Алгоритмы синтеза номиналов и допусков многопараметрических систем

А.В. Саушев

Аннотация. Рассматриваются алгоритмы определения оптимальных значений и допустимых пределов изменения внутренних параметров сложных многопараметрических систем, основанные на аналитическом описании области работоспособности системы при помощи логических *R*–функций. Для цели аппроксимации гиперповерхностей, составляющих область работоспособности, используются гиперсферы.

Ключевые слова: синтез, область работоспособности, запас работоспособности, допустимые пределы изменения, *R*–функции.

Введение

Состояние технической системы (ТС) в любой фиксированный момент времени характеризуется некоторым набором или вектором параметров, среди которых можно выделить:

- входные параметры $\mathbf{u}=(u_1,u_2,\ldots,u_k,\ldots,u_e)$, характеризующие задающие воздействия $u(t)$ и наблюдаемые на входах системы;
- параметры внешних условий $\mathbf{v}=\left(v_1,v_2,\ldots,v_\rho,\ldots,v_f\right)$, характеризующие возмущающие воздействия на систему;
- внутренние параметры $\mathbf{X}=(X_1,X_2,\ldots,X_i,\ldots,X_n)$, характеризующие состояние элементов ТС и называемые также первичными параметрами. Например, для электромеханических систем к ним относятся величины сопротивлений, индуктивностей, емкостей, масс, моментов инерции, жесткостей упругих связей, коэффициенты усиления, постоянные времени, геометрические размеры элементов системы;
- внутренние параметры $\mathbf{Z}^\upsilon=\left(Z_1^\upsilon,Z_2^\upsilon,\ldots,Z_g^\upsilon,\ldots,Z_c^\upsilon\right)$, характеризующие фазовые переменные на выходах устройств, входящих как элементы $\upsilon=\overline{1,h}$, h – число элементов, в состав ТС;
- выходные параметры $\mathbf{Y}=\left(Y_1,Y_2,\ldots,Y_j,\ldots,Y_m\right)$, характеризующие различные функциональные зависимости фазовых переменных на выходах системы от времени или частоты. Эти параметры характеризуют свойства ТС, интересующие потребителя. Они представляют собой параметры-функционалы и параметры, являющиеся граничными значениями диапазонов внешних переменных, в которых сохраняется работоспособность ТС.

Проектирование ТС на этапе параметрического синтеза сводится к решению двух основных задач – определению номинальных значений первичных параметров системы и допустимых пределов их изменения. При проектировании эти параметры определяют вектор **X** управляемых (варьируемых) параметров.

К выходным параметрам на стадии параметрического синтеза относятся показатели назначения, параметрической надежности и экономичности [1]. Показателем параметрической надежности при ограниченных статистических

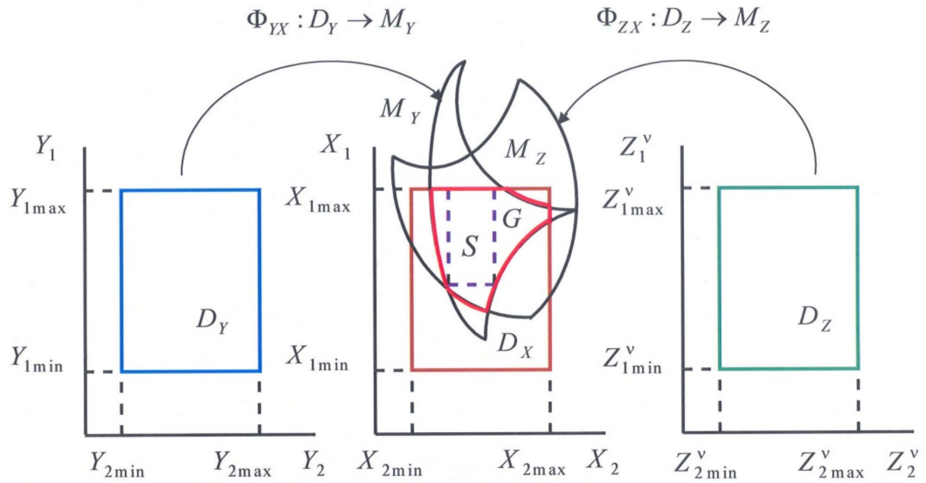

Рис. 1. Геометрическая интерпретация условий работоспособности и допустимых пределов изменения первичных параметров

данных о законах распределения внутренних параметров ТС во времени может являться запас работоспособности [1-4].

В общем случае следует выделять внешние и внутренние условия работоспособности, которые устанавливаются при проектировании ТС.

Под внешними условиями работоспособности будем понимать условия, выполнение которых необходимо для того, чтобы ТС функционировала с требуемыми показателями качества. Эти условия определяются заданными соотношениями между выходными параметрами ТС и техническими требованиями к этим параметрам.

Под внутренними условиями работоспособности будем понимать условия, при которых элементы ТС, способны выполнять возложенные на них функции, сохраняя при этом работоспособное состояние. Эти условия определяются заданными соотношениями между внутренними параметрами $\mathbf{Z}^\nu$ и их допустимыми значениями, а также между первичными параметрами X и их предельными значениями.

Условия работоспособности могут быть односторонними и двухсторонними и для второго (более общего) случая имеют вид:

$$\begin{aligned} &Y_{j\min} \le Y_j = F_j(\mathbf{X}) \le Y_{j\max},\ j = \overline{1,m} \\ &Z_{j\min}^\nu \le Z_j^\nu = F_j^\nu(\mathbf{X}) \le Z_{j\max}^\nu,\ \nu = \overline{1,h} \qquad (1) \\ &X_{i\min} \le X_i \le X_{i\max},\ i = \overline{1,n}, \end{aligned}$$

где $Y_{j\max}(Z_{j\max}^\nu)$, $Y_{j\min}(Z_{j\min}^\nu)$, $Y_j(Z_j^\nu)$ – соответственно максимально и минимально допустимое значения j–го выходного Y_j (внутреннего Z_j^ν) параметра; $F_j(\mathbf{X})$ – оператор связи первичных параметров с внутренними $\mathbf{Z}^\nu$ и выходными Y параметрами; $X_{i\min}$ и $X_{i\max}$ – предельно допустимые значения первичных параметров.

Первое неравенство в системе неравенств (1) является внешним условием работоспособности и с геометрической точки зрения определяет допусковую область $D_Y = \bigcap_{j=1}^{m} D_j$ пространства выходных параметров (Рис. 1).

Область D_Y имеет вид m–мерного гиперпараллелепипеда (бруса) евклидова пространства R^m. Каждой области D_j значений выходных параметров соответствует область M_j значений первичных параметров. Это соответствие может быть записано в виде отображения $\Phi_{YX} : D_Y \to M_Y$ множества $D_Y = \bigcap_{j=1}^{m} D_j$ в множество $M_Y = \bigcap_{j=1}^{m} M_j$. При этом каждое неравенство $\left(F_j(\mathbf{X}) - Y_{j\min}\right) \cdot \left(Y_{j\max} - F_j(\mathbf{X})\right) \ge 0,\ j = \overline{1,m}$

в n–мерном евклидовом пространстве R^n первичных параметров определяет область M_j.

Второе неравенство в системе неравенств (1) является внутренним условием работоспособности и с геометрической точки зрения определяет допусковые области $D_Z^\nu = \bigcap_{j=1}^{m} D_j$, $\nu = \overline{1,h}$ пространства внутренних параметров Z^ν, которые по виду соответствуют области D_Y. Каждой области D_Z^ν, согласно отображению $\Phi_{ZX} : D_Z^\nu \to M_Z^\nu$, в пространстве R^n соответствует область M_Z^ν. Объединение областей M_Z^ν определяет допусковую область $M_Z = \bigcap_{\nu=1}^{h} M_Z^\nu$.

Третье неравенство в системе неравенств (1) также является внутренним условием работоспособности и определяет допусковую область D_X, которая, как и области D_Y и D_Z^ν, имеет форму бруса:

$$D_X = \left\{ X \in R^n | X_{i\min} \le X_i \le X_{i\max},\ i = \overline{1,n} \right\}.$$

Область $G = D_X \bigcap M_Z \bigcap M_Y$, определяемую пересечением областей D_X, M_Z и M_Y называют областью работоспособности. Эта область определяет множество допустимых значений первичных параметров, при которых выполняются все требования, предъявляемые к выходным и внутренним параметрам системы. Форма области работоспособности может иметь весьма сложную конфигурацию.

Для решения задачи назначения допусков на значения первичных параметров большинство известных методов с целью упрощения реальную область допустимых изменений параметров (область работоспособности) заменяют некоторым ортогональным гиперпараллелепипедом (брусом) S (на Рис.1 показан пунктиром) оптимальным в том или ином смысле [2, 5]. Допустимые пределы изменения устанавливаются при этом независимо на каждый первичный параметр. Однако такая замена приводит к большой методической погрешности, которая нелинейно возрастает с ростом числа первичных параметров [5]. Кроме того, для не односвязных областей работоспособности известные методы не всегда имеют однозначное решение [2, 5, 6]. Для повышения точности аппроксимации области работоспособности используют также эллипсоидальную функцию [7–10]. Однако и в этом случае методическая погрешность аппроксимации для многопараметрических систем, остается недопустимо большой [5]. Таким образом, актуальной является задача разработки более точных методов аппроксимации области работоспособности и назначения допусков на параметры элементов ТС.

Для решения задач параметрического синтеза в качестве целевой функции при оптимизации ТС, характеризующихся параметрической нестабильностью, предлагается выбрать минимальный запас работоспособности, который необходимо максимизировать. В случае оптимизации по одному из показателей назначения, например, по времени переходного процесса или по интегральному показателю качества, запас работоспособности следует учитывать как ограничение, обеспечивая при синтезе его требуемое предельное значение. Обоснование выбора предлагаемой целевой функции приводится в работах [1, 11].

В статье рассматриваются алгоритм назначения допусков на первичные параметры многопараметрических ТС, характеризующийся низкой методической погрешностью, а также алгоритм параметрического синтеза по критерию запаса работоспособности.

1. Алгоритм назначения допусков на первичные параметры системы

Будем предполагать, что в результате использования известных методов [5] получено множество граничных точек области работоспособности. На основе данной информации требуется получить аналитическое описание области работоспособности, которое будет определять допустимые пределы изменения первичных параметров ТС.

Известные алгоритмы решения этой задачи [5, 12–15] основаны на линейной аппроксимации выпуклых областей работоспособности. Они требуют больших затрат времени на вычисления и малопригодны для ТС, состоящих из большого числа первичных параметров. При использовании для целей аппроксимации поверхностей второго порядка известные алгоритмы [2, 6, 7] все множество граничных точек описывают одной замкнутой поверхностью, а это, как отмечалось выше, для многопараметрических ТС приводит к значительным погрешностям аппроксимации.

Учитывая, что область работоспособности представляет собой пересечение конечного числа гиперповерхностей f_g, $g=1,2,\ldots,d$; $d=2(m+h+n)$, определяемых неравенствами (1) и представленных в одном из следующих видов $F_j(X)-Y_{j\min}\geq 0$, $Y_{j\max}-F_j(X)\geq 0$, $F_j^v(X)-Z_{j\min}^v\geq 0$, $Z_{j\max}^v-F_j^v(X)\geq 0$, $X_i-X_{i\min}\geq 0$, $X_{i\max}-X_i\geq 0$, можно записать:

$$G=f_1\wedge f_2\wedge\ldots\wedge f_g\wedge\ldots\wedge f_d .$$

Для существенного повышения достоверности математического описания областей работоспособности предлагается аппроксимировать каждую из гиперповерхностей f_g в отдельности.

В том случае, если функции f_g принадлежат к классу *R*–функций [16] можно воспользоваться их свойствами и перейти от логической к аналитической форме записи [6]. Рассмотрим это обстоятельство более подробно.

Будем считать, что любая действительная переменная, например *X*, принадлежит классу либо положительных, либо отрицательных чисел. Эту принадлежность будем определять с помощью предиката $Q(X) \sim (X \geq +0)=1$. Точку $N(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ *n*-мерного пространства R^n назовем вырожденной, если хотя бы одна из ее координат равняется нулю. Таким образом, множество всех вырожденных точек *n*-мерного пространства представляет собой объединение *n* гиперплоскостей $X_i=0\left(i=1,2,\ldots,n\right)$, которое можно рассматривать как единую гиперповерхность *H*. Эта гиперповерхность разбивает пространство R^n на 2^n областей $H_j\left(j=1,2,\ldots,2^n\right)$. Действительно, каждой невырожденной точке $N(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ соответствует некоторый набор двоичных величин $X_1,X_2,\ldots,X_n$, определяемый формулой $X_i=Q(X_i)$, $i=\overline{1,n}$. Поскольку различных наборов этих двоичных величин может быть 2^n, то множество всех невырожденных точек разбивается на 2^n подмножеств. Точкам каждого из этих подмножеств соответствует один и тот же набор двоичных величин $X_1,X_2,\ldots,X_n$.

Пусть $Y=F(\mathbf{X})$ есть функция, определенная всюду в пространстве R^n. Данная функция является *R*–функцией, если в каждой из областей $H_j\left(j=1,2,\ldots,2^n\right)$ она сохраняет постоянный знак, т.е. $Q\left[F\left(X_1,X_2,\ldots,X_n\right)\right]=\varphi_i=\text{const}$, где φ_i – двоичная величина одна и та же для всех точек области $H_j\left(j=1,2,\ldots,2^n\right)$.

Так как каждому набору двоичных переменных $X_i=Q(X_i)$, $i=\overline{1,n}$ соответствуют определенная область H_j и величина φ_i, то можно получить булеву функцию $\varphi\left(X_1,X_2,\ldots,X_n\right)$ такую, что выполняется равенство

$$Q\left[F\left(X_1,X_2,\ldots,X_n\right)\right]=\varphi\left[Q(X_1),Q(X_2),\ldots Q(X_n)\right].$$

Справедливо и обратное утверждение. Если выполняется последнее равенство, то функция $F\left(X_1,X_2,\ldots,X_n\right)$ есть *R*–функция.

Для построения *R*-конъюнкции удобно использовать следующую формулу [6]:

$$f_g\wedge_\alpha^k f_{g+1}=$$
$$=0{,}5\left(f_g+f_{g+1}-\sqrt{f_g^2+f_{g+1}^2-2\alpha f_g f_{g+1}}\right)\cdot$$
$$\cdot R\left(f_g,f_{g+1}\right),$$

где $R\left(f_g,f_{g+1}\right)$ - функция, обеспечивающая наличие k производных *R*-конъюнкции, $\alpha\in\left[-1;1\right]$ – параметр преобразования, $f_g=f_g(\mathbf{X})$ уравнение *g*-ой гиперповерхности области *G*.

В том случае, если не требуется, чтобы *R*-конъюнкция была дифференцируема, эта формула может быть упрощена. Принимая коэффициент $\alpha=1$, получим

$$f_g \wedge f_{g+1} = 0,5\left(f_g + f_{g+1} - \left|f_g - f_{g+1}\right|\right).$$

Последовательно используя рассмотренное выше преобразование можно получить аналитическое выражение аппроксимирующее область работоспособности, которое с высокой достоверностью будет определять допустимые пределы изменения первичных параметров ТС. Например, для случая, когда $m = n = 2,\ h = 0$ область работоспособности задается уравнением

$$G = 0,5\left(M_Y + D_X - \left|M_Y - D_X\right|\right),$$

$$M_Y = 0,5\left(c + d - \left|c - d\right|\right),$$

$$D_X = 0,5\left(e + f - \left|e - f\right|\right),$$

$$c = Y_{1\max} - Y_{1\min} - \left|2F_I\left(X_1, X_2\right) - Y_{1\max} - Y_{1\min}\right|;$$

$$d = Y_{2\max} - Y_{2\min} - \left|2F_2\left(X_1, X_2\right) - Y_{2\max} - Y_{2\min}\right|;$$

$$e = X_{1\max} - X_{1\min} - \left|2X_1 - X_{1\max} - X_{1\min}\right|;$$

$$f = X_{2\max} - X_{2\min} - \left|2X_2 - X_{2\max} - X_{2\min}\right|.$$

Рассмотрим вопрос получения математического описания для гиперповерхностей f_g.

Для сложных ТС, характеризующихся высокой размерностью пространства первичных параметров, аппроксимировать гиперповерхности f_g, заданные множеством граничных точек, предлагается регулярными фигурами, зависящими от небольшого фиксированного числа параметров. Наиболее точную аппроксимацию позволяют получить гиперэллипсоиды. Однако, как показал анализ тестовых примеров, для аппроксимации достаточно использовать частный случай эллипсоидов – сферическую функцию. Предлагаемый подход позволяет, с одной стороны, существенно упростить аналитическое описание области работоспособности, а с другой стороны, гарантировать достаточно низкую методическую погрешность такой аппроксимации.

Запишем уравнение сферы в декартовых прямоугольных координатах в пространстве R^n первичных параметров системы:

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - X_i^0)^2 = r^2,$$

где $X_i^0,\ i = \overline{1,n}$ – координаты, определяющие центр гиперсферы; r – параметр, определяющий ее радиус. Перепишем это уравнение в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + \sum_{i=1}^{n} a_i X_i + a_0 = 0, \qquad (2)$$

где $a_i = -2X_i^0,\ a_0 = \sum_{i=1}^{n}\left(X_i^0\right)^2 - r^2$.

Получим расчетные формулы для определения неизвестных коэффициентов в уравнении (2), воспользовавшись для этой цели методом наименьших квадратов:

$$\sum = \sum_{k=1}^{N}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i^2(R_k) + \sum_{i=1}^{n} a_i X_i(R_k) + a_0\right]^2 = \min_a,$$

где $R_k,\ k = \overline{1,N}$ – массив граничных точек для аппроксимируемой гиперповерхности f_g.

Для минимизации суммы квадратов отклонений, приравняем к нулю частные производные по коэффициентам $a_i, i = \overline{0,n}$. Для упрощения записи вместо $X_i(R_k)$ будем писать X_{ki}:

$$\frac{\partial \sum}{\partial a_i} = 2\sum_{k=1}^{N}\left[\sum_{i=1}^{n} X_{ki}^2 + \sum_{i=1}^{n} a_i X_{ki} + a_0\right] \cdot X_{ki} = 0,$$
$$i = \overline{0,n}.$$

После преобразований получим систему линейных алгебраических уравнений, решая которую можно получить искомые коэффициенты $a_0, a_1, ..., a_n$:

$$\begin{cases} a_0 N + ... + a_i \sum_{k=1}^{N} X_{ki} + ... + a_n \sum_{r=1}^{N} X_{rn} + \sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{n} X_{ki}^2 = 0 \\ \cdots \\ a_0 \sum_{k=1}^{N} X_{ki} + ... + a_i \sum_{k=1}^{N} X_{ki}^2 + ... + a_n \sum_{k=1}^{N} X_{ki} X_{kn} + \sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{n} X_{ki}^3 = 0 \\ \cdots \\ a_0 \sum_{k=1}^{N} X_{kn} + ... + a_i \sum_{k=1}^{N} X_{ki} X_{kn} + ... + a_n \sum_{k=1}^{N} X_{kn}^2 + \sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{n} X_{ki}^2 X_{kn} = 0 \end{cases}. \qquad (3)$$

Представим полученную систему уравнений в матричной форме записи:

$$(\mathbf{F}^T\mathbf{F})\mathbf{A} = \mathbf{Q},$$

где **F** – матрица базисных функций по всему множеству заданных граничных точек R_k; **A** – матрица искомых неизвестных коэффициентов;

$\mathbf{F}^T$ – транспонированная матрица $\mathbf{F}$; $\mathbf{Q}$ – матрица постоянных коэффициентов. При этом

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & \cdots & X_{i1} & \cdots & X_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & X_{1k} & \cdots & X_{ik} & \cdots & X_{nk} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & X_{1N} & \cdots & X_{iN} & \cdots & X_{nN} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{n} X_{ki}^2 \cdot 1 \\ \cdots \\ -\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{n} X_{ki}^2 \cdot X_{ki} \\ \cdots \\ -\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{n} X_{ki}^2 \cdot X_{kn} \end{bmatrix}.$$

Матрица произведения $\mathbf{F}^T\mathbf{F} = \mathbf{\Phi}$ определяет матрицу известных коэффициентов в системе уравнений (3) при неизвестных коэффициентах $a_0, a_1, ..., a_n$.

Решение системы уравнений в матричной форме записи имеет следующий вид:

$$\mathbf{A} = \mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{Q} = \left(\mathbf{F}^T\mathbf{F}\right)^{-1}\mathbf{Q}. \quad (4)$$

Это решение может быть без труда получено с помощью специальных встроенных функций в различных системах программирования. При этом, достаточно часто, для удобства программирования в системе уравнений (3) первое уравнение следует записывать последним и счет начинать не с нуля, а с единицы.

После определения координат центра гиперсферы и ее радиуса, необходимо вычислить методическую погрешность аппроксимации, которая рассчитывается по следующей формуле:

$$\mu = 1 - \frac{1}{rN}\left(\sum_{k=1}^{N}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(X_{ki} - X_i^0\right)^2}\right).$$

Вычисленное значение μ должно быть меньше допустимого значения $\mu_{\text{доп}}$, определяемого заданной погрешностью аппроксимации. Для большинства ТС $\mu_{\text{доп}} \in [0,05; 0,1]$ при задании значений первичных параметров в относительных единицах.

В том случае, если множество граничных точек неизвестно, уравнение, описывающее гиперповерхность f_g можно получить на основе использования методов планирования эксперимента [17].

2. Алгоритм параметрической оптимизации системы по критерию запаса работоспособности

Задание области работоспособности в виде единого аналитического выражения, а также использование для описания этой области поверхностей гиперсфер позволяют получить выражение для целевой функции при оптимизации ТС по критерию максимизации запаса работоспособности.

В пространстве R^n первичных параметров введем метрику l, которая является функцией координат двух любых точек этого пространства, например точек A и B. При этом $l = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\mu_i\left(X_i(A) - X_i(B)\right)^2}$, где $X_i(A)$, $X_i(B)$ – координаты векторов точек A и B соответственно; μ_i – нормирующий множитель по i–ой координате параметров $\mathbf{X}$. Если одна из точек, например точка A, является граничной точкой области работоспособности, а точка B находится внутри этой области и ее координаты характеризуют состояние ТС в рассматриваемый момент времени, то данная метрика будет определять запас работоспособности системы и служить критерием определения координат оптимальной точки [1, 15, 18].

Перепишем выражение в формуле (2) в следующем виде:

$$f_0(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} X_i^0 X_i + \sum_{i=1}^{n}\left(X_i^0\right)^2 - r^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(X_i - X_i^0\right)^2 - r^2.$$

Выразим координату X_i через радиус r гиперсферы и метрику l, характеризующую запас работоспособности ТС. При этом:

$$X_i = X_i^0 + r - l$$

Подставляя значение X_i в выражение для функции $f_0(\mathbf{X})$, получим:

$$f_0(\mathbf{X}) = (r-l)^2 - r^2 .$$

Откуда

$$l = r - \sqrt{r^2 + f_0(\mathbf{X})} .$$

Из определения R–функции следует, что полученное выражение для l относится к их классу. По аналогии с R-конъюнкцией, описывающей область G, получим следующую R–функцию:

$$\lambda = 0,5\left(L + D_X - \left|L - D_X\right|\right),$$

где L – свертка R–конъюнкций l, определяющих расстояние от внутренней точки области работоспособности до соответствующей гиперповерхности f_g .

Для дальнейшего изложения сущности предлагаемого алгоритма воспользуемся следующим свойством R–конъюнкций: при любом числе R-функций $f_j(\mathbf{X})$, $j = \overline{1,m}$ значение R–функции G, аналитически описывающей границу области работоспособности в виде конъюнкции этих функций, для любой внутренней точки области определяется значением функции $f_\rho(\mathbf{X})$, которое является наименьшим среди всех других R–функций

$$f_j(\mathbf{X}):\ \forall R(\mathbf{X}) \in G, f_{1,m}(\mathbf{X}) = G = f_\rho\left[R(\mathbf{X})\right],$$

где $f_\rho\left[\mathrm{R}(\mathbf{X})\right] = \inf f_j\left[R(\mathbf{X})\right], j = 1,\ldots\rho,\ldots,m$.

Исходя из правила объединения R–функций в R–конъюнкции, следует, что после выполнения m операций свертки значение функции G будет тождественно равно такому значению R–функции $f_\rho(\mathbf{X})$, которое принимает наименьшее значение из всех R–функций $f_j(\mathbf{X})$, $j = \overline{1,m}$, составляющих границу области работоспособности.

Таким образом, функция λ, по аналогии с функцией G, может быть использована в качестве целевой функции при параметрическом синтезе ТС по критерию запаса работоспособности.

Если область работоспособности является односвязной областью, для оптимизации может быть использован любой метод одномерного поиска, включая разработанный автором модифицированный алгоритм симплексного поиска [1]. В самом общем случае, когда область работоспособности является не односвязной, возможно использование метода статистических испытаний с генерацией точек на основе псевдослучайной последовательности ЛПτ–поиска [19].

В том случае, если при параметрическом синтезе запас работоспособности является лишь ограничением, а оптимизация ведется по другому критерию, вначале определяется допусковая область G_l , в пределах которой запас работоспособности ТС больше или равен заданному значению l. Уравнение, описывающее область G_l , будет иметь следующий вид:

$$G_l = 0,5\left(M_l + D_X - \left|M_l - D_X\right|\right)$$

$$\begin{cases} M_l = M_{l2m} = 0,5\left(M_{l2m-1} + \varphi_{2m} - \left|M_{l2m-1} - \varphi_{2m}\right|\right); \\ M_{l2m-1} = 0,5\left(M_{l2m-2} + \varphi_{2m-1} - \left|M_{l2m-2} - \varphi_{2m-1}\right|\right); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ M_{lj} = 0,5\left(M_{lj-1} + \varphi_j - \left|M_{lj-1} - \varphi_j\right|\right); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ M_{l2} = 0,5\left(M_{l1} + \varphi_2 - \left|M_{l1} - \varphi_2\right|\right); \\ M_{l1} = \varphi_1 \end{cases}$$

$$\varphi_1 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} X_i^0 X_i + \sum_{i=1}^{n}\left(X_i^0\right)^2 - \left(r_1 - l\right)^2 .$$

Рассмотренные в статье алгоритмы решения поставленных задач доведены до программного обеспечения и апробированы на тестовых примерах и реальных электротехнических системах.

3. Пример

Для ТС, заданной множеством граничных точек, требуется получить аналитическое описание ее границы, определяющее допуск на значения первичных параметров системы, а также вычислить максимальный запас работоспособности и построить допусковую область G_l с заданным запасом работоспособности $l = 0,2$.

Для наглядности рассмотрим ТС, первичные параметры которой заданы в относительных единиц, а условия работоспособности (1) имеют следующий вид:

$$f_1(\mathbf{X}) = f_1(X_1, X_2) = X_1^2 + X_2^2 - 2X_1X_{11}^0 - 2X_2X_{12}^0 + \\ +(X_{11}^0)^2 + (X_{12}^0)^2 - r_1^2 \le 0;$$

$$f_2(\mathbf{X}) = f_2(X_1, X_2) = X_1^2 + X_2^2 - 2X_1X_{21}^0 - 2X_2X_{22}^0 + \\ +(X_{21}^0)^2 + (X_{22}^0)^2 - r_2^2 \le 0;$$

$$f_3(\mathbf{X}) = f_3(X_1, X_2) = X_1^2 + X_2^2 - 2X_1X_{31}^0 - 2X_2X_{32}^0 + \\ +(X_{31}^0)^2 + (X_{32}^0)^2 - r_3^2 \le 0.$$

$$X_1 \ge 0;\ 1 - X_1 \ge 0;\ X_2 \ge 0;\ 1 - X_2 \ge 0.$$

При аппроксимации границы области работоспособности ТС по формуле (4) были получены следующие численные значения:

$$R_1 = 1{,}05;\ R_2 = 0{,}95;\ R_3 = 0{,}8;\ X_{11}^0 = -0{,}1;$$
$$X_{12}^0 = 0;\ X_{21}^0 = 0;\ X_{22}^0 = 0{,}8;\ X_{31}^0 = 1;\ X_{32}^0 = -0{,}4.$$

Область работоспособности G описывается аналитически уравнением:

$$G = 0{,}5\left(M_Y + D_X - \left|M_Y - D_X\right|\right),$$

$$M_Y = 0{,}5\begin{pmatrix} f_{12}(X_1, X_1) + f_3(X_1, X_1) - \\ -\left|f_{12}(X_1, X_1) - f_3(X_1, X_1)\right| \end{pmatrix}$$

$$f_{12}(X_1, X_1) = 0{,}5\begin{pmatrix} f_1(X_1, X_1) + f_2(X_1, X_1) - \\ -\left|f_1(X_1, X_1) - f_2(X_1, X_1)\right| \end{pmatrix}$$

$$D_X = 0{,}25\left(2 - |2X_1 - 1| - |2X_2 - 1| - \big||2X_1 - 1| - |2X_2 - 1|\big|\right).$$

Аналогичным образом описывается и допусковая область G_l, только в уравнениях $f_1(\mathbf{X})$, $f_2(\mathbf{X})$, $f_3(\mathbf{X})$ вместо радиусов r_1, r_2, r_3 следует соответственно писать $r_1 - l$, $r_2 - l$, $r_3 - l$.

На Рис. 2 в пространстве параметров X_1, X_2 приведены аппроксимирующие область работоспособности окружности (выделены сплошными линиями). Ограничением при аналитическом описании этой области, как видно из Рис. 2, является также неравенство $X_2 \ge 0$.

Ограничительные линии, представленные на Рис. 2 пунктиром, определяют допусковую область G_l, которой соответствует запас работоспособности системы $l = 0{,}2$.

Запишем выражение для целевой функции λ. В общем случае $\lambda = 0{,}5\left(L + D_X - \left|L - D_X\right|\right)$, где $L = l_1 \wedge l_2 \wedge l_3$. При этом $l_1 = r_1 - \sqrt{r_1^2 + f_1(\mathbf{X})}$, $l_2 = r_2 - \sqrt{r_2^2 + f_2(\mathbf{X})}$, $l_3 = r_3 - \sqrt{r_3^2 + f_3(\mathbf{X})}$.

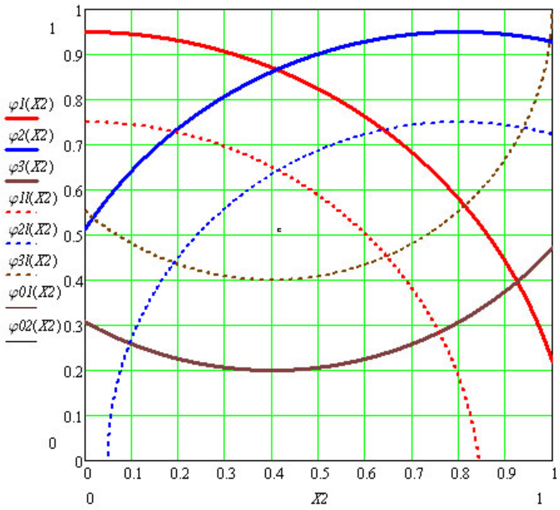

Рис. 2. Иллюстрация допустимых пределов изменения первичных параметров

Используя свойства R–функций, окончательно получим:

$$L = 0{,}25\left(l_1 + l_2 + l_3 - |l_1 - l_2| - \big|l_1 + l_2 - l_3 - |l_1 - l_2|\big|\right).$$

Выражение для аналитического описания допусковой области D_X получено выше.

Для оптимизации был использован разработанный модифицированный алгоритм симплексного поиска [20]. В результате были получены следующие координаты оптимальной точки: $X_{1\text{опт}} = 0{,}511$, $X_{2\text{опт}} = 0{,}416$. На Рис. 2 они показаны в виде точки. При этом максимальный запас работоспособности ТС получился равным $L = 0{,}3107$. При заданных ограничениях на значения первичных параметров системы $l \in [0; 0{,}5]$.

Заключение

Предложенные алгоритмы параметрического синтеза технических систем позволяют повысить достоверность аппроксимации области работоспособности, что особенно актуально для сложных систем, характеризующихся большим числом первичных параметров. Полученное выражение для целевой функции позволяет достаточно просто решить задачу параметрической оптимизации системы по критерию запаса работоспособности. Следует отметить, что разработанные алгоритмы целесообразно использовать при большой размерности пространства внутренних параметров. В этом случае единственной альтернативой остается аппроксимация области работоспособности вписанным в нее гиперпараллелепипедом. Однако при таком подходе к назначению допусков на параметры системы методическая погрешность аппроксимации становится недопустимо большой. Это является следствием того, что при больших размерностях пространства первичных параметров основной объем области работоспособности сосредоточен в непосредственной близости от ее границы.

Рассмотренные алгоритмы были апробированы на тестовых примерах и при решении задач параметрического синтеза разнообразных электромеханических систем.

Литература

1. Саушев, А.В. Параметрический синтез электротехнических устройств и систем / А.В. Саушев. – СПб.: ГУМРФ имени адмирала С.О. Макарова, 2013. – 315 с.
2. Абрамов, О.В. Параметрическая коррекция систем управления / О. В. Абрамов, Ф. И. Бернацкий, В. В. Здор. – М.: Энергоиздат, 1982. – 175 с.
3. Саушев, А.В. Основы управления состоянием электротехнических систем объектов водного транспорта / А. В. Саушев // СПб.: ГУМРФ имени адмирала С.О. Макарова, 2015. – 222 с.
4. Норенков, И.П. Основы автоматизированного проектирования / И.П. Норенков. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. – 336 с.
5. Саушев, А.В. Области работоспособности электротехнических систем / А. В. Саушев. – СПб.: Политехника, 2013. – 412 с.
6. Саушев, А.В. Аналитический метод назначения допусков на параметры динамических систем / А.В. Саушев // Информатика и системы управления. – 2012. – №3(33). – С. 120 – 131.
7. Диго, Г.Б. Использование эллипсоидов для описания области работоспособности / Г. Б. Диго, Н. Б. Диго // Информатика и системы управления. – 2008. – № 1 (15). – С. 22 – 27.
8. Черноусько, Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов / Ф.Л. Черноусько. – М.: Наука, 1988. – 320 с.
9. Sapatnekar S. S. Design by Optimization / The Circuits and Filters Handbook, W. K. Chen, Ed., Second Edition. – CRC Press, 2003. – 2961 p.
10. Srivastava A., Sylvester D., Blaauw D., Statistical analysis and Optimization for VLSI: Timing and Power. – Springer, 2005. – 279 p.
11. Саушев, А. В. Запас работоспособности как целевая функция при синтезе технических систем / А.В. Саушев // Межвузовский сборник научных трудов «Математика и ее приложения». – 2011. – Вып. 3. – СПб. – С. 190 – 198.
12. Диго, Г. Б. Реализация параллельного алгоритма аппроксимации области работоспособности выпуклым многогранником / Г.Б. Диго, Н. Б. Диго // Информатика и системы управления. – 2006. – № 1 (11). – С. 167–174.
13. Абрамов, О.В., Параллельные алгоритмы построения области работоспособности / О. В. Абрамов, Г. Б. Диго, Н. Б. Диго, Я. В. Катуева // Информатика и системы управления. – 2004. – № 2 (8). – С. 121 – 133.
14. Conti M., Orcioni S., Turchetti C., Parametric Yield Optimization of MOS VLSI circuits based on simulated annealing and its parallel implementation// IEEE Proc. Circuits Devices Syst., vol. 141, No. 5, October 1994. – P. 387 – 398.
15. Саушев, А.В. Параметрический синтез технических систем на основе линейной аппроксимации области работоспособности / А. В. Саушев // Автометрия. – 2013. – Т.49, № 1. – С. 61–67.
16. Рвачев, В.Л. Геометрические приложения алгебры логики / В. Л. Рвачев. – Киев: Техника, 1967. – 213 с.
17. Саушев, А. В. Планирование эксперимента в электротехнике / А.В. Саушев. – СПб: СПГУВК, 2012. – 272 с.
18. Саушев, А.В. Метод и алгоритмы параметрического синтеза электротехнических систем по критерию запаса работоспособности / А. В. Саушев // Информационные технологии. – 2012. – № 12. – С. 24 – 29.
19. Соболь, И.М. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями / И. М. Соболь, Р. Б. Статников. – М.: Дрофа, 2006. – 176 с.
20. Саушев, А.В. Сеточный метод построения областей работоспособности технических объектов на основе алгоритма симплексного поиска / А.В. Саушев // Журнал С.-Петерб. гос. ун-та водных коммуникаций. – 2010. – Вып. 1 (V). – СПб: Изд-во СПГУВК. – С. 58 – 69.

Саушев Александр Васильевич. Заведующий кафедрой ЭП и ЭОБУ ГУМРФ имени адмирала С.О. Макарова Окончил Ленинградский институт водного транспорта в 1976 году. Кандидат технических наук, доцент. Автор около 200 опубликованных работ, включая 4 монографии. Область научных интересов: электромеханика, информационные технологии. E-mail: saushev@bk.ru