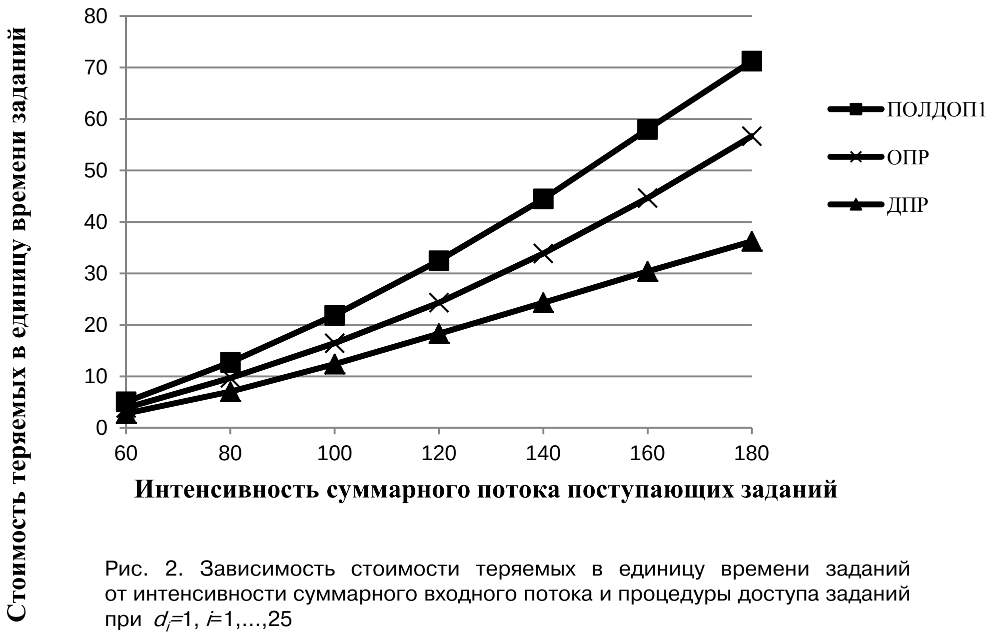

Рис. 2. Зависимость стоимости теряемых в единицу времени заданий от интенсивности суммарного входного потока и процедуры доступа заданий при d_i=1, i=1,...,25

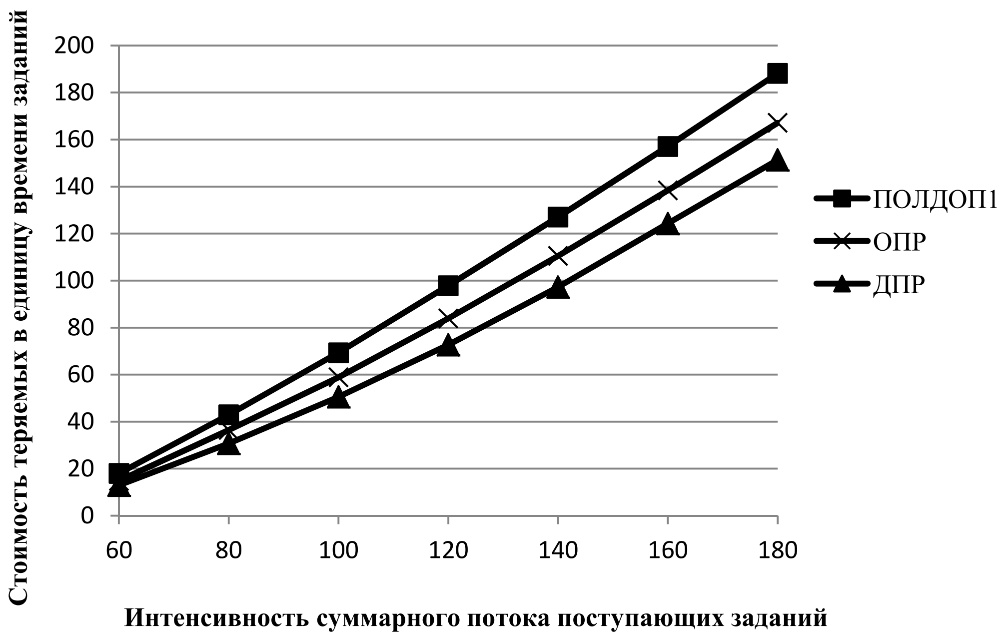

Рис. 3. Зависимость стоимости теряемых в единицу времени заданий от интенсивности суммарного входного потока и процедуры доступа заданий при d_i=1, i=1,...,20, d_{21}=3, d_{22}=5, d_{23}=4, d_{24}=6, d_{25}=6

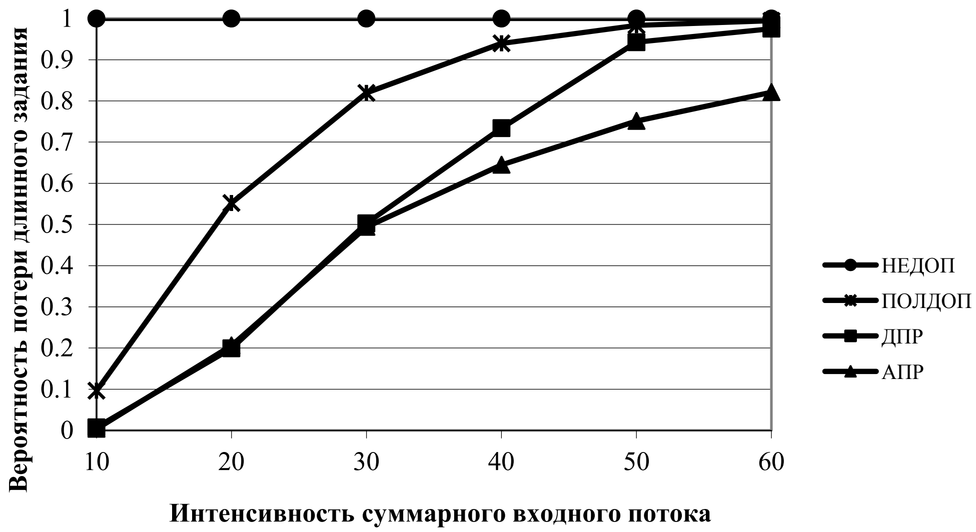

Рис. 4. Зависимость вероятности отклонения длинного задания от интенсивности суммарного входного потока и процедуры доступа заданий

Заключение

Результаты проведенных исследований приводят к следующим выводам.

1. При больших значениях λ и одинаковой плате d_i процедура НЕДОП лучше в смысле максимизации функции $F(\bar{s})$, чем ПОЛДОП1, ОПР, АПР, а при малой нагрузке хуже этих же процедур (Рис. 1).

2. Процедура ДПР не хуже процедуры НЕДОП в смысле максимизации функции $F(\bar{s})$ при любой входящей нагрузке заданий (так как ДПР есть результат шага улучшения стратегии НЕДОП в алгоритме Ховарда).

3. Бесконтрольный допуск длинных заданий в накопитель КВС при отсутствии правил занятия незагруженных ресурсов вне очереди заданиями с коротким оставшимся временем выполнения приводит к простою значительной части ВР и более частой блокировке накопителей (Рис. 1–Рис. 4).

4. С точки зрения максимизации функции $F(\bar{s})$ рассмотренные выше процедуры управления доступом согласно результатам проведенных исследований имеют следующий порядок (по возрастанию) предпочтения: ПОЛДОП1, ОПР, ПОЛДОП, АПР, ДПР (Рис. 1–Рис. 4).

5. При значениях стоимости длинных i-заданий $d_i > \sum_{j=1}^{M} c_{ij}\, d_j$ ($\sum_{j=1}^{M} c_{ij}$ – требуемое для выполнения i-задания число процессоров) процедуры АПР и ДПР одинаковы по эффективности (следует из определения процедуры АПР и ДПР и неравенств $b_{z_j(\bar{k})} \leq 1, j = 1, \dots, I$).

Отметим, что описанная в данном разделе система является моделью кластерного ВК, в которой распределение ВР между различными типами заданий осуществляется так, чтобы принятые в ВК задания в среднем выполнялись за одинаковое время, а доступ заданий зависел от величины платы $d_i, i = 1, \dots, I$.

Литература

1. Коваленко В.Н., Коваленко Е.И., Корягин Д.А., Семячкин Д.А. Управление параллельными заданиями в гриде с неотчуждаемыми ресурсами //http://www.keldysh.ru/papers/2007/prep63/prep2007_63.html
2. Руководство пользователя системы СУПЗ МВС-1000М // http://www.jscc.ru/informat/1000MUsrGuide.zip

3. Maui cluster scheduler // http://www.clusterresources.com/pages/products/ maui-cluster-scheduler.php
4. М. Тим Джонс. Планирование в Hadoop//http://www.ibm.com/ developerworks/ru/library/os-hadoop-scheduling
5. М. Я. Агаларов. Аналитическая модель расчета эффективности плана распределения вычислительных ресурсов многопроцессорной системы при решении специального класса задач // Информатика и ее применения, 2011. Т. 5. Вып. 4. С. 23–35.
6. Карлин С. Основы теории случайных процессов. – М.: Мир, 1971. – 536 с.
7. Ховард Р. Динамическое программирование и марковские процессы. – М.: Советское радио, 1964. – 158 с.
8. Майн Х., Осаки С. Марковские процессы принятия решений. – М.: Наука, 1977. – 176 с.
9. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания / Пер. с англ.— М.: Машиностроение, 1979. 432 с.

Агаларов Мурад Яверович. Менеджер ООО Данон. Окончил Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова 2009 году. Автор 6 печатных работ. Область научных интересов: информатика, прикладная математика.
E-mail: murad–Agalarov@yandex.ru

Агаларов Явер Мирзабекович. Ведущий научный сотрудник ИПИ РАН. Окончил Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова 1974 году. Автор 53 печатных работ и двух книг. Область научных интересов: информационные и телекоммуникационные технологии, математическое моделирование. E-mail: agglar@yandex.ru