Предельное конфигурирование подсистем в гиперкубических вычислительных системах[1]

В.А. Мелентьев

Аннотация. Рассматривается проблема выявления в вычислительной системе с гиперкубической топологией максимальной по включению компоненты, соответствующей размещаемой подсистеме в отношении достижимости ее вершин. Получена формула предельного распараллеливания такой подсистемы, и предложен способ конкретизации ее элементов.

Ключевые слова: достижимость и соединимость вершин в графе, вложение подсистемы в вычислительную систему с гиперкубической топологией.

Введение

Одним из основных требований, предъявляемых к подсистемам вычислительной системы (ВС), является актуальность решения реализуемых ими прикладных и/или системных задач. Проблема размещения подсистем в ресурсной среде ВС связана с тем, что абсолютная адекватность вложения подсистемы в вычислительную систему могла бы быть достигнута при наличии в графе ВС подграфа, изоморфного информационному графу [1] вкладываемой в нее подсистемы. Однако, во-первых, задача выявления изоморфизма является NP-полной со всеми вытекающими последствиями для достоверности и времени ее решения, неполиномиально растущим с увеличением размера ВС. Во-вторых, реализация свойства отказоустойчивости изначально предполагает использование в ВС топологий, даже при предельной кратности отказов гарантирующих сохранение маршрутов, метрики которых определены информационными графами подсистем и характеристиками коммуникационной среды ВС. Понятно, что реализация для ВС полносвязной структуры, позволяющей воплотить любой информационный граф, технико-экономически не является оправданной, а использование опосредованных (транзитных) взаимодействий ограничивается быстродействием коммуникационной среды. Из этого вытекает требование актуальности взаимодействия информационно-смежных процессов, каковая с учетом производительности коммуникационной среды обусловлена граничными значениями длины и числа маршрутов между вершинами подсистемы [2].

В упомянутой выше работе впервые введено понятие глобальной ∂-компоненты графа ВС, все вершины которой считаются попарно достижимыми лишь при обусловленном и подсистемой, и коммуникационной средой ВС ограничении на длину ∂ межпроцессных соединений. Использование компонент ∂-достижимости позволяет перейти к произвольному вложению в них подсистем и не требует NP-сложного выявления в графе ВС подграфов, изоморфных информационному графу подсистемы. Там же даны постановка и способ выявления такой компоненты в произвольном графе, основанные на его проективном описании [3, 4].

---

[1] Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 14-07-00169.

Понятно, что регулярность используемой топологии значительно упрощает алгоритм выявления в ней ∂-компоненты. В силу ряда общеизвестных причин наиболее используемой в построении суперкомпьютеров является гиперкубическая топология. Ясно, что в любом s-мерном гиперкубе Q_s (s-кубе) всегда может быть выделена ∂-компонента ($\partial \le s$), являющаяся гиперкубом Q_∂ степени ∂. Однако то, что из всех возможных в Q_s ∂-компонент именно Q_∂ обладает наибольшим порядком, не является безусловным и требует исследования.

Цель работы состоит в выявлении возможностей предельного распараллеливания в ВС с гиперкубической топологией с учетом ограничения длины путей между вершинами соответствующего подсистеме информационного графа, т е. в вычислении порядка наибольшей ∂-компоненты гиперкуба и в выявлении образующих такую компоненту его вершин.

1. Основные положения

Структуру вычислительной системы представим неориентированным графом $G(V, E)$ без кратных ребер и петель, где V и E, соответственно, — множества вершин и ребер. Подграф $[a]_i \equiv G_i(u)$ такого графа G, индуцированный множеством вершин, находящихся от вершины $a \in G$ на расстоянии[2] i, назовем i-окрестностью этой вершины. Множество вершин в i-окрестности $[a]_i$ будем называть i-окружением $\mathcal{N}_i(a)$, число составляющих его вершин обозначим через $n_i(a) = |\mathcal{N}_i(a)|$. В дальнейшем при равенстве индекса i единице 1-окрестность $[a]_1$ будем называть просто окрестностью $[a] \equiv [a]_1$, а соответствующее такой окрестности 1-окружение — окружением $\mathcal{N}_1(a) \equiv \mathcal{N}(a)$ с числом вершин $n_1(a) = n(a)$.

Две вершины $u, v \in V$ графа $G(V, E)$ назовем эквивалентными ($u \sim v$), если их окрестности совпадают: $u \sim v \Leftrightarrow [u] = [v]$. Понятно, что в этом случае окружения таких вершин также равны — $[u] = [v] \Leftrightarrow \mathcal{N}(u) = \mathcal{N}(v)$, поэтому справедливо и $u \sim v \Leftrightarrow \mathcal{N}(u) = \mathcal{N}(v)$. Вершины u и v графа G назовем дистанционно-эквивалентными ($u \simeq v$), если все их i-окрестности вплоть до индекса i, равного диаметру $d(G)$ графа, попарно равномощны: $u \simeq v \Leftrightarrow n_i(u) = n_i(v)$, $i \le d(G)$. Далее, если нет необходимости в сопоставлении разных графов, обозначение диаметра $d(G)$ графа сократим до d. Понятно, что i-окружения эквивалентных вершин попарно равномощны — $u \sim v \Rightarrow n_i(u) = n_i(v)$, поэтому эквивалентные вершины — дистанционно-эквивалентны[3] — $u \sim v \Rightarrow u \simeq v$. Если эксцентриситет[4] $\varepsilon(v)$ вершины v меньше диаметра графа $d(G)$, то для всех i таких, что $\varepsilon(v) < i \le d$, — $\mathcal{N}_i(v) = \emptyset$ и $n_i(v) = 0$.

Дистанционной эквивалентностью всех вершин обладает дистанционно-транзитивный граф, определяемый в [5] как неориентированный граф $G = (V, E)$, в котором для любых двух пар вершин u, v и x, y находящихся на расстоянии $i = d(u, v) = d(x, y)$, существует автоморфизм[5] f: $V(G) \to V(G)$, переводящий первую пару вершин во вторую: $f(u) = x$ и $f(v) = y$. Понятно, что такой граф является регулярным, вершинно-транзитивным и симметричным.

В работе [6], посвященной исследованию взаимозависимости свойств регулярности и симметрии, регулярные графы, в которых для любых двух вершин u и v число вершин, отстоящих на расстояниях j от u и k от v, зависит только от j, k и от расстояния $i = d(u, v)$, названы дистанционно-регулярными. Известно [7], что все дистанционно-транзитивные графы дистанционно-регулярны, но не все дистанционно-регулярные графы являются дистанционно-транзитивными.

Объектом исследования в настоящей работе являются ВС с гиперкубической топологией, а предметом исследования — предельные возможности таких ВС в части организации в них подси-

[2] Расстояние $d(u, v)$ между вершинами u и v равно длине кратчайшего соединяющего их пути.

[3] Следует учитывать, что отношения эквивалентности могут связывать вершины лишь одного графа, тогда как отношения дистанционной эквивалентности могут быть отнесены к вершинам разных графов.

[4] Эксцентриситет $\varepsilon(v)$ вершины v равен расстоянию от v до наиболее удаленной вершины.

[5] Автоморфизм графа есть сохраняющее смежность отображение множества его вершин на себя.

стем с ограничениями сетевых задержек, т.е. предельные возможности гиперкубов по наличию в них подграфов с лимитируемым значением достижимости. Методика проведенного исследования основана на формальном описании графа его проекциями. В связи с тем, что такая формализация графов является оригинальной и в научной литературе недостаточно широко представлена, в следующем разделе приведены краткие сведения о ней.

2. Проективное описание графа

Проекция $P_i(v)$ неориентированного простого графа $G(V, E)$ представляет собой i-уровневую конструкцию, на нулевом уровне которой расположена ракурсная (определяющая ракурс) вершина $v \in V$; порожденное ею на первом уровне окружение $\mathcal{N}(v)$, содержит $s(v)$ смежных v вершин, принадлежащих окрестности $[v]$, а i-е уровни объединяют подмножества вершин, порожденные вершинами предшествующих уровней [2], [3]. Отношение непосредственного предшествования/порождения вершин в проекции $P(v)$ есть отношение их смежности. Число порожденных на i-м уровне подмножеств соответствует числу $|V_{i-1}|$ вершин порождающего их $(i - 1)$-го уровня. Упорядочив вершины по их непосредственному «предшествованию/порождению» от ракурсной v до j-й вершины i-го уровня v_{ij}, получим маршрут $W(v - v_{ij}) = (v, v_{1x}, \ldots, v_{ij})$ из v в v_{ij}, при этом в невзвешенном графе номер i уровня равен длине пути из v в любую вершину из подмножества V_i находящихся на этом уровне вершин. Последовательность вершин, непосредственно предшествующих открывающимся скобкам от v_{ij} до ракурсной вершины v, дает обратный маршрут $W(v_{ij} - v) = W^{1}(v - v_{ij})$.

Итак, вершина $v_{i-1,j}$ порождает подмножество $V_i(v_{i-1,j}) = \mathcal{N}(v_{i-1,j}) \setminus W(v_{i-1,j}, v)$. К примеру, 3-уровневая полная[6] проекция 3-куба, построенная из вершины 0[7], имеет вид:

$$P_3(0) = 0^{(1^{(3^{(2,7)},5^{(4,7)})},2^{(3^{(1,7)},6^{(4,7)})},4^{(5^{(1,7)},6^{(2,7)})})}. \quad (1)$$

В общем случае вершина $u \neq v$ в i-уровневой проекции $P_i(v)$ может повторяться m-кратно. Кратность $m(u)$ вершины u в проекции и число описываемых ею простых цепей из ракурсной вершины v в вершину u равнозначны. Проиндексируем кратные вершины по порядку их размещения на уровнях «снизу-вверх» (по возрастанию номеров уровней) и «слева-направо» (для вершин одного уровня). Нулевое значение присвоим индексу экземпляра вершины, расположенного первым снизу и слева, — назовем этот экземпляр оригинальным. Индексам остальных экземпляров $u_k \in (u_1, \ldots, u_{m-1})$ вершины u, присвоим соответствующие упорядочиванию значения из $1 \leq k \leq m(u) - 1$. Эти экземпляры назовем реплицированными, или репликами. Уровни, на которых расположены экземпляры вершины u, также упорядочим по возрастанию: оригинальной вершине u_0 соответствует уровень $j_0 = \min(j_0, j_1, \ldots, j_{m-1})$, вершине u_{m-1} — j_{m-1}-й уровень. Числовые значения отдельных элементов множества $(j_0, j_1, \ldots, j_{m-1})$ могут совпадать. Номер уровня j_0, на котором расположена оригинальная вершина u_0, имеет наименьшее значение, равное длине кратчайшего маршрута в множестве путей из v в u. Таким образом, множество оригинальных вершин i-го уровня проекции $P(v)$ является i-окружением $\mathcal{N}_i(v)$ ракурсной вершины v этой проекции.

[6] Полная проекция несет в себе информацию обо всех вершинах и ребрах графа. Минимальное число уровней в ней равно эксцентриситету $\varepsilon(v)$ ракурсной вершины v (или $\varepsilon(v) + 1$ при смежности хотя бы двух вершин из удаленных от ракурсной вершины на величину эксцентриситета) [3].

[7] Здесь и далее в работе нумерация вершин гиперкуба имеет двоичную кодировку и представлена в десятичном исчислении.

3. Достижимость в гиперкубе и порядок его ∂-компоненты

Известно, что s-мерный гиперкуб Q_s является вершинно-транзитивным, и для любых двух его вершин v_1 и v_2 существует автоморфизм f: $V(Q_s) \to V(Q_s)$ такой, что $f(v_1) = v_2$. Гиперкуб является также симметричным (транзитивным относительно дуг), и для любых двух пар его смежных вершин u_1-v_1 и u_2-v_2 имеется автоморфизм f, при котором $f(u_1) = u_2$ и $f(v_1) = v_2$. Кроме того, гиперкуб дистанционно-транзитивен, и для любых двух его вершин u и v, находящихся на расстоянии i, и любых двух вершин x и y, находящихся на том же расстоянии, существует автоморфизм, переводящий u в x и v в y. Из этого следуют и центральность гиперкуба (все его вершины являются центральными[8] с равным диаметру радиусом[9] графа $r(Q_s) = d(Q_s) = s$), и дистанционная эквивалентность всех его вершин. Совокупность этих свойств гиперкуба позволяет ограничиться далее рассмотрением лишь одной его проекции. Учитывая, что расстояние между вершинами гиперкуба определяется кодовым расстоянием между их номерами, в приведенных ниже примерах используем в качестве ракурсной вершину 0 — это позволит упростить восприятие, так как расстояние от 0-й вершины до любой другой равно числу единиц в двоичном коде номера последней.

Пусть в s-уровневой проекции $P_s(a)$ s-мерного гиперкуба Q_s, построенной из вершины a, вершина b является оригинальной на i-м уровне, т. е. $d(a, b) = i$, и, следовательно, $b \in \mathcal{N}_i(a)$. Пусть вершина c расположена на j-м уровне проекции $P_s(a)$ и, соответственно, — $d(a, c) = j$, и $c \in \mathcal{N}_j(a)$. Для простоты примем $j \le i$, — это не нарушит общности рассуждений, так как для $j > i$ может быть произведена соответствующая замена j на i. Понятно, что в проекции $P(\overline{a})$, построенной из вершины $\overline{a}$ с обратной к a кодировкой (к примеру, если $a = 00000$, то $\overline{a} = 11111$ и $d(a,\overline{a}) = s = 5$), вершина $b \in \mathcal{N}_{s-i}(\overline{a})$ и является оригинальной также на $(s - i)$-м уровне проекции $P_S(\overline{a})$, т. е. $d(\overline{a},b) = s - i$. Для вершины c, отстоящей от a на расстоянии $d(a, c) = j$, справедливо $d(\overline{a},c) = s - j$. В [3] показано, что расстояние между двумя вершинами графа не превышает суммы номеров уровней описывающей этот граф проекции. Тогда с учетом проекций $P(a)$ и $P(\overline{a})$ расстояние $d(b, c)$ между вершинами b и c, принадлежащими i- и j-окружениям вершины a, и соответственно, $(s - i)$- и $(s - j)$-окружениям вершины $\overline{a}$, не превысит значения $d_{\max}(i, j)$, определяемого минимумом сумм соответствующих проекциям $P(a)$ и $P(\overline{a})$ номеров уровней:

$$d_{\max}(i, j) = \min\{i + j, \quad 2s - i - j\}. \tag{2}$$

Минимальное значение $d_{\min}(i, j)$ в множестве $D_{i,j}(a)$ расстояний $d(i, j)$ от произвольно взятой в i-окружении $\mathcal{N}_i(a)$ вершины (от оригинальной вершины i-го уровня проекции $P(a)$) до вершин, входящих j-окружение $\mathcal{N}_j(a)$ гиперкуба (до вершин j-го уровня проекции) — $d_{\min}(i, j) = i - j$ при $i > j$, и $d_{\min}(i, j) = 2$ при $j = i$). Шаг изменения расстояний в множестве $D_{i,j}(a)$ равен двум:

$$D_{i,j}(a) = \{i - j + 2k\}, \text{где } k \in \begin{cases} \left(\overline{0, \lfloor d_{\max}(i,j)/2 \rfloor}\right) \text{при } j < i, \\ \left(\overline{1, \lfloor d_{\max}(i,j)/2 \rfloor}\right) \text{при } j = i. \end{cases}, \tag{3}$$

здесь $(\overline{x, y})$ —упорядоченное множество целых чисел от x до y.

В [2] впервые введено понятие глобальной ∂-компоненты графа ВС, как подграфа, часть вершин которого отстоит друг от друга на расстоянии, не превышающем ∂, что позволяет размещать на них ресурсы вкладываемой подсистемы и считать их по этому признаку основными; соответственно, порядок ∂-компоненты определяется числом ее основных вершин. Другие вершины глобальной ∂-компоненты таковым свойством не обладают и являются вспомогательными — они входят в состав ∂-ограниченных путей между основными вершинами, обеспечивая, таким образом,

---

[8] Вершина v называется центральной вершиной графа G, если $\varepsilon(v) = r(G)$

[9] Радиусом графа $r(G)$ называется наименьший из эксцентриситетов вершин.

взаимную ∂-достижимость последних; далее будем называть эти вершины транзитными. Обозначим через V_∂ множество всех вершин, составляющих компоненту ∂-достижимости, через V_∂^* — подмножество взаимно ∂-достижимых (основных) вершин и через V_+^* — подмножество вершин, составляющих ∂-ограниченные пути между вершинами из подмножества V_∂^*, но не принадлежащих ему: $V_\partial = V_\partial^* + V_+^*$ [2].

Из (2) видно, что для $\partial < s$[10] наибольшим уровнем проекции, когда расстояние $d_{\max}(i, i)$ еще не превышает заданное значение достижимости ∂, является уровень $i_{\max} = \lfloor \partial/2 \rfloor$, т. е. $i, j \le \lfloor \partial/2 \rfloor \Rightarrow d(i, j) \le \partial$; при этом $d_{\max}(i, j) = i + j$, и (3) трансформируется в (4):

$$D_{i,j}(a) = \{i - j + 2k\}, \text{где } k \in \begin{cases} \left(\overline{0, \lfloor (i+j)/2 \rfloor}\right) \text{при } j < i, \\ \left(\overline{1, i}\right) \text{при } j = i. \end{cases} \qquad (4)$$

Понятно, что все вершины i-окружений $\mathcal{N}_{i \le \lfloor \partial/2 \rfloor}(a)$ могут быть причислены к основным вершинам глобальной ∂-компоненты, так как расстояние $d(b, c)$ от произвольной вершины $b \in \mathcal{N}_{i \le \lfloor \partial/2 \rfloor}(a)$ до любой вершины $c \in \mathcal{N}_{j \le \lfloor \partial/2 \rfloor}(a)$ не превышает заданного значения ∂: $\forall b \in \mathcal{N}_i(a), \forall c \in \mathcal{N}_j(a) \mid i, j \le \partial/2 \quad d(b, c) \le \partial$. Если же принять $i = \lfloor \partial/2 \rfloor + 1$, то расстояния от произвольной вершины из $\mathcal{N}_{i = \lfloor \partial/2 \rfloor + 1}(a)$ до вершин из $\mathcal{N}_{j \le \lfloor \partial/2 \rfloor}$ не превышают $d_{\max}(i, j)$, принимающего при $j = \lfloor \partial/2 \rfloor$ наибольшее значение $d_{\max}(i, j) = 2\lfloor \partial/2 \rfloor + 1$. Понятно, что при четном ∂ принадлежащие множеству $D_{i,j}(a)$ расстояния — $d(i, j) \le \partial + 1$, т. е. $\forall b \in \mathcal{N}_{i > \lfloor \partial/2 \rfloor}(a)$ существует такая $c \in \mathcal{N}_{j = \lfloor \partial/2 \rfloor}(a)$, для которой $d(b, c) > \partial$, и, таким образом, ни одна из вершин уровня $i > \lfloor \partial/2 \rfloor$ не может быть причислена к основным вершинам глобальной ∂-компоненты. Следовательно, при четном значении ∂ множество $V_\partial(a)$ основных вершин глобальной ∂-компоненты гиперкуба, отвечающих требованию взаимной ∂-достижимости, определится объединением $V_\partial(a) = \bigcup_{i=0}^{\partial/2} \mathcal{N}_i(a)$ всех i-окружений вершины a при $i \le \partial/2$. Вершина a в такой компоненте является центральной, ее радиус r равен половине диаметра $r = d/2$, диаметр ∂-компоненты $d = \partial$, а ее порядок[11] определится суммой $n_\partial = |V_\partial(a)| = \sum_{i=0}^{\partial/2} \binom{s}{i}$.

Для нечетных значений достижимости ∂ при $i \le \lfloor \partial/2 \rfloor, j \le i$ из (4) получим — $d(i, j) \le d_{\max}(i, j)$, где расстояния между вершинами i- и j-окружений $\mathcal{N}_i(a)$ и $\mathcal{N}_j(a)$ получают максимальное значение при $i = j = \lfloor \partial/2 \rfloor$, и $d_{\max}(\lfloor \partial/2 \rfloor, \lfloor \partial/2 \rfloor) = 2\lfloor \partial/2 \rfloor = \partial - 1$. Таким образом, вершины первых $\lfloor \partial/2 \rfloor$ уровней проекции $P_s(a)$ являются взаимно (∂ - 1)-достижимыми, и входят в число основных вершин глобальной (∂ - 1)-компоненты. Но так как в рассматриваемом случае значение ∂ является нечетным, а расстояние между вершинами одного и того же окружения в гиперкубе быть нечетным не может в принципе, то вершин $b, c \in \mathcal{N}_{i = \lfloor \partial/2 \rfloor}(x)$, для которых $d(b, c) = \partial$, не существует. Очевидно, что для получения искомой ∂-компоненты состав основных вершин (∂ - 1)-компоненты должен быть расширен теми вершинами $\lceil \partial/2 \rceil$-окружения $\mathcal{N}_{\lceil \partial/2 \rceil}(a)$ ($\lfloor \partial/2 \rfloor + 1 = \lceil \partial/2 \rceil$), которые отстоят друг от друга на расстоянии, не большем чем ∂ - 1 (так как ∂ — нечетное), а от вершин нижних уровней проекции $P_{\lceil \partial/2 \rceil}(a)$ — на расстоянии, не большем ∂. Обозначим подмножество таких вершин через $\mathcal{N}^*_{\lceil \partial/2 \rceil}(a)$: $\mathcal{N}^*_{\lceil \partial/2 \rceil}(a) \subset \mathcal{N}_{\lceil \partial/2 \rceil}(a)$.

Пусть $x \in \mathcal{N}_1(a)$, $\mathcal{N}_{i = \lfloor \partial/2 \rfloor}(x)$ — окружение вершины x, и $\left|\mathcal{N}_{i = \lfloor \partial/2 \rfloor}(x)\right| = n_{\lfloor \partial/2 \rfloor}(x) = \binom{s}{\lfloor \partial/2 \rfloor}$. Понятно, что в это окружение входят не только вершины искомого нами подмножества $\mathcal{N}^*_{\lceil \partial/2 \rceil}(a)$,

[10] При $\partial \ge s$ все вершины s-куба взаимно ∂-достижимы и ∂-компонента совпадает с исходным гиперкубом Q_s.
[11] Порядок глобальной ∂-компоненты графа определяется числом основных вершин в ней.

но и отстоящие от a на расстоянии $\lfloor\partial/2\rfloor$ - 1 вершины из $\mathcal{N}_{i=\lfloor\partial/2\rfloor-1}(a)$, т. е. $\mathcal{N}^{*}_{\lceil\partial/2\rceil}(a) = \mathcal{N}_{i=\lfloor\partial/2\rfloor}(x)\backslash\mathcal{N}_{i=\lfloor\partial/2\rfloor-1}(a)$. Исключим из рассмотрения эти вершины, удалив ребро (x, a) и уменьшив этим степень вершины x. Тогда число вершин с кодовым расстоянием от x, равным $\lfloor\partial/2\rfloor$, составит $n^{*}_{\lfloor\partial/2\rfloor}(x) = \binom{s-1}{\lfloor\partial/2\rfloor}$, и порядок глобальной ∂-компоненты с нечетным значением ∂ определится суммой $n_\partial = \sum_{i=0}^{\lfloor\partial/2\rfloor}\binom{s}{i} + \binom{s-1}{\lfloor\partial/2\rfloor}$.

Обобщив полученные выше результаты для четных и нечетных значений ограниченной сверху достижимости ∂, получим:

$$n_\partial = \begin{cases} \sum_{i=0}^{\partial/2}\binom{s}{i} & \text{для четных } \partial, \\ \binom{s-1}{\lfloor\partial/2\rfloor} + \sum_{i=0}^{\lfloor\partial/2\rfloor}\binom{s}{i} & \text{для нечетных } \partial. \end{cases} \quad (5)$$

Из (5) видно, что при любой размерности гиперкуба порядок его ∂-компоненты составит: $n_{\partial=0} = 1 \Leftarrow \partial = 0$, $n_{\partial=1} = 2 \Leftarrow \partial = 1$ и $\partial = 2 \Rightarrow n_{\partial=2} = s + 1$.

Оценим порядок глобальной ∂-компоненты гиперкуба при минимально возможном ограничении достижимости — $\partial = s - 1$. Напомним, что все строки таблицы биномиальных коэффициентов, называемой еще треугольником Паскаля, симметричны относительно его вертикальной оси, поэтому при нечетной степени s гиперкуба и, следовательно, при четном значении ∂ получим:

$$\sum_{i=0}^{(s-1)/2}\binom{s}{i} = \sum_{(s-1)/2+1}^{s}\binom{s}{i}, \sum_{i=0}^{(s-1)/2}\binom{s}{i} = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{s}\binom{s}{i}, \text{ и } n_{\partial=s-1} = 2^{s-1}.$$

При нечетном значении $\partial = s$ - 1 (при четной степени s-куба) из (5) получим:

$$n_{\partial=s-1} = \binom{s-1}{s/2-1} + \sum_{i=0}^{s/2-1}\binom{s}{i}.$$

Из известного для биномиальных коэффициентов соотношения $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$ следует $\binom{s}{s/2} = \frac{s}{s/2}\binom{s-1}{s/2-1} = 2\binom{s-1}{s/2-1}$. Разложив $\sum_{i=s/2+1}^{s}\binom{s}{i} = 2^s$ на отдельные слагаемые, получим $\sum_{i=0}^{s/2-1}\binom{s}{i} + \binom{s}{s/2} + \sum_{i=s/2+1}^{s}\binom{s}{i} = 2^s$. Из симметричности треугольника Паскаля — $\sum_{i=0}^{s/2-1}\binom{s}{i} = \sum_{i=s/2+1}^{s}\binom{s}{i}$. Тогда $2\sum_{i=0}^{s/2-1}\binom{s}{i} + 2\binom{s-1}{s/2-1} = 2^s$ и $n_{\partial=s-1} = 2^{s-1}$.

Итак, независимо от четности/нечетности степени s-куба порядок глобальной ∂-компоненты с минимально лимитируемой достижимостью $\partial = s - 1$ вдвое меньше порядка самого гиперкуба — $n_{\partial=s-1} = 2^{s-1}$, и ($s$ - 1)-компонента является гиперкубом соответствующей размерности.

Ниже приведена таблица с расчетными значениями порядка ∂-компонент s-мерного гиперкуба при изменении значений его степени и достижимости двух до двенадцати. Здесь помеченная серым цветом часть таблицы соответствует отсутствию ограничений на задержки информационного взаимодействия размещаемых в системе процессов — $\partial \geq s$. При этом ресурсы ВС могут быть задействованы полностью, и распараллеливание будет максимальным. Из таблицы нетрудно увидеть, что, как предполагалось в постановочной части работы, порядок n_∂ ∂-компоненты s-мерного гиперкуба Q_s превышает порядок 2^∂ обладающего той же достижимостью ∂-куба Q_∂, являющегося подграфом Q_s. При этом коэффициент $k_\partial = n_\partial/2^\partial$ такого превышения тем выше, чем выше степень гиперкуба и чем жестче допускаемое в подсистеме ограничение на взаимную достижимость вершин: $k_\partial = (s + 1)/4$ при $\partial = 2$ и $k_\partial = 1$ при $\partial = s - 1$.

$\partial\backslash s$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
3	8	8	10	12	14	16	18	20	22	24
4	8	16	16	22	29	37	46	56	67	79
5	8	16	32	32	44	58	74	92	112	134
6	8	16	32	64	64	93	130	176	232	299
7	8	16	32	64	128	128	186	260	352	464
8	8	16	32	64	128	256	256	386	562	794
9	8	16	32	64	128	256	512	512	772	1124
10	8	16	32	64	128	256	512	1024	1024	1586
11	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	2048
12	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096

4. Конкретизация вершин глобальной ∂-компоненты гиперкуба

Из дистанционной эквивалентности вершин s-мерного гиперкуба и из (5) следует, что для выявления вершин глобальной ∂-компоненты с $\partial < s$ достаточно рассмотреть всего лишь одну его проекцию с числом уровней в ней, не превышающем $\lceil \partial/2 \rceil$. При этом в качестве ракурсной вершины проекции может быть выбрана любая вершина, которая при этом станет центром искомой компоненты. Это позволяет дополнительно к решению основной проблемы, состоящей в выявлении компоненты, пригодной с позиций достижимости для вложения в нее подсистемы ВС, автоматически выявить в найденной компоненте центральную вершину, что позволит оптимизировать обмены не только между процессами подсистемы на этапах ее загрузки/выгрузки, но и на этапе параллельного выполнения этих процессов. Немаловажным также является то, что в качестве центральной может быть выбрана любая вершина гиперкуба, т. е. порядок найденной в результате глобальной ∂-компоненты и физическая структура вкладываемой в нее подсистемы, не зависят от выбора, и критериями обоснованности этого выбора могут служить, например, текущие загруженности вершин графа ВС и/или их окружений.

Известно, что обхват s-куба равен четырем, поэтому уровни, начиная со 2-го, содержат как оригинальные вершины, так и их реплики, причем, на 2-м уровне проекции гиперкуба имеется по два экземпляра каждой из $s(s-1)$ вершин. Так как выбор любого из этих экземпляров в качестве оригинальной вершины может быть произвольным[12], то соответствующие выбору варианты исходных проекций могут отличаться. В приведенных здесь вариантах проекции $P_6(0)$ 6-мерного гиперкуба Q_6, отличающихся выбором оригинальных вершин, минимизируем проекции графа [8], [9], исключив из них избыточные в рассматриваемом случае реплики. В результате получим:

$$P_6'(0) = 0^{(1^{(3^{(7^{(15^{(31^{(63)},47)},23^{(55)},39)},11^{(27^{(59)},43)},19^{(51)},35)},5^{(13^{(29^{(61)},45)},21^{(53)},37)},9^{(25^{(57)},41)},17^{(49)},33)},)}$$

$$0^{2^{(6^{(14^{(30,46^{(62)})},22^{(54)},38)},10^{(26^{(58)},42)},18^{(50)},34)},4^{(12^{(28^{(60)},44)},20^{(52)},36)},8^{(24^{(56)},40)},16^{(48)},32)}.$$

$$P_6''(0) = 0^{(1,2^{(3^{(7^{(15^{(31^{(63)},47)},23^{(55)},39)},11^{(27^{(59)},43)},19^{(51)},35)},6^{(14^{(30,46^{(62)})},22^{(54)},38)},10^{(26^{(58)},42)},18^{(50)},34)},)}$$

$$0^{4^{(5^{(37)},12^{(13^{(29^{(61)},45)},28^{(60)},44)},20^{(21^{(53)},52)},36)},8^{(9^{(25^{(57)},41)},24^{(56)},40)},16^{\left(17^{(49)},48\right)},32^{(33)})}.$$

Здесь и далее проекции, превышающие по длине строку, даны с переносом. При этом ракурсная вершина на следующей строке повторена, чтобы сохранить уровневость отображения.

Как показано выше, подмножество оригинальных вершин i-го уровня проекции $P_i(a)$ является i-окружением $\mathcal{N}_i(a)$, поэтому независимо от варианта описания проекции содержимое одноименных уровней в них обязательно совпадут, в чем нетрудно убедиться, сравнив $P_6'(0)$ и $P_6''(0)$. Это

[12] Только для экземпляров вершин одного и того же уровня

означает, что при четном ∂ множество основных вершин ∂-компоненты гиперкуба с одним и тем же центром не зависит от того, какой из экземпляров вершин одного уровня (от 2-го и выше) будет выбран оригинальным. Например, при $\partial = 4$ число рассматриваемых уровней $\lfloor \partial/2 \rfloor = 2$, и $n_4 = \sum_{i=0}^{2} \binom{6}{i} = 1 + 6 + 15 = 22$, а из $P_6'(0)$ и $P_6''(0)$ получим:

$$P_2'(0) = 0^{(1^{(3,5,9,17,33)},2^{(6,10,18,34)},4^{(12,20,36)},8^{(24,40)},16^{(48)},32)},$$

$$P_2''(0) = 0^{(1,2^{(3,6,10,18,34)},4^{(5,12,20,36)},8^{(9,24,40)},16^{(17,48)},32^{(33)})}.$$

Как видим, и в том, и в другом случаях подмножества основных вершин 4-компоненты, полученные из проекций $P_2'(0)$ и $P_2''(0)$ совпадают: $V_4^{*\prime} = V_4^{*\prime\prime}$ и

$$\{0, 1, 3, 5, 9, 17, 33, 2, 6, 10, 18, 34, 4, 12, 20, 36, 8, 24, 40, 16, 48, 32\} =$$

$$\{0, 1, 2, 3, 6, 10, 18, 34, 4, 5, 12, 20, 36, 8, 9, 24, 40, 16, 17, 48, 32, 33\}.$$

Для нечетного значения $\partial = 5$ в соответствии с (5) рассмотрим $(\partial+1) / 2 = 3$ уровня проекций:

$$P_3'(0) = 0^{(1^{(3^{(7,11,19,35)},5^{(13,21,37)},9^{(25,41)},17^{(49)},33)},2^{(6^{(14,22,38)},10^{(26,42)},18^{(50)},34)},4^{(12^{(28,44)},20^{(52)},36)},8^{(24^{(56)},40)},16^{(48)},32)},$$

$$P_3''(0) = 0^{(1,2^{(3^{(7,11,19,35)},6^{(14,22,38)},10^{(26,42)},18^{(50)},34)},4^{(5^{(37)},12^{(13,28,44)},20^{(21,52)},36)},8^{(9^{(25,41)},24^{(56)},40)},16^{(17^{(49)},48)},32^{(33)})}.$$

При этом из множества вершин последнего ($\lceil \partial/2 \rceil = \lceil 5/2 \rceil = 3$) рассматриваемого уровня в число основных вершин 5-компоненты будут включены $\binom{s-1}{\lfloor \partial/2 \rfloor} = \binom{5}{2} = 10$ вершин, отстоящих от произвольно выбранной вершины 1-го уровня на расстоянии $\lfloor \partial/2 \rfloor$: для проекции $P_3'(0)$ — это вершина 1, а для $P_3''(0)$ — вершина 2. Оставим на 3-м уровне проекций $P_3'(0)$ и $P_3''(0)$ лишь вершины, порожденные вершинами 1 и 2, соответственно, удалив остальные:

$$P_3'(0) = 0^{(1^{(3^{(7,11,19,35)},5^{(13,21,37)},9^{(25,41)},17^{(49)},33)},2^{(6,10,18,34)},4^{(12,20,36)},8^{(24,40)},16^{(48)},32)},$$

$$P_3''(0) = 0^{(1,2^{(3^{(7,11,19,35)},6^{(14,22,38)},10^{(26,42)},18^{(50)},34)},4^{(5,12,20,36)},8^{(9,24,40)},16^{(17,48)},32^{(33)})}.$$

Заметим, что в рассматриваемых при нечетном ∂ вариантах полученные из $P_3'(0)$ и $P_3''(0)$ множества $V_5^{*\prime}$ и $V_5^{*\prime\prime}$ хотя и равномощны — $n_5 = \binom{s-1}{\lfloor \partial/2 \rfloor} + \sum_{i=0}^{\lfloor \partial/2 \rfloor} \binom{s}{\lfloor \partial/2 \rfloor} = 10 + 1 + 6 + 15 = 32$, но отличаются по составам: $V_5^{*\prime} \neq V_5^{*\prime\prime}$ и

$$\{0,1,3,7,11,19,35,5,\boldsymbol{13,21,37},9,\boldsymbol{25,41},17,\boldsymbol{49},33,2,6,10,18,34,4,12,20,36,8,24,40,16,48,32\} \neq$$

$$\{0,1,2,3,7,11,19,35,6,\boldsymbol{14,22,38},10,\boldsymbol{26,42},18,\boldsymbol{50},34,4,5,12,20,36,8,9,24,40,16,17,48,32,33\}.$$

Здесь несовпадающие элементы множеств выделены жирным курсивом. Отметим также, что, так как в данном случае $\partial = s - 1$, то, как и показано выше, порядок $n_5 = |V_5^*|$ 5-компоненты 6-куба составляет половину порядка гиперкуба: $n_5 = 2^{s-1} = 2^5 = 32$.

Из приведенных выше проекций $P_3'(0)$ и $P_3''(0)$ легко увидеть, что расстояния $d(3, 3)$ между вершинами, оставленными на 3-м уровне каждой из этих проекций, не превышают максимального $d_{\max}(3, 3) = 4$, а расстояния $d(3, 2)$ между любой из этих вершин и вершинами 2-го уровня не превышают $d_{\max}(3, 2) = 5$.

Итак, для конкретизации основных вершин глобальной ∂-компоненты s-куба достаточно в одной из его проекций оставить первые $\partial/2$ уровней (при четном значении ∂) или $(\lfloor \partial/2 \rfloor + 1)$ уровней (при нечетном ∂) и исключить из полученного фрагмента проекции все реплики. Для нечетных значений ∂ на верхнем уровне фрагмента следует оставить только вершины, порожденные из произвольно выбранной вершины 1-го уровня, число таких вершин — $\binom{s-1}{\lfloor \partial/2 \rfloor}$. Например, при $s = 6$, $\partial = 3$ и $\lfloor \partial/2 \rfloor = 1$ получим $n_3 = 12$, а из $P_6'(0)$ —

$$P_2^*(0) = 0^{(1^{(3,5,9,17,33)},2,4,8,16,32)} \text{ и } V_3^* = \{0,1,2,3,4,5,8,9,16,17,32,33\}.$$

Для того, чтобы полностью определить глобальную ∂-компоненту графа, которая помимо уже найденного выше подмножества $V_\partial^*(a)$ основных вершин содержит неизвестное пока подмножество $V_+^*(a)$ транзитных вершин, можно построить систему ∂-уровневых проекций с ракурсными вершинами из $V_\partial^*(a)$. Все вершины этих проекций, не принадлежащие к $V_\partial^*(a)$, выделим здесь серым цветом. Удалим такие вершины из множества вершин последнего ∂-го уровня каждой проекции. Если на нижележащих уровнях с $i < \partial$ такие вершины не имеют продолжение вверх, то их также следует удалить:

$$P_3(0) = 0^{(1^{(3^{(2)},5^{(4)},9^{(8)},17^{(16)},33^{(32)})},2^{(3^{(1)},6^{(4)},10^{(8)},18^{(16)},34^{(32)})},4^{(5^{(1)},6^{(2)},12^{(8)},20^{(16)},36^{(32)})},}$$
$$0^{8^{(9^{(1)},10^{(2)},12^{(4)},24^{(16)},40^{(32)})},16^{(17^{(1)},18^{(2)},20^{(4)},24^{(8)},48^{(32)})},32^{(33^{(1)},34^{(2)},36^{(4)},40^{(8)},48^{(16)})})},$$
$$P_3(1) = 1^{(0^{(2^{(3)},4^{(5)},8^{(9)},16^{(17)},32^{(33)})},3^{(2^{(0)},7^{(5)},11^{(9)},19^{(17)},35^{(33)})},5^{(4^{(0)},7^{(3)},13^{(9)},21^{(17)},37^{(33)})}}$$
$$1^{9^{(8^{(0)},11^{(3)},13^{(5)},25^{(17)},41^{(33)})},17^{(16^{(0)},19^{(3)},21^{(5)},25^{(9)},49^{(33)})},33^{(32^{(0)},35^{(3)},37^{(5)},41^{(9)},49^{(17)})})},$$
$$P_3(2) = 2^{(0^{(1^{(3,5,9,17,33)},4^{(5)},8^{(9)},16^{(17)},32^{(33)})},3^{(1^{(0,5,9,17,33)},7^{(5)},11^{(9)},19^{(17)},35^{(33)})},6^{(4^{(0,5)},7^{(3,5)})},}$$
$$2^{10^{(8^{(0,9)},11^{(3,9)})},18^{(16^{(0,17)},19^{(3,17)})},34^{(32^{(0,33)},35^{(3,33)})})},$$
$$P_3(3) = 3^{(1^{(0^{(2,4,8,16,32)},5^{(4)},9^{(8)},17^{(16)},33^{(32)})},2^{(0^{(1,4,8,16,32)},6^{(4)},10^{(8)},18^{(16)},34^{(32)})},}$$
$$3^{(7^{(5^{(1,4)},6^{(2,4)})},11^{(9^{(0,8)},10^{(2,8)})},19^{(17^{(1,16)},18^{(2,16)})},35^{(33^{(1,32)},34^{(2,32)})})},$$
$$P_3(4) = 4^{(0^{(1^{(3,5,9,17,33)},2^{(3)},8^{(9)},16^{(17)},32^{(33)})},5^{(1^{(0,3,9,17,33)},7^{(3)},13^{(9)},21^{(17)},37^{(33)})},}$$
$$4^{6^{(2^{(0,3)},7^{(3,5)})},12^{(8^{(0,9)},13^{(5,9)})},20^{(16^{(0,17)},21^{(5,17)})},36^{(32^{(0,33)},37^{(5,33)})})},$$
$$P_3(5) = 5^{(1^{(0^{(2,4,8,16,32)},3^{(2)},9^{(8)},17^{(16)},33^{(32)})},4^{(0^{(1,2,8,16,32)},6^{(4)},12^{(8)},20^{(16)},36^{(32)})},}$$
$$5^{7^{(3^{(1,2)},6^{(2,4)})},13^{(9^{(1,8)},12^{(4,8)})},21^{(17^{(1,16)},20^{(4,16)})},37^{(33^{(1,32)},36^{(4,32)})})},$$
$$P_3(8) = 8^{(0^{(1^{(3,5,9,17,33)},2^{(3)},4^{(5)},16^{(17)},32^{(33)})},9^{(1^{(0,3,5,17,33)},11^{(3)},13^{(5)},25^{(17)},41^{(33)})},}$$
$$8^{10^{(2^{(0,3)},11^{(3,9)})},12^{(4^{(0,5)},13^{(5,9)})},24^{(16^{(0,17)},25^{(9,17)})},40^{(32^{(0,33)},41^{(9,33)})})},$$
$$P_3(9) = 9^{(1^{(0^{(2,4,8,16,32)},3^{(2)},5^{(4)},17^{(16)},33^{(32)})},8^{(0^{(1,2,4,16,32)},10^{(2)},12^{(4)},24^{(16)},40^{(32)})},}$$
$$9^{11^{(3^{(1,2)},10^{(2,8)})},13^{(5^{(1,4)},12^{(4,8)})},25^{(17^{(1,16)},24^{(8,16)})},41^{(33^{(1,32)},40^{(8,32)})})},$$
$$P_3(16) = 16^{(0^{(1^{(3,5,9,17,33)},2^{(3)},4^{(5)},8^{(9)},32^{(33)})},17^{(1^{(0,3,5,9,33)},19^{(3)},21^{(5)},25^{(9)},49^{(33)})},}$$
$$16^{18^{(2^{(0,3)},19^{(3,17)})},20^{(4^{(0,5)},21^{(5,17)})},24^{(8^{(0,9)},25^{(9,17)})},48^{(32^{(0,33)},49^{(17,33)})})},$$
$$P_3(17) = 17^{(1^{(0^{(2,4,8,16,32)},3^{(2)},5^{(4)},9^{(8)},33^{(32)})},16^{(0^{(1,2,4,8,32)},18^{(2)},20^{(4)},24^{(8)},48^{(32)})},}$$
$$17^{19^{(3^{(1,2)},18^{(2,16)})},21^{(5^{(1,4)},20^{(4,16)})},25^{(9^{(1,8)},24^{(8,16)})},49^{(33^{(1,32)},48^{(16,32)})})},$$
$$P_3(32) = 32^{(0^{(1^{(3,5,9,17,33)},2^{(3)},4^{(5)},8^{(9)},16^{(17)})},33^{(1^{(0,3,5,9,17)},35^{(3)},37^{(5)},41^{(9)},49^{(17)})},}$$
$$32^{34^{(2^{(0,3)},35^{(3,33)})},36^{(4^{(0,5)},37^{(5,33)})},40^{(8^{(0,9)},41^{(9,33)})},48^{(16^{(0,17)},49^{(17,33)})})},$$
$$P_3(33) = 33^{(1^{(0^{(2,4,8,16,32)},3^{(2)},5^{(4)},9^{(8)},17^{(16)})},32^{(0^{(1,2,4,8,16)},34^{(2)},36^{(4)},40^{(8)},48^{(16)})},}$$
$$33^{35^{(3^{(1,2)},34^{(2,32)})},37^{(5^{(1,4)},36^{(4,32)})},41^{(9^{(1,8)},40^{(8,32)})},49^{(17^{(1,16)},48^{(16,32)})})},$$

Множество помеченных здесь серым цветом (не принадлежащих к $V_\partial^*(a)$) вершин, в полученной таким образом системе, объединяет в себе все транзитные вершины ∂-компоненты: $V_+^* = \{6,7,10,11,12,13,18,19,20,21,24,25,34,35,36,37,40,41,48,49\}$. В данном примере число таких вершин — $|V_+^*| = 20$, а общее число вершин, составляющих искомую глобальную 3-компоненту 6-мерного гиперкуба — $|V_3^*| = n_3 + |V_+^*| = 12 + 20 = 32$. Нетрудно увидеть, что в проекциях полученной здесь системы отсутствуют пути, длина которых между основными вершинами превышала бы заданное $\partial = 3$ значение достижимости. Эта же система проекций может быть использована и для поиска $\partial(k)$-компонент, в которых в дополнение к заданному значению ∂ лимитируется минимальное число k независимых[13] путей между ∂-достижимыми вершинами. Такие вершины в [2] определены как $\partial(k)$-достижимые, или $k(\partial)$-соединимые. Выявить подмножество транзитных вершин при отсутствии лимита на соединимость ($k = 1$) в глобальной ∂-компоненте можно, удалив все реплики из ∂-го уровня проекций системы. Появившиеся в результате этого на уровнях $i < \partial$ висячие (не имеющие продолжения на вышестоящем уровне) транзитные вершины также следует удалить. Полученные таким образом проекции описывают только кратчайшие пути из соответствующих им ракурсных вершин в основные вершины $\partial(1)$-компоненты:

$$P_3(0) = 0^{(1^{(3,5,9,17,33)},2,4,8,16,32)},\quad P_3(8) = 8^{(0^{(1^{(3,5,17,33)},2,4,16,32)},9)},$$

$$P_3(1) = 1^{(0^{(2,4,8,16,32)},3,5,9,17,33)},\quad P_3(9) = 9^{(1^{(0^{(2,4,16,32)},3,5,17,33)},8)},$$

$$P_3(2) = 2^{(0^{(1^{(5,9,17,33)},4,8,16,32)},3)},\quad P_3(16) = 16^{(0^{(1^{(3,5,9,33)},2,4,8,32)},17)},$$

$$P_3(3) = 3^{(1^{(0^{(4,8,16,32)},5,9,17,33)},2)},\quad P_3(17) = 17^{(1^{(0^{(2,4,8,32)},3,5,9,33)},16)},$$

$$P_3(4) = 4^{(0^{(1^{(3,9,17,33)},2,8,16,32)},5)},\quad P_3(32) = 32^{(0^{(1^{(3,5,9,17)},2,4,8,16)},33)},$$

$$P_3(5) = 5^{(1^{(0^{(2,8,16,32)},3,9,17,33)},4)},\quad P_3(33) = 33^{(1^{(0^{(2,4,8,16)},3,5,9,17)},32)}.$$

Заметим, что полученная в данном примере 3(1)-компонента 6-мерного гиперкуба не содержит иных транзитных вершин, кроме как вершин из V_∂^*, т. е. $V_+^* = \emptyset$ и $V_\partial = V_\partial^*$. Очевидно, что такое свойство самодостаточности подмножества основных вершин в обеспечении их взаимной $\partial(1)$-достижимости присуще любым $\partial(1)$-достижимым ($1(\partial)$-соединимым) компонентам гиперкуба, обеспечивая их локальность[14].

Заключение

В работе проведено исследование гиперкубической топологии ВС на предмет ее предельного использования подсистемой, лимитирующей длину пути между вершинами информационного ее графа. Дано понятие о соответствующих такому ограничению компонентах графа ВС. Получена формула, устанавливающая зависимость максимально возможного порядка компоненты гиперкуба от допускаемого расстояния между ее вершинами. Показано, что порядок такой компоненты превышает порядок гиперкубического подграфа графа ВС, соответствующего заданному лимиту, при этом превышение тем существеннее, чем жестче лимит на сетевые задержки между процессами вкладываемой в систему подсистемы. Предложен и проиллюстрирован способ конкретизации вершин в таких компонентах гиперкубической ВС, что позволяет использовать полученные результаты как на этапе конфигурирования вкладываемых в нее подсистем, так и на этапах реконфигурации при отказоустойчивой их реализации.

Результаты работы могут быть полезными также при выборе топологий для вновь проектируемых систем, в качестве критерия сопоставления топологий при этом возможно использование функции порядка ∂-компонент от их достижимости ∂.

Литература

1. Решетняк Ю.Г. О задаче соединения элементов вычислительной системы // Вычислительные системы. 1962. № 3. С. 17–32.
2. Мелентьев В.А. Вложение подсистем, лимитирующих длину и число путей между вершинами графа вычислительной системы // Управление большими системами. 2014. № 47. С. 212-246.
3. Мелентьев В.А. Формальные основы скобочных образов в теории графов // Труды II Международной конференции «Параллельные вычисления и задачи управления» PACO '2004, 4-6 октября 2004г. Москва. 2004. С. 694-706.

[13] Независимые пути между двумя вершинами пересекаются только своими концами.
[14] В локальной ∂-компоненте взаимная ∂-достижимость ее вершин обеспечивается самими этими вершинами [2].

4. Мелентьев В.А., Аналитический подход к синтезу регулярных графов с заданными значениями порядка, степени и обхвата // Прикладная дискретная математика. 2010. № 2(8). С. 74-86.
5. Mulder H.M. The interval function of a graph, Mathematical Centre Tracts V.132. Amsterdam. 1980.
6. Brouwer A.E., Cohen A.M. & Neumaier A. Distance-regular graphs. Berlin: Springer, 1989. 495 pp.
7. Адельсон-Вельский Г.М., Вейсфейлер Б.Ю., Леман А.А., Фараджев И.А. Об одном примере графа, не имеющего транзитивной группы автоморфизмов // Доклады АН СССР. 1969. Т. 185. № 5. С. 975–976.
8. Мелентьев В.А. Метрика, цикломатика и синтез топологии систем и сетей связи // Труды Шестой межд. конф. «Параллельные вычисления и задачи управления» PACO’2012. Москва. 2012. Т. 3. С. 10-25.
9. Мелентьев В.А. Проективное описание графа вычислительной системы и его минимизация // Материалы XIII Международной научно-технической конференции "ИТ-технологии: развитие и приложения", 14-15 декабря 2012 года. Владикавказ. 2012. С. 278-290.

Мелентьев Виктор Александрович. Старший научный сотрудник Института физики полупроводников СО РАН. Окончил Новосибирский электротехнический институт (НЭТИ) в 1976 году. Кандидат технических наук. Автор 98 печатных работ. Область научных интересов: вычислительные системы, их архитектура и структуры, показатели качества и проблемы отказоустойчивого функционирования. E-mail: melva@isp.nsc.ru