

# Расчет теплового излучения при моделировании процесса кристаллизации вещества в литейном деле

А.Ф. Албу

**Аннотация.** Работа посвящена математическому моделированию процесса передачи тепла за счет излучения от нагретых поверхностей к литейной форме. Важность моделирования этого процесса в том, что он оказывает существенное влияние на остывание и кристаллизацию металла в литейном деле. При моделировании учитывались особенности условий, в которых осуществляется литье изделий в рассматриваемой установке. На основе модели предложен алгоритм расчета потока теплового излучения. В основе алгоритма лежат конечные формулы, полученные в результате интегрирования общих соотношений, описывающих распространение теплового излучения.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, тепловое излучение.

## Введение

Одним из важных этапов процесса изготовления изделий в литейном деле является этап остывания и кристаллизации расплавленного металла в литейной форме: от того, как протекал процесс остывания и кристаллизации жидкого металла, зависит качество отлитого изделия.

Изготовление металлического образца начинается с того, что в рабочую полость литейной формы с определенной конфигурацией внешней границы и определенной конфигурацией рабочей полости (Рис. 1) заливают жидкий металл (заштрихованная область – литейная форма, внутренняя незаштрихованная область – рабочая область с жидким металлом). Литейная форма при этом подогрета до заданной температуры  $T_{form}$ , а залитый в нее металл – до температуры  $T_{met}$ . Затем под воздействием изменяющихся внешних условий начинается постепенное охлаждение объекта (объектом будем называть литейную форму и залитый в нее металл). При этом разные части внешней границы литейной формы будут находиться в разных тепловых условиях (т.е. на этих частях будут действовать разные законы теплообмена с окружающей средой), причем тепловые условия будут меняться в зависимости от времени.

Процесс остывания первоначально расплавленного металла происходит в специальной установке, внутри которой перемещается объект. Она состоит из верхней и нижней частей. Используемая промышленная установка схематически представлена на Рис. 2. Ее верхняя часть представляет собой плавильную печь. Она моделируется двумя вертикальными, расположенными друг против друга стенками, которые соединены сверху с еще одной горизонтальной стенкой («крыша»). Стенки печи и «крыша» разогреты до заданной сравнительно высокой температуры. Нижняя часть установки является охладителем и состоит из большой емкости, заполненной жидким алюминием. При перемещении объекта в рассматриваемой установке на него воздействуют два фак-

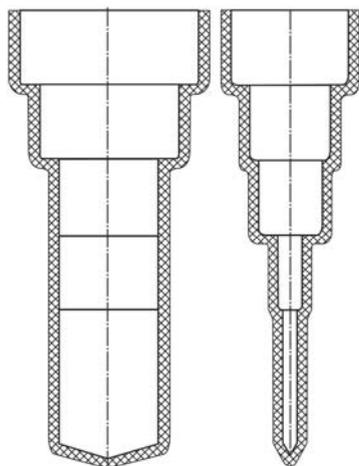


Рис. 1. Рабочая полость литейной формы  
(две проекции)

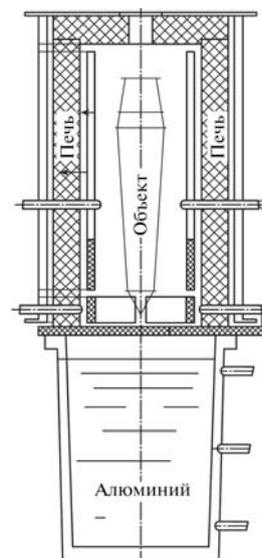


Рис. 2. Установка для кристаллизации металла

тора. С одной стороны, объект медленно погружается в жидкую среду, имеющую сравнительно низкую температуру, благодаря чему происходит кристаллизация металла. С другой стороны, объект получает тепло от стенок плавильной печи, что не позволяет процессу кристаллизации протекать слишком быстро. Необходимо выбирать такой режим остывания и кристаллизации расплавленного металла в плавильной печи, при котором фронт кристаллизации имеет заданную технологами форму (или близкую к ней) и движется достаточно медленно (со скоростью, близкой к предписанной).

Остывание и затвердевание расплавленного металла происходит в результате взаимодействия объекта с внешней средой. Одним из основных механизмов переноса тепла в рассматриваемой задаче является тепловое излучение. В настоящей работе предложена математическая модель процесса передачи тепла за счет излучения от нагретых поверхностей к литейной форме. При моделировании учитывались особенности условий, в которых осуществляется литье изделий в рассматриваемой установке. Предложен алгоритм расчета потока теплового излучения, базирующийся на построенной модели. В его основе лежат конечные формулы, полученные в результате интегрирования общих соотношений, описывающих распространение теплового излучения.

## 1. Постановка задачи

Как отмечалось выше, отдельные части внешней границы объекта находятся в разных тепловых условиях. Укажем основные типы тепловых условий в точках внешней границы объекта.

1) Точка находится в жидком алюминии.

В этом случае необходимо учесть:

- потерю тепловой энергии тела за счет собственного излучения,
- приобретение энергии за счет излучения окружающего жидкого алюминия,
- обмен тепловой энергией за счет теплопередачи между жидким алюминием и объектом.

2) Точка находится вне жидкого алюминия.

Здесь необходимо учесть:

- потери тепловой энергии тела за счет собственного излучения,
- приобретение энергии за счет излучения стенок печи и «крыши»,
- приобретение энергии за счет излучения поверхности жидкого алюминия.

Как видно из предыдущего рассмотрения, одним из основных механизмов переноса тепла в данной задаче является тепловое излучение. Для определения потока тепла, приходящего на поверхность объ-

екта от горячих поверхностей, необходимо, вообще говоря, решать достаточно сложную краевую задачу, связанную с переносом теплового излучения. Этого, однако, можно избежать, если принять во внимание некоторые особенности задачи. А именно известно, что в рассматриваемой установке поддерживается постоянная температура стенок и «крыши» печи и обратное влияние объекта на стенки печи мало. Также учитывается, что в этой установке воздух разрежен (непоглощающая среда) и его взаимодействие с излучением пренебрежимо мало. Это позволяет получить конечные формулы, определяющие тепловое излучение, приходящее на поверхность объекта.

## 2. Расчет потока теплового излучения

Рассмотрим две малые площадки (будем их далее называть элементарными), расположенные в пространстве (Рис. 3). Обозначим через  $\Delta s$  и  $\mathbf{n}$  площадь первой малой площадки и единичный вектор нормали к ней, а через  $\Delta S$  и  $\mathbf{N}$  – те же величины, соответствующие второй площадке. Предположим, что первая площадка излучает тепловую энергию диффузно и что степень черноты этой площадки равна  $\varepsilon$ . Рассчитаем количество энергии  $\Delta q$  излучения от первой элементарной излучающей площадки, имеющей температуру  $T_{Sou}$ , получаемое второй площадкой. Согласно [1-5].

$$\Delta q = I \cdot \left( \mathbf{n}, \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \right) \cdot \Delta s \cdot \Delta \omega,$$

где  $I = \frac{1}{\pi} \varepsilon \sigma T_{Sou}^4$  – интенсивность излучения ( $\sigma = 5.668 \cdot 10^{-8} \frac{eT}{H^2 \cdot K^4}$  – постоянная Стефана-Больцмана);  $\Delta \omega$  – телесный угол, под которым видна вторая площадка из центра первой;  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор, начало которого совпадает с центром первой элементарной площадки, а конец – с центром второй элементарной площадки (Рис. 3). Величина телесного угла  $\Delta \omega$  может быть найдена с помощью соотношения

$$\Delta \omega = \begin{cases} \frac{-1}{|\mathbf{r}|^3} \cdot (\mathbf{N}, \mathbf{r}) \cdot \Delta S, & (\mathbf{N}, \mathbf{r}) < 0, \\ 0, & (\mathbf{N}, \mathbf{r}) \geq 0. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\Delta q = \begin{cases} \frac{-I \cdot (\mathbf{n}, \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{N}, \mathbf{r})}{|\mathbf{r}|^4} \cdot \Delta s \cdot \Delta S, & (\mathbf{N}, \mathbf{r}) < 0, \\ 0, & (\mathbf{N}, \mathbf{r}) \geq 0. \end{cases}$$

Если в качестве источника излучения выступает протяженное тело  $S$ , то количество тепла от протяженного тела, получаемое второй элементарной площадкой, определяется так:

$$q = -\Delta S \cdot \iint_s \left( \frac{1}{\pi} \varepsilon \sigma T_{Sou}^4 \right) \frac{(\mathbf{n}(y_1, y_2), \mathbf{r}(y_1, y_2))}{|\mathbf{r}(y_1, y_2)|^4} \cdot (\mathbf{N}, \mathbf{r}(y_1, y_2)) ds_y, \quad (1)$$

где  $y = (y_1, y_2)$  – локальные координаты, введенные на поверхности-источнике  $s$ .

Если в рассматриваемом пространстве, где изучается процесс теплопередачи, ввести декартову прямоугольную систему координат с центром в середине элементарной ячейки  $\Delta S$  и базисом  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ , то нормаль  $\mathbf{N}$  ко второй элементарной площадке может быть представлена в виде  $\mathbf{N} = N_1 \mathbf{e}_1 + N_2 \mathbf{e}_2 + N_3 \mathbf{e}_3$ . Количество тепла  $q$  в формуле (1) будет представлять собой сумму трех слагаемых:

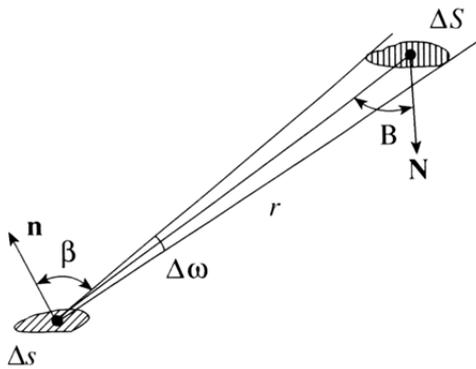


Рис. 3. К расчету теплового излучения

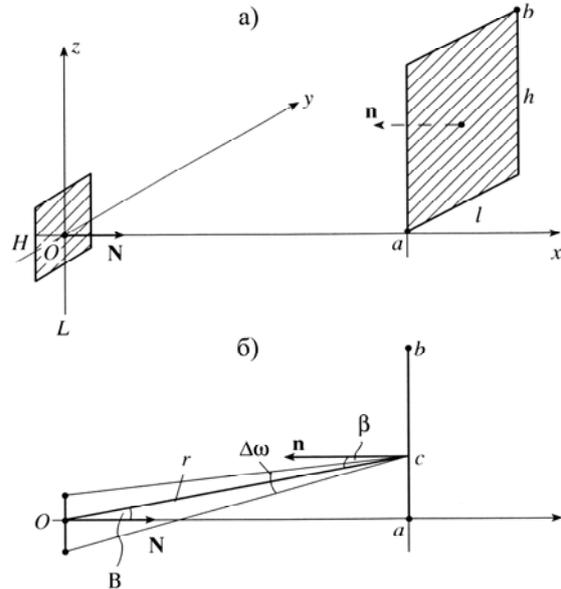


Рис. 4. Расчет излучения в случае, когда ячейка-приемник ортогональна вектору  $e_1$

$$q = [N_1 q_1 + N_2 q_2 + N_3 q_3] \cdot \Delta S,$$

где 
$$q_i = - \iint_s \left( \frac{1}{\pi} \varepsilon \sigma T_{Sou}^4 \right) \frac{(\mathbf{n}(y_1, y_2), \mathbf{r}(y_1, y_2)) (\mathbf{e}_i, \mathbf{r}(y_1, y_2))}{|\mathbf{r}(y_1, y_2)|^4} ds_y, \quad (i = 1, 2, 3).$$

Все излучающие поверхности в рассматриваемой установке (стенки печи, ее «крыша» и поверхность жидкого алюминия) имеют плоскую прямоугольную форму. Поэтому выражения для определения величин  $q_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), получим для поверхности-источника специального вида – прямоугольника, расположенного так, как показано на Рис. 4а. Базисные векторы системы координат выберем так, чтобы они образовывали правую тройку и чтобы вектор  $e_1$  был ортогонален плоскости источника и направлен к ней. Будем также полагать, что размеры источника  $l \times h$  и что все точки плоскости-источника имеют во введенной системе координат  $(O, e_1, e_2, e_3)$  координаты  $(\xi, \eta, \zeta)$ . Рассмотрим следующие варианты.

**а) Плоскость ячейки-приемника ортогональна вектору  $e_1$ .**

В этом случае (Рис. 4а)  $N = e_1 = (1, 0, 0)$ ,  $n = (-1, 0, 0)$ , произвольная точка  $C$  на поверхности источника имеет координаты  $(\xi, \eta, \zeta)$ . Тогда

$$q_1 = - \frac{1}{\pi} \varepsilon \sigma T_{Sou}^4 \iint_s \frac{(\mathbf{n}, \mathbf{r}(y_1, y_2)) (\mathbf{N}, \mathbf{r}(y_1, y_2))}{|\mathbf{r}(y_1, y_2)|^4} d\eta d\zeta =$$

$$= \frac{1}{\pi} \varepsilon \sigma T_{Sou}^4 \iint_s \frac{\cos B(\xi, \eta, \zeta) \cos \beta(\xi, \eta, \zeta)}{|\mathbf{r}(\xi, \eta, \zeta)|^2} d\eta d\zeta.$$

Здесь  $\xi = const$  – расстояние от точки  $O(0, 0, 0)$  до поверхности излучения.

Так как (Рис. 4б) 
$$\cos B = \left( N, \frac{OC}{|OC|} \right) = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}},$$

$$\cos \beta = \left( \mathbf{n}, \frac{\mathbf{CO}}{|\mathbf{CO}|} \right) = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}}, \quad |\mathbf{r}(\xi, \eta, \zeta)| = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2},$$

имеем:

$$q_1 = \frac{1}{\pi} \varepsilon \sigma T_{Sou}^4 \xi^2 \iint_s \frac{d\eta d\zeta}{(\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2})^4}.$$

Введем следующие обозначения  $\tilde{M} = \frac{1}{\pi} \varepsilon \sigma T_{Sou}^4$ ,  $\rho = \sqrt{\xi^2 + \zeta^2}$ . Тогда

$$\begin{aligned} q_1 &= \tilde{M} \xi^2 \int_0^h d\zeta \int_0^l \frac{d\eta}{(\eta^2 + \rho^2)^2} = \tilde{M} \xi^2 \int_0^h \left[ \frac{\eta}{2\rho^2(\eta^2 + \rho^2)} + \frac{1}{2\rho^3} \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\rho} \right]_0^l d\zeta = \\ &= \tilde{M} \xi^2 \int_0^h \left[ \frac{l}{2\rho^2(l^2 + \rho^2)} + \frac{1}{2\rho^3} \operatorname{arctg} \frac{l}{\rho} \right] d\zeta = \tilde{M} \xi^2 \frac{l}{2} I_1 + \tilde{M} \xi^2 \frac{1}{2} I_2, \end{aligned}$$

где

$$I_1 = \int_0^h \frac{d\zeta}{\rho^2(l^2 + \rho^2)}, \quad I_2 = \int_0^h \frac{1}{\rho^3} \operatorname{arctg} \frac{l}{\rho} d\zeta.$$

Вычисляем интеграл  $I_1$ :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^h \frac{d\zeta}{\rho^2(l^2 + \rho^2)} = \int_0^h \frac{d\zeta}{(\xi^2 + \zeta^2)(l^2 + \xi^2 + \zeta^2)} = \\ &= \left\{ \frac{1}{l^2} \left[ \frac{1}{\xi} \operatorname{arctg} \frac{\zeta}{\xi} - \frac{1}{\sqrt{l^2 + \xi^2}} \operatorname{arctg} \frac{\zeta}{\sqrt{l^2 + \xi^2}} \right] \right\}_0^h = \frac{1}{l^2} \left[ \frac{1}{\xi} \operatorname{arctg} \frac{h}{\xi} - \frac{1}{\sqrt{l^2 + \xi^2}} \operatorname{arctg} \frac{h}{\sqrt{l^2 + \xi^2}} \right]. \end{aligned}$$

Для вычисления интеграла  $I_2$  введем обозначения:

$$\tilde{K}(\zeta) = \int \frac{1}{\rho^3} \operatorname{arctg} \frac{l}{\rho} d\zeta \quad \text{и} \quad t = \frac{1}{\rho}.$$

Так как  $\rho^2 = \xi^2 + \zeta^2$ , то  $\zeta = \sqrt{\rho^2 - \xi^2}$ ,  $d\zeta = \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 - \xi^2}}$  и тогда

$$\begin{aligned} \tilde{K}(\zeta) &= \int \frac{1}{\rho^3} \operatorname{arctg} \left( \frac{l}{\rho} \right) \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 - \xi^2}} d\rho = \\ &= \int \frac{1}{\rho^3} \operatorname{arctg} \left( \frac{l}{\rho} \right) \frac{d(\rho^2 - \xi^2)}{2\sqrt{\rho^2 - \xi^2}} = \int \frac{1}{\rho^3} \operatorname{arctg} \left( \frac{l}{\rho} \right) d(\sqrt{\rho^2 - \xi^2}) = \\ &= \int t^3 \operatorname{arctg}(lt) d\left( \sqrt{\frac{1}{t^2} - \xi^2} \right) = \int t^3 \operatorname{arctg}(lt) \left( \frac{1}{t} \right) \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{t^2} - \xi^2}} \left( -\frac{1}{t^2} \right) dt = \\ &= - \int \operatorname{arctg}(lt) \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2 t^2}} t dt = \int \frac{\operatorname{arctg}(lt)}{2\xi^2} \frac{d(1 - \xi^2 t^2)}{\sqrt{1 - \xi^2 t^2}} = \\ &= \frac{1}{\xi^2} \int \operatorname{arctg}(lt) d\left( \sqrt{1 - \xi^2 t^2} \right) = \frac{1}{\xi^2} \left[ \sqrt{1 - \xi^2 t^2} \operatorname{arctg}(lt) - \int \sqrt{1 - \xi^2 t^2} \frac{l}{1 + l^2 t^2} dt \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\xi^2} \sqrt{1 - \xi^2 t^2} \operatorname{arctg}(lt) - \frac{l}{\xi^2} \int \frac{\sqrt{1 - \xi^2 t^2}}{1 + l^2 t^2} dt = \frac{1}{\xi^2} \sqrt{1 - \xi^2 t^2} \operatorname{arctg}(lt) - \\
&\quad - \frac{1}{\xi l} \arcsin(\sqrt{1 - \xi^2 t^2}) + \frac{\sqrt{\xi^2 + l^2}}{\xi^2 l} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1 - \xi^2 t^2}}{\sqrt{\xi^2 + l^2}} t\right) + \operatorname{const} = \\
&\quad = \frac{1}{\xi^2} \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{\rho^2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{l}{\rho}\right) - \frac{1}{\xi l} \arcsin\left(\sqrt{1 - \frac{\xi^2}{\rho^2}}\right) + \\
&\quad + \frac{\sqrt{\xi^2 + l^2}}{\xi^2 l} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1 - \xi^2/\rho^2}}{\sqrt{\xi^2 + l^2}} \rho\right) + \operatorname{const} = \frac{1}{\xi^2} \frac{\sqrt{\rho^2 - \xi^2}}{\rho} \operatorname{arctg}\left(\frac{l}{\rho}\right) - \\
&\quad - \frac{1}{\xi l} \arcsin\left(\frac{\sqrt{\rho^2 - \xi^2}}{\rho}\right) + \frac{\sqrt{\xi^2 + l^2}}{\xi^2 l} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{\rho^2 - \xi^2}}{\sqrt{\xi^2 + l^2}}\right) + \operatorname{const} = \\
&\quad = \frac{1}{\xi^2} \frac{\zeta}{\sqrt{\xi^2 + \zeta^2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{l}{\sqrt{\xi^2 + \zeta^2}}\right) - \frac{1}{\xi l} \arcsin\left(\frac{\zeta}{\sqrt{\xi^2 + \zeta^2}}\right) + \\
&\quad + \frac{\sqrt{\xi^2 + l^2}}{\xi^2 l} \operatorname{arctg}\left(\frac{\zeta}{\sqrt{\xi^2 + l^2}}\right) + \operatorname{const}.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^h \frac{1}{\rho^3} \operatorname{arctg} \frac{l}{\rho} d\zeta = \\
&= \left[ \frac{1}{\xi^2} \frac{\zeta}{\sqrt{\xi^2 + \zeta^2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{l}{\sqrt{\xi^2 + \zeta^2}}\right) - \frac{1}{\xi l} \arcsin\left(\frac{\zeta}{\sqrt{\xi^2 + \zeta^2}}\right) \right]_0^h + \\
&+ \left[ \frac{\sqrt{\xi^2 + l^2}}{\xi^2 l} \operatorname{arctg}\left(\frac{\zeta}{\sqrt{\xi^2 + l^2}}\right) \right]_0^h = \frac{1}{\xi^2} \frac{h}{\sqrt{\xi^2 + h^2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{l}{\sqrt{\xi^2 + h^2}}\right) - \\
&\quad - \frac{1}{\xi l} \arcsin\left(\frac{h}{\sqrt{\xi^2 + h^2}}\right) + \frac{\sqrt{\xi^2 + l^2}}{\xi^2 l} \operatorname{arctg}\left(\frac{h}{\sqrt{\xi^2 + l^2}}\right).
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
q_1 &= \frac{\tilde{M} \xi^2 l}{2} I_1 + \frac{\tilde{M} \xi^2}{2} I_2 = \frac{\tilde{M} \xi^2}{2l} \left[ \frac{1}{\xi} \operatorname{arctg} \frac{h}{\xi} - \frac{1}{\sqrt{l^2 + \xi^2}} \operatorname{arctg} \frac{h}{\sqrt{l^2 + \xi^2}} \right] + \\
&+ \frac{\tilde{M} \xi^2}{2} \left[ \frac{1}{\xi^2} \frac{h}{\sqrt{\xi^2 + h^2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{l}{\sqrt{\xi^2 + h^2}}\right) - \frac{1}{\xi l} \arcsin\left(\frac{h}{\sqrt{\xi^2 + h^2}}\right) \right] + \\
&\quad + \frac{\tilde{M} \xi^2}{2} \left[ \frac{\sqrt{\xi^2 + l^2}}{\xi^2 l} \operatorname{arctg}\left(\frac{h}{\sqrt{\xi^2 + l^2}}\right) \right].
\end{aligned}$$

Учитывая, что  $\operatorname{arctg}\left(\frac{h}{\xi}\right) = \arcsin\left(\frac{h}{\sqrt{\xi^2 + h^2}}\right)$ , имеем

$$q_1 = M_0 \left[ \frac{h}{\sqrt{\xi^2 + h^2}} \operatorname{arctg} \left( \frac{l}{\sqrt{\xi^2 + h^2}} \right) + \frac{l}{\sqrt{\xi^2 + l^2}} \operatorname{arctg} \left( \frac{h}{\sqrt{\xi^2 + l^2}} \right) \right],$$

где  $M_0 = \frac{\tilde{M}}{2} = \frac{1}{2\pi} \varepsilon \sigma T_{Sou}^4.$

**б) Плоскость ячейки-приемника ортогональна вектору  $e_2$ .**

В этом случае (Рис. 5)  $N = e_2 = (0,1,0)$ ,  $n = (-1,0,0)$ , произвольная точка  $C$  специального источника имеет координаты  $(\xi, \eta, \zeta)$  ( $\xi = const$  – расстояние от точки  $O(0,0,0)$  до поверхности излучения). Поэтому

$$q_2 = -\frac{1}{\pi} \varepsilon \sigma T_{Sou}^4 \iint_s \frac{(\mathbf{n}, \mathbf{r}(y_1, y_2))(\mathbf{N}, \mathbf{r}(y_1, y_2))}{|\mathbf{r}(y_1, y_2)|^4} d\eta d\zeta =$$

$$= \frac{1}{\pi} \varepsilon \sigma T_{Sou}^4 \iint_s \frac{\cos B(\xi, \eta, \zeta) \cos \beta(\xi, \eta, \zeta)}{|\mathbf{r}(\xi, \eta, \zeta)|^2} d\eta d\zeta.$$

Здесь (Рис. 5)  $\cos B = \left( \mathbf{N}, \frac{\mathbf{OC}}{|\mathbf{OC}|} \right) = \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}},$

$$\cos \beta = \left( \mathbf{n}, \frac{\mathbf{CO}}{|\mathbf{CO}|} \right) = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}}, \quad |\mathbf{r}(\xi, \eta, \zeta)| = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}.$$

Следовательно:

$$q_2 = \frac{1}{\pi} \varepsilon \sigma T_{Sou}^4 \xi \iint_s \frac{\eta d\eta d\zeta}{(\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2})^4}.$$

Используя введенные выше обозначения для  $\tilde{M}$  и  $\rho$  имеем:

$$q_2 = \tilde{M} \xi \int_0^h d\zeta \int_0^l \frac{\eta d\eta}{(\eta^2 + \rho^2)^2} = \tilde{M} \xi \int_0^h d\zeta \int_0^l \frac{d(\eta^2 + \rho^2)}{2(\eta^2 + \rho^2)^2} =$$

$$= \tilde{M} \xi \int_0^h \left[ -\frac{1}{2(\eta^2 + \rho^2)} \right]_0^l d\zeta = \tilde{M} \xi \int_0^h \left[ \frac{1}{2\rho^2} - \frac{1}{2(l^2 + \rho^2)} \right] d\zeta =$$

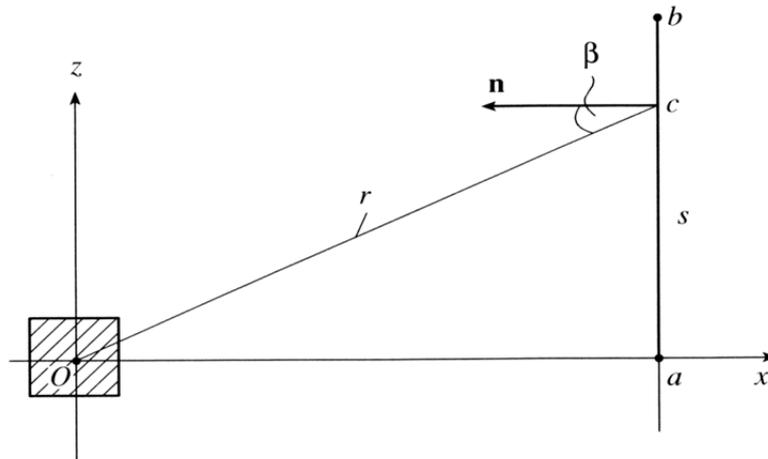


Рис. 5. Расчет излучения в случае, когда ячейка-приемник ортогональна вектору  $e_2$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\tilde{M}_\xi}{2} \int_0^h \frac{d\zeta}{(\zeta^2 + \xi^2)} - \frac{\tilde{M}_\xi}{2} \int_0^h \frac{d\zeta}{(\zeta^2 + \xi^2 + l^2)} = \frac{\tilde{M}_\xi}{2} \left[ \frac{1}{\xi} \operatorname{arctg} \frac{\zeta}{\xi} - \frac{1}{\sqrt{l^2 + \xi^2}} \operatorname{arctg} \frac{\zeta}{\sqrt{l^2 + \xi^2}} \right]_0^h = \\
 &= \frac{\tilde{M}_\xi}{2} \left[ \frac{1}{\xi} \operatorname{arctg} \frac{h}{\xi} - \frac{1}{\sqrt{l^2 + \xi^2}} \operatorname{arctg} \frac{h}{\sqrt{l^2 + \xi^2}} \right].
 \end{aligned}$$

Таким образом

$$q_2 = M_0 \left[ \operatorname{arctg} \left( \frac{h}{\xi} \right) - \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + l^2}} \operatorname{arctg} \left( \frac{h}{\sqrt{\xi^2 + l^2}} \right) \right].$$

**в) Плоскость ячейки-приемника ортогональна вектору  $e_3$ .**

В этом случае (Рис. 6)  $N = e_3 = (0,0,1)$ ,  $n = (-1,0,0)$ , произвольная точка  $C$  на поверхности источника имеет координаты  $(\xi, \eta, \zeta)$  ( $\xi = const$  – расстояние от точки  $O(0,0,0)$  до поверхности излучения). Тогда

$$\begin{aligned}
 q_3 &= -\frac{1}{\pi} \varepsilon \sigma T_{Sou}^4 \iint_s \frac{(n, r(y_1, y_2))(N, r(y_1, y_2))}{|r(y_1, y_2)|^4} d\eta d\zeta = \\
 &= \frac{1}{\pi} \varepsilon \sigma T_{Sou}^4 \iint_s \frac{\cos B(\xi, \eta, \zeta) \cos \beta(\xi, \eta, \zeta)}{|r(\xi, \eta, \zeta)|^2} d\eta d\zeta.
 \end{aligned}$$

В этом случае (Рис. 6)  $\cos B = \left( N, \frac{OC}{|OC|} \right) = \frac{\zeta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}}$ ,

$$\cos \beta = \left( n, \frac{CO}{|CO|} \right) = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}}, \quad |r(\xi, \eta, \zeta)| = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}.$$

Следовательно:

$$\begin{aligned}
 q_3 &= \frac{1}{\pi} \varepsilon \sigma T_{Sou}^4 \xi \iint_s \frac{\zeta d\eta d\zeta}{(\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2})^4} = \\
 &= \tilde{M}_\xi \int_0^l d\eta \int_0^h \frac{\zeta d\zeta}{(\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2})^4} = \tilde{M}_\xi \int_0^l d\eta \int_0^h \frac{\zeta d\zeta}{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^2} =
 \end{aligned}$$

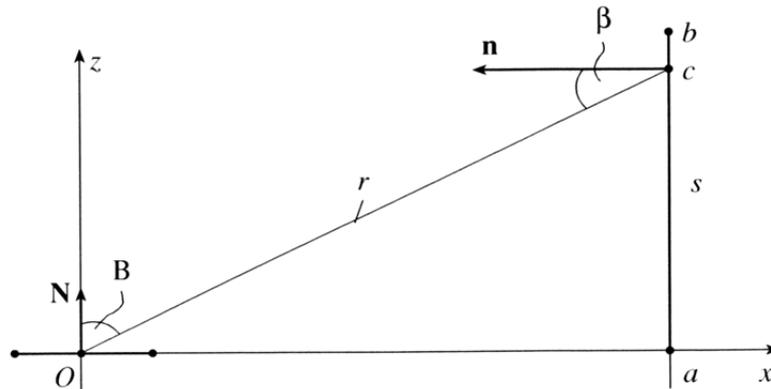


Рис. 6. Расчет излучения в случае, когда ячейка-приемник ортогональна вектору  $e_3$

$$\begin{aligned}
 &= \tilde{M}_\xi \int_0^l \left\{ \left[ \frac{-1}{2(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)} \right]_0^h \right\} d\eta = \tilde{M}_\xi \int_0^l \left[ \frac{1}{2(\xi^2 + \eta^2)} - \frac{1}{2(\xi^2 + \eta^2 + h^2)} \right] d\eta = \\
 &= \frac{\tilde{M}_\xi}{2} \int_0^l \frac{d\eta}{(\eta^2 + \xi^2)} - \frac{\tilde{M}_\xi}{2} \int_0^l \frac{d\eta}{(\zeta^2 + \xi^2 + h^2)} = \frac{\tilde{M}_\xi}{2} \left[ \frac{1}{\xi} \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\xi} - \frac{1}{\sqrt{h^2 + \xi^2}} \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\sqrt{h^2 + \xi^2}} \right]_0^l = \\
 &= \frac{\tilde{M}_\xi}{2} \left[ \frac{1}{\xi} \operatorname{arctg} \frac{l}{\xi} - \frac{1}{\sqrt{h^2 + \xi^2}} \operatorname{arctg} \frac{l}{\sqrt{h^2 + \xi^2}} \right].
 \end{aligned}$$

Таким образом

$$q_3 = M_0 \left[ \operatorname{arctg} \left( \frac{l}{\xi} \right) - \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + h^2}} \operatorname{arctg} \left( \frac{l}{\sqrt{\xi^2 + h^2}} \right) \right].$$

Если поверхность излучения имеет форму прямоугольника, расположенного произвольным образом относительно центра поглощающей площадки (а не специальным образом, как это показано на Рис. 4а), то для расчета количества тепла используется прием, известный в литературе как “алгебра угловых коэффициентов” [2].

Предложенный алгоритм расчета теплового потока от излучающих поверхностей использовался при решении задачи оптимального управления процессом кристаллизации металла в литейном деле в разных постановках [6-9].

## Литература

1. Блох А.Г. Основы теплообмена излучением. М.-Л.: Госэнергоиздат, 1962.
2. Спэрроу Э.М., Сесс Р.Д. Теплообмен излучением. Л.: «Энергия», 1971.
3. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964.
4. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967.
5. Самарский А.А., Вабишевич П.Н. Вычислительная теплопередача. М.: Едиториал УРСС, 2003.
6. Албу А.В., Албу А.Ф., Зубов В.И. Управление процессом кристаллизации вещества для объекта сложной формы // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 2012. Т. 52. №12. С. 2149–2162.
7. Албу А.Ф., Зубов В.И. О влиянии параметров установки на управление процессом кристаллизации вещества в литейном деле // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 2013. Т. 53. №2. С. 238–248.
8. Албу А.Ф., Зубов В.И. Исследование задачи оптимального управления процессом кристаллизации вещества в новой постановке // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 2014. Т. 54. №5. С. 734-745.
9. Албу А.Ф., Зубов В.И. Исследование задачи оптимального управления процессом кристаллизации вещества в новой постановке для объекта сложной геометрической формы // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 2014. Т. 54. №12. С. 1879-1893.

**Албу Алла Филипповна.** Старший научный сотрудник ВЦ им. А.А. Дородницына РАН. Окончила Кишиневский государственный университет в 1982 году. Кандидат физико-математических наук. Автор 54 печатных работ. Область научных интересов: оптимальное управление, математическое моделирование, вычислительная математика. E-mail: alla.albu@mail.ru