Идентификация билинейных динамических систем с помехой в выходном сигнале

Д.В. Иванов, О.А. Кацюба, О.В. Усков

Аннотация. Предложен алгоритм, являющийся обобщением метода наименьших квадратов, который позволяет получать сильно состоятельные оценки параметров билинейных динамических систем при наличии помех наблюдения в выходном сигнале в условиях отсутствия информации о законе распределения помех.

Ключевые слова: параметрическая идентификация, модель выходной ошибки, метод наименьших квадратов.

Введение

Билинейные системы являются простейшим обобщением линейных динамических систем. Моделирование физических процессов с помощью билинейных систем находит применение во многих областях науки, таких как ядерная физика, электрические сети, химическая кинетика, гидродинамика и т.д. [1]

В настоящее время активно развиваются методы идентификации билинейных динамических систем с помехой в выходном сигнале, такие как инструментальные переменные [2], компенсирующий смещение метод наименьших квадратов [3], метод максимального правдоподобия [4] и методы на основе высших статистик [5]. Анализ существующих методов показал, что метод инструментальных переменных имеет малую точность, а остальные методы требуют априорную информацию, которая, обычно неизвестна: закона распределения и т.д.

В работе предложен метод, являющийся обобщением метода наименьших квадратов [6], который позволяет получать сильно состоятельные оценки параметров билинейных систем, и не требует, по сравнению с методом наименьших квадратов, дополнительной априорной информации о законе распределения помехи.

1. Постановка задачи

Рассмотрим билинейную динамическую систему, описываемую следующими стохастическими уравнениями с дискретным временем $i = \ldots -1,0,1,\ldots$:

$$z_i - \sum_{m=1}^{r} b_0^{(m)} z_{i-m} = \sum_{m=0}^{r_1} a_0^{(m)} x_{i-m} + \sum_{m=0}^{r_2} \sum_{k=1}^{r_3^{(m)}} c_0^{(mk)} x_{i-m} z_{i-k}, \qquad (1)$$

$$y_i = z_i + \xi_i.$$

где z_i, y_i -ненаблюдаемая и наблюдаемая выходные переменные;

x_i – наблюдаемая переменная; ξ_i – помеха наблюдения в выходном сигнале.

Предположим, что выполняются следующие условия:

1. Множество $\tilde{\mathrm{B}}$, которому априорно принадлежат истинные значения параметров устойчивой, наблюдаемой и управляемой билинейной динамической системы является компактом.

2. Случайный процесс $\{\xi_i\}$ является мартингал-разностью и удовлетворяют следующим условиям: $E\left(\xi_{i+1} / F_i\right) = 0$ п.н., $E\left(\xi_{i+1}^2 / F_i\right) = C_{i+1} \le \pi < \infty$ п.н., $E\left(\xi_i^4\right) \le \pi < \infty$, $E\left(\xi_i^2\right) \le \pi$, где F_i $-\sigma$ - алгебра, индуцированная семейством непрерывных случайных величин $\{\xi(t), t \in T_i\}, T_i = \{t; t \le i, t \in Z_c$ - множество целых чисел$\}$.

3. Входной сигнал x_i является случайным процессом с $E(x_i) = 0$, $E(x_i^2) = \sigma_x^2 < \infty$ и удовлетворяет условию постоянного возбуждения порядка $r_1 + 1$, т.е. с вероятностью 1 пределы существуют

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \phi_x^{(i)} \left(\phi_x^{(i)}\right)^T = H_{xx},$$

где $\phi_x^{(i)} = \left(x_i, \ldots, x_{i-r_1}\right)^T$,

$$H_{xx} = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & h_x(1) & \ldots & h_x(r_1) \\ h_x(1) & \sigma_x^2 & \ldots & h_x(r_1 - 1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_x(r_1) & h_x(r_1 - 1) & \ldots & \sigma_x^2 \end{pmatrix}$$

и матрица H_{xx} положительно определена.

4. $\{x_i\}$ статистически не зависит от $\{\xi_i\}$.

Заметим, что из предположений 1-4, непосредственно следует, что для случайного процесса $\{z_i\}$ с начальными условиями $z_0 = \ldots = z_{1-r} = 0$ с вероятностью 1 существует предел

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \begin{pmatrix} \phi_z^{(i)} \\ \hline \phi_x^{(i)} \\ \hline \phi_{xz}^{(i)} \end{pmatrix} \left(\left(\phi_z^{(i)}\right)^T \;\vdots\; \left(\phi_x^{(i)}\right)^T \;\vdots\; \left(\phi_{xz}^{(i)}\right)^T \right) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \left(\begin{array}{c|c|c} H_{zz} & H_{zx} & H_{z \cdot xz} \\ \hline H_{zx}^T & H_{xx} & H_{x \cdot xz} \\ \hline H_{z \cdot xz}^T & H_{x \cdot xz}^T & H_{xz \cdot xz} \end{array}\right) = H,$$

$$\phi_z^{(i)} = \left(z_{i-1}, \ldots, z_{i-r}\right)^T,$$

$$\phi_{xz}^{(i)} = \left(x_i\, z_{i-1}, \ldots, x_i\, z_{i-r_3^{(0)}} \;\vdots\; x_{i-1} z_{i-1}, \ldots, x_{i-1} z_{i-r_3^{(1)}} \;\vdots\; \ldots \;\vdots\; x_{i-r_2} z_{i-1}, \ldots, x_{i-r_2} z_{i-r_3^{(r_2)}} \right)^T,$$

причем H^* существует, ограничена и положительно определена.

Требуется определять оценки неизвестных коэффициентов динамической системы описываемой уравнением (1) по наблюдаемым последовательностям y_i, x_i, при известных порядках, *r, r₁*, *r₂* и *r₃* определить оценки истинных значений параметров.

2. Критерий для оценивания параметров

Система может быть записана как линейная регрессия

$$y_i = \varphi_i^T \theta_0 + \varepsilon_i, \tag{2}$$

где $\varphi_i = \left(\left(\phi_y^{(i)}\right)^T \;\vdots\; \left(\phi_x^{(i)}\right)^T) \;\vdots\; \left(\phi_{xy}^{(i)}\right)^T \right)^T$, $\phi_y^{(i)} = \left(y_{i-1}, \ldots, y_{i-r}\right)^T$, $\phi_\xi^{(i)} = \left(\xi_{i-1}, \ldots, \xi_{i-r}\right)^T$,

$$\phi_{xy}^{(i)} = \left(x_i\, y_{i-1}, \ldots, x_i\, y_{i-r_3^{(0)}} \;\vdots\; x_{i-1} y_{i-1}, \ldots, x_{i-1} y_{i-r_3^{(1)}} \;\vdots\; \ldots \;\vdots\; x_{i-r_2} y_{i-1}, \ldots, x_{i-r_2} y_{i-r_3^{(r_2)}} \right)^T,$$

$$\theta_0 = \left(b_0^T \;\vdots\; a_0^T \;\vdots\; c_0^T\right)^T,\; b_0 = \left(b_0^{(1)}, \ldots, b_0^{(r)}\right)^T,\; a_0 = \left(a_0^{(1)}, \ldots, a_0^{(r_1)}\right)^T,$$

$$c_0 = \left(c_0^{(01)}, \ldots, c_0^{(0 r_3^{(0)})} \;\vdots\; c_0^{(11)}, \ldots, c_0^{(1 r_3^{(1)})} \;\vdots\; \ldots \;\vdots\; c_0^{(r_2 1)}, \ldots, c_0^{(r_2 r_3^{(r_2)})} \right)^T,$$

$$\varepsilon_i = y_i - \varphi_i^T \theta = \xi_i - b_0^T \phi_\xi^{(i)} - c_0^T \phi_{x\xi}^{(i)},$$

$$\phi_{x\xi}^{(i)} = \left(x_i\, \xi_{i-1}, \ldots, x_i\, \xi_{i-r_3^{(0)}} \;\vdots\; x_{i-1} \xi_{i-1}, \ldots, x_{i-1} \xi_{i-r_3^{(1)}} \;\vdots\; \ldots \;\vdots\; x_{i-r_2} \xi_{i-1}, \ldots, x_{i-r_2} \xi_{i-r_3^{(r_2)}} \right)^T.$$

Лемма 1. Пусть выполняются условия 1-3, тогда математическое ожидание ε_i равно нулю

$$E(\varepsilon_i) = 0.$$

Доказательство. Из предположения, что $\{\xi_i\}$ - мартингал-разность следует, что $E(\xi_i) = 0$, тогда используя предположение 3 можно показать

$$E(\varepsilon_i) = E(\xi_i - \sum_{m=1}^{r} b_0^{(m)} \xi_i - \sum_{m=0}^{r_2} \sum_{k=1}^{r_3^{(m)}} c_0^{(mk)} x_{i-m} \xi_{i-k}) =$$

$$= E(\xi_i) - \sum_{m=1}^{r} b_0^{(m)} E(\xi_i) - \sum_{m=0}^{r_2} \sum_{k=1}^{r_3(m)} c_0^{(mk)} E(x_{i-m}) E(\xi_{i-k}) = 0.$$

Лемма 2. Пусть выполняются условия 1-3, тогда средняя дисперсия обобщенной ошибки равна

$$\overline{\sigma}_\varepsilon^2 = \overline{\sigma}_\xi^2 + \overline{\sigma}_\xi^2 b_0^T b_0 + \overline{\sigma}_\xi^2 c_0^T D_x c_0 = \overline{\sigma}_\xi^2 (1 + b_0^T b_0 + c_0^T D_x c_0) = \overline{\sigma}_\xi^2 \omega(b_0, c_0),$$

где

$$D_x = \left(\begin{array}{ccc|ccc|c|ccc}
\sigma_x^2 & \ldots & 0 & h_x(1) & \ldots & 0 & \ldots & h_x(r_2) & \ldots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ldots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \ldots & \sigma_x^2 & 0 & \ldots & h_x(1) & \ldots & 0 & \ldots & h_x(r_2) \\
\hline
h_x(1) & \ldots & 0 & \sigma_x^2 & \ldots & 0 & \ldots & h_x(r_2-1) & \ldots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ldots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \ldots & h_x(1) & 0 & \ldots & \sigma_x^2 & \ldots & 0 & \ldots & h_x(r_2-1) \\
\hline
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\hline
h_x(r_2) & \ldots & 0 & h_x(r_2-1) & \ldots & 0 & \ldots & \sigma_x^2 & \ldots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ldots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \ldots & h_x(r_2) & 0 & \ldots & h_x(r_2-1) & \ldots & 0 & \ldots & \sigma_x^2
\end{array}\right) \ldots.$$

Доказательство. По определению средней дисперсии

$$\overline{\sigma}_\varepsilon^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} E(\varepsilon_i - E(\varepsilon_i))^2,$$

так как согласно Лемме 1 $E(\varepsilon_i) = 0$, то

$$\overline{\sigma}_\varepsilon^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} E(\varepsilon_i)^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} E\left(\xi_i - b_0^T \phi_\xi^{(i)} - c_0^T \phi_{x\xi}^{(i)}\right)^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} E\left(\xi_i^2 + b_0^T \phi_\xi^{(i)} \left(\phi_\xi^{(i)}\right)^T b_0 + \right.$$

$$\left. + c_0^T \phi_{x\xi}^{(i)} \left(\phi_{x\xi}^{(i)}\right)^T c_0 - 2\xi_i b_0^T \phi_\xi^{(i)} - 2\xi_i c_0^T \phi_{x\xi}^{(i)} - 2 b_0^T \phi_\xi^{(i)} c_0^T \phi_{x\xi}^{(i)} \right).$$

Используя лемму 1.1 [6, с.12, 8] для случайного процесса ξ_i, а также условия 3, 4 получаем, что

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}E\left(\xi_i^2+b_0^T\phi_\xi^{(i)}\left(\phi_\xi^{(i)}\right)^T b_0+c_0^T\phi_{x\xi}^{(i)}\left(\phi_{x\xi}^{(i)}\right)^T c_0\right)=\overline{\sigma}_\xi^2+\overline{\sigma}_\xi^2 b_0^T b_0+\overline{\sigma}_\xi^2 c_0^T D_x c_0.$$

Применяя лемму 2 [6, с.13, 9] для случайных процессов получаем

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}E\left(2\xi_i b^T\phi_\xi(i)+2\xi_i c^T\phi_{x\xi}(i)+2b^T\phi_\xi(i)^T c^T\phi_{x\xi}(i)\right)=0.$$

Тогда определим оценку $\hat{\theta}(N)$ неизвестных параметров θ из условия минимума суммы взвешенных квадратов обобщённых ошибок $\left(\varepsilon_i(b_0,c_0,i)\right)^2$ с весом $\omega(b,c)$, т.е.

$$\min_{\theta\in\widetilde{\mathrm{B}}}\sum_{i=1}^{N}\frac{\left(y_i-\varphi_i^T\theta\right)^2}{\overline{\sigma}_\xi^2\left(1+b^T b+c^T D_x c\right)}=\min_{\theta\in\widetilde{\mathrm{B}}}\sum_{i=1}^{N}\frac{\left(y_i-\varphi_i^T\theta\right)^2}{\left(1+b^T b+c^T D_x c\right)}=\min_{\theta\in\widetilde{\mathrm{B}}}\frac{U_N(b,a,c)}{\omega(b,c)}. \quad (3)$$

Имеет место, следующая теорема:

Теорема 1[7]. Пусть некоторый случайный процесс $\{y_i, i=\ldots-1,0,1,\ldots\}$ *описывается уравнением (1) с начальными нулевыми условиями и выполняются предположения 1-4. Тогда оценка* $\hat{\theta}(N)$*, определяемая выражением (3) с вероятностью 1 при* $N\to\infty$*, существует, единственная и является сильно состоятельной оценкой, т.е.*

$$\hat{\theta}(N)\xrightarrow[N\to\infty]{\text{п.н.}}\theta_0.$$

Определим

$$N^{-1}U_N^1(b,a,c)=N^{-1}\sum_{i=1}^{N}(z_i+\xi_i-b^T\phi_y^{(i)}-a^T\phi_x^{(i)}-c^T\phi_{xy}^{(i)})^2=$$

$$=N^{-1}\sum_{i=1}^{N}(b_0^T\phi_z^{(i)}+a_0^T\phi_x^{(i)}+c_0^T\phi_{xz}^{(i)}+\xi_i-b^T\phi_y^{(i)}-a^T\phi_x^{(i)}-c^T\phi_{xy}^{(i)})^2=$$

$$=N^{-1}\sum_{i=1}^{N}(\xi_i-\widetilde{b}^T\phi_z^{(i)}-\widetilde{a}^T\phi_x^{(i)}+\widetilde{c}^T\phi_{xz}^{(i)}-b^T\phi_\xi^{(i)}-c^T\phi_{x\xi}^{(i)})^2=\nu_1+\nu_2+\nu_3,$$

где $\widetilde{b}=b-b_0, \widetilde{a}=a-a_0, \widetilde{c}=c-c_0, \widetilde{\theta}=\theta-\theta_0$,

$$\nu_1=N^{-1}\sum_{i=1}^{N}(\xi_i^2+b^T\phi_\xi^{(i)}\left(\phi_\xi^{(i)}\right)^T b+c^T\phi_{x\xi}^{(i)}\left(\phi_{x\xi}^{(i)}\right)^T c),$$

$$\nu_2=N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\begin{pmatrix}\widetilde{b}\\ \widetilde{a}\\ \widetilde{c}\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}\phi_z^{(i)}\\ \phi_x^{(i)}\\ \phi_{xz}^{(i)}\end{pmatrix}\left(\left(\phi_z^{(i)}\right)^T \,\vdots\, \left(\phi_x^{(i)}\right)^T \,\vdots\, \left(\phi_{xz}^{(i)}\right)^T\right)\begin{pmatrix}\widetilde{b}\\ \widetilde{a}\\ \widetilde{c}\end{pmatrix},$$

$$\nu_3=2N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\left(\widetilde{b}^T\phi_z^{(i)}\left(\phi_\xi^{(i)}\right)^T b+\widetilde{b}^T\phi_\xi^{(i)}\left(\phi_{x\xi}^{(i)}\right)^T c+\widetilde{a}^T\phi_x^{(i)}\left(\phi_\xi^{(i)}\right)^T(i)b+\widetilde{a}^T\phi_x^{(i)}\left(\phi_{x\xi}^{(i)}\right)^T c+\widetilde{c}^T\phi_{xz}^{(i)}\left(\phi_\xi^{(i)}\right)^T b+\widetilde{c}^T\phi_{xz}^{(i)}\left(\phi_{x\xi}^{(i)}\right)^T c\right)-$$

$$-2N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\left(\widetilde{b}^T\phi_z^{(i)}\xi_i+\widetilde{a}^T\phi_x^{(i)}\xi_i+\widetilde{c}^T\phi_{xz}^{(i)}\xi_i\right).$$

Применив лемму [8] для случайных процессов, получаем, что

$$\nu_1\xrightarrow[N\to\infty]{\text{п.н.}}\overline{\sigma}_\xi^2(1+b_0^T b_0+c_0^T D_x c_0),$$

так как

$$\lim_{N\to\infty}N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\varphi_i\varphi_i^T=H \text{ п.н.},$$

то

$$\nu_2 \xrightarrow[N\to\infty]{П.Н.} \tilde{\theta}^T H\theta.$$

Рассмотрим первое слагаемое

$$\frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N}\tilde{b}^T\phi_z^{(i)}\left(\phi_\xi^{(i)}\right)^T b = \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N}\tilde{b}^T\begin{pmatrix} Z_{i-1}\xi_{i-1} & \cdots & Z_{i-r}\xi_{i-1} \\ & \vdots & \\ Z_{i-1}\xi_{i-r} & \cdots & Z_{i-r}\xi_{i-r}\end{pmatrix} b. \tag{4}$$

Таким образом, (4) можно представить в виде r^2 слагаемых, для каждого из которых в силу предположений 2, 4, и из положительной определённости матрицы $H_{zz}\subset H$ следует выполнение леммы [9]; аналогичное рассуждение имеет место для $\tilde{b}^T\phi_z^{(i)}\left(\phi_{x\xi}^{(i)}\right)^T c, \tilde{a}^T\phi_x^{(i)}\left(\phi_\xi^{(i)}\right)^T b, \tilde{a}^T\phi_x^{(i)}\left(\phi_{x\xi}^{(i)}\right)^T c, \tilde{c}^T\phi_{xz}^{(i)}\left(\phi_\xi^{(i)}\right)^T b$.

Рассмотрим слагаемое в ν_3:

$$\frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} -\tilde{b}^T\phi_z^{(i)}\xi_i \xrightarrow[N\to\infty]{П.Н.} 0, \forall b\in R_r,$$

так как выполняются условия леммы [9], аналогично для $\tilde{a}^T\phi_x^{(i)}\xi_i$, $\tilde{c}^T\phi_{xz}^{(i)}\xi_i$.

Таким образом, имеем:

$$\nu_3 \xrightarrow[N\to\infty]{П.Н.} 0,$$

Окончательно имеем

$$\frac{1}{N}U_N(b,a,c)\xrightarrow[N\to\infty]{П.Н.}\bar{\sigma}_\xi^2(1+b_0^Tb_0+c_0^TD_xc_0)+\tilde{\theta}^TH\tilde{\theta}=\bar{U}(b,a,c). \tag{5}$$

Покажем, что решение задачи

$$\min_{\theta\in\tilde{B}}\omega^{-1}(b,c)\bar{U}(b,a,c) \tag{6}$$

существует и достигается в единственной точке θ_0, т.е.

$$\min_{\theta\in\tilde{B}}\omega^{-1}(b,c)\bar{U}(b,a,c)=\frac{\bar{U}(b_0,a_0,c_0)}{\omega(b_0,c_0)}=\bar{\sigma}_\xi^2. \tag{7}$$

Для этого вместе с критерием (3) рассмотрим функцию

$$V(b,a,c,\lambda)=\bar{U}'(b,a,c)-\lambda\omega(b,c), \lambda\in R_1, \tag{8}$$

$$V(\lambda)=\min_{\theta\in\tilde{B}}V(b,a,c,\lambda). \tag{9}$$

Тогда (8) равно

$$V(b,a,c,\lambda)=\bar{\sigma}_\xi^2+\begin{pmatrix} b_0\\ \hline a_0\\ \hline c_0\end{pmatrix}^T H\begin{pmatrix} b_0\\ \hline a_0\\ \hline c_0\end{pmatrix}-\lambda+$$

$$+\begin{pmatrix} b\\ \hline a\\ \hline c\end{pmatrix}^T\left(\begin{array}{c|c|c} H_{zz}+\left(\bar{\sigma}_\xi^2-\lambda\right)I_r & H_{zx} & H_{z\cdot xz}\\ \hline H_{zx}^T & H_{xx} & H_{x\cdot xz}\\ \hline H_{z\cdot xz}^T & H_{x\cdot xz}^T & H_{xz\cdot xz}+\left(\bar{\sigma}_\xi^2-\lambda\right)D_x\end{array}\right)\begin{pmatrix} b\\ \hline a\\ \hline c\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} b_0\\ \hline a_0\\ \hline c_0\end{pmatrix}^T H\begin{pmatrix} b\\ \hline a\\ \hline c\end{pmatrix};$$

где I_r - единичная матрица порядка r.

Дифференцируя $V(b,a,c,0)$ по b,a,c и приравнивая производные к нулю, находим

$$\begin{pmatrix} b(\lambda) \\ \hline a(\lambda) \\ \hline c(\lambda) \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c} H_{zz}+\left(\overline{\sigma}_{\xi}^{2}-\lambda\right)I_r & H_{zx} & H_{z\cdot xz} \\ \hline H_{zx}^T & H_{xx} & H_{x\cdot xz} \\ \hline H_{z\cdot xz}^T & H_{x\cdot xz}^T & H_{xz\cdot xz}+\left(\overline{\sigma}_{\xi}^{2}-\lambda\right)D_x \end{array}\right)^{-1} H\begin{pmatrix} b_0 \\ \hline a_0 \\ \hline c_0 \end{pmatrix}, \qquad (10)$$

и тогда

$$V(\lambda)=\sigma_{\xi}^{2}+\begin{pmatrix} b_0 \\ \hline a_0 \\ \hline c_0 \end{pmatrix}^T H\begin{pmatrix} b_0 \\ \hline a_0 \\ \hline c_0 \end{pmatrix}-\lambda+\left(H\begin{pmatrix} b_0 \\ \hline a_0 \\ \hline c_0 \end{pmatrix}\right)^T \left(\begin{array}{c|c|c} H_{zz}+\left(\overline{\sigma}_{\xi}^{2}-\lambda\right)I_r & H_{zx} & H_{z\cdot xz} \\ \hline H_{zx}^T & H_{xx} & H_{x\cdot xz} \\ \hline H_{z\cdot xz}^T & H_{x\cdot xz}^T & H_{xz\cdot xz}+\left(\overline{\sigma}_{\xi}^{2}-\lambda\right)D_x \end{array}\right)^{-1} H\begin{pmatrix} b_0 \\ \hline a_0 \\ \hline c_0 \end{pmatrix},$$

функция $V(\lambda)$ на интервале $\left(-\infty,\lambda_{\min}+\overline{\sigma}_{\xi}^{2}\right)$ непрерывна, где $\lambda_{\min}$ - наименьшее собственное число регулярного пучка квадратичных форм, то есть наименьший корень уравнения:

$$\det\left(\left(\left(\begin{array}{c|c} H_{zz}+\overline{\sigma}_{\xi}^{2}I_r & H_{z\cdot xz} \\ \hline H_{z\cdot xz}^T & H_{xz\cdot xz}+\overline{\sigma}_{\xi}^{2}D_x \end{array}\right)-\begin{pmatrix} H_{zx} \\ \hline H_{x\cdot xz} \end{pmatrix}H_{xx}^{-1}\left(H_{zx}^T \mid H_{x\cdot xz}^T\right)\right)-\lambda\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & D_x \end{array}\right)\right)=0. \qquad (11)$$

Легко показать, что уравнение $V(\lambda)=0$ имеет не более одного корня λ_1 на $\left(-\infty,\lambda_{\min}+\overline{\sigma}_{\xi}^{2}\right)$, так как на этом интервале функция $V(\lambda)$ непрерывна и

$$\dot{V}(\lambda)=-(1+b^T(\lambda)b(\lambda)+c^T(\lambda)D_x c(\lambda))<-1, \lambda\in\left(-\infty,\lambda_{\min}+\overline{\sigma}_{\xi}^{2}\right).$$

Непосредственной подстановкой $\theta_1=\overline{\sigma}_{\xi}^{2}$ в уравнение $V(\lambda)=0$ можно убедиться, что $\lambda_1=\overline{\sigma}_{\xi}^{2}$ является корнем уравнения, а также $\overline{\sigma}_{\xi}^{2}<\lambda_{\min}+\overline{\sigma}_{\xi}^{2}$, т.е. корень $\lambda_1=\overline{\sigma}_{\xi}^{2}$ является единственным на этом интервале. Тогда из (10) непосредственно следует справедливость (7).

Выражение (3) можно привести к виду

$$\min_{\theta\in\tilde{\mathrm{B}}}\frac{U_N(b,a,c)}{\omega(b,c)}=\min_{\theta\in\tilde{\mathrm{B}}}\frac{(Y-\Phi\theta)^T(Y-\Phi\theta)}{1+b^Tb+c^TD_xc},$$

где

$$Y=(y_1,...,y_N)^T, \Phi=\left(\Phi_y \mid \Phi_x \mid \Phi_{xy}\right)=\left(\begin{array}{c|c|c} \phi_y^T(1) & \phi_x^T(1) & \phi_{xy}^T(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_y^T(N) & \phi_x^T(N) & \phi_{xy}^T(N) \end{array}\right),.$$

Введём новый вектор переменных $\left(1 \mid \theta^T\right)^T=\overline{\theta}$ и матрицу $\overline{\Phi}=\left(-Y \mid \Phi\right)$. Имеем для (3):

$$\min_{\theta\in\tilde{B}}\frac{\overline{\theta}^T\overline{\Phi}^T\overline{\Phi}\,\overline{\theta}}{\overline{\theta}^T\overline{D}\,\overline{\theta}},$$

$$\overline{D}=\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0_{1\times r+r_1+r_2+r_3^{(0)}+\ldots+r_3^{(r_2)}+2} \\ \hline 0_{r+r_1+r_2+r_3^{(0)}+\ldots+r_3^{(r_2)}+2\times 1} & D \end{array}\right),$$

$$D=\left(\begin{array}{c|c|c} I_r & 0_{r\times r_1+1} & 0_{r\times r_2+r_3^{(0)}+\ldots+r_3^{(r_2)}+1} \\ \hline 0_{r_1+1\times r} & 0_{r_1+1\times r_1+1} & 0_{r_1+1\times r_2+r_3^{(0)}+\ldots+r_3^{(r_2)}+1} \\ \hline 0_{r_2+r_3^{(0)}+\ldots+r_3^{(r_2)}+1\times r} & 0_{r_2+r_3^{(0)}+\ldots+r_3^{(r_2)}+1\times r_1+1} & D_x \end{array}\right),$$

и $\overline{\Phi}^T\overline{\Phi}>0$.

Аналогично (10) можно получить (для конечной выборки объёма N):

$$V_N(\lambda) = Y^T Y - \lambda - \begin{pmatrix} \Phi_y^T Y \\ \Phi_x^T Y \\ \Phi_{xy}^T Y \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \Phi_y^T \Phi_y - \lambda I_r & \Phi_y^T \Phi_x & \Phi_y^T \Phi_{xy} \\ \Phi_x^T \Phi_y & \Phi_x^T \Phi_x & \Phi_x^T \Phi_{xy} \\ \Phi_{xy}^T \Phi_y & \Phi_{xy}^T \Phi_x & \Phi_{xy}^T \Phi_{xy} - \lambda D_x \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \Phi_y^T Y \\ \Phi_x^T Y \\ \Phi_{xy}^T Y \end{pmatrix},$$

и $V_N(\lambda) = 0$ имеет свойства, аналогичные $V(\lambda) = 0$. (12)

Однако нахождение корня $V_N(\lambda) = 0$ можно записать в следующей форме: $\hat{\lambda}_1(N) = \lambda_{\min}(N)\left[\overline{\Phi}^T \overline{\Phi} \overline{D}^{-1}\right]$ - минимальное характеристическое число пучка квадратичных форм, определяемых $\overline{\Phi}^T \overline{\Phi}$ и $\overline{D}$. Однако $\overline{D} \geq 0$, поэтому рассмотрим [10]

$$\lambda_{\min}(N)\left[\overline{\Phi}^T \overline{\Phi} - \lambda \overline{D}\right] = \frac{1}{\lambda_{\max}(N)\left[\left(\overline{\Phi}^T \overline{\Phi}\right)^{-1} \overline{D}\right]}.$$

Известно [11], что

$$\frac{1}{N} \frac{1}{\lambda_{\max}(N)\left[\left(\overline{\Phi}^T \overline{\Phi}\right)^{-1} \overline{D}\right]} \xrightarrow[N\to\infty]{П.Н.} \frac{1}{\lambda_{\max}\left[\left(\lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N} \overline{\Phi}^T \overline{\Phi}\right)^{-1} \overline{D}\right]} = \lambda_{\min}\left[\left(\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \overline{\Phi}^T \overline{\Phi}\right) \overline{D}^{-1}\right].$$

Так как нахождение $\lambda_{\min}\left[\left(\lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N} \overline{\Phi}^T \overline{\Phi}\right) \overline{D}^{-1}\right]$ можно представить как определение корня уравнения $V(\lambda) = 0$, то

$$\frac{1}{N} \hat{\lambda}_1(N) \xrightarrow[N\to\infty]{П.Н.} \lambda_1 .$$

Далее, неизвестные параметры можно определить из решения системы следующих линейных уравнений:

$$\begin{pmatrix} \Phi_y^T \Phi_y - \hat{\lambda}_1(N) I_r & \Phi_y^T \Phi_x & \Phi_y^T \Phi_{xy} \\ \Phi_x^T \Phi_y & \Phi_x^T \Phi_x & \Phi_x^T \Phi_{xy} \\ \Phi_{xy}^T \Phi_y & \Phi_{xy}^T \Phi_x & \Phi_{xy}^T \Phi_{xy} - \hat{\lambda}_1(N) D_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_y^T Y \\ \Phi_x^T Y \\ \Phi_{xy}^T Y \end{pmatrix} \quad (13)$$

(это уравнение получается аналогично уравнению (12)). Тогда, очевидно, получаем

$$\frac{1}{N} \begin{pmatrix} \Phi_y^T \Phi_y - \hat{\lambda}_1(N) I_r & \Phi_y^T \Phi_x & \Phi_y^T \Phi_{xy} \\ \Phi_x^T \Phi_y & \Phi_x^T \Phi_x & \Phi_x^T \Phi_{xy} \\ \Phi_{xy}^T \Phi_y & \Phi_{xy}^T \Phi_x & \Phi_{xy}^T \Phi_{xy} - \hat{\lambda}_1(N) D_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a \\ c \end{pmatrix} - \frac{1}{N} \begin{pmatrix} \Phi_y^T Y \\ \Phi_x^T Y \\ \Phi_{xy}^T Y \end{pmatrix} \xrightarrow[N\to\infty]{П.Н.}$$

$$\begin{pmatrix} H_{zz} + \left(\overline{\sigma}_\xi^2 - \lambda_1\right) I_r & H_{zx} & H_{z\cdot xz} \\ \left(H_{zx}\right)^T & H_{xx} & H_{x\cdot xz} \\ \left(H_{z\cdot xz}\right)^T & \left(H_{x\cdot xz}\right)^T & H_{xz\cdot xz} + \left(\overline{\sigma}_\xi^2 - \lambda\right) D_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a \\ c \end{pmatrix} - H^* \begin{pmatrix} b_0 \\ a_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = 0.$$

Из единственности решений (12), (13) и последнего выражения следует [14], что

$$\begin{pmatrix} \hat{b}(N) \\ \hat{a}(N) \\ \hat{c}(N) \end{pmatrix} \xrightarrow[N\to\infty]{П.Н.} \begin{pmatrix} b_0 \\ a_0 \\ c_0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \frac{1}{N} \min_{\theta \in \mathrm{B}} \omega^{-1}(b,c) \overline{U}_N(b,a,c) \xrightarrow[N\to\infty]{П.Н.} \overline{\sigma}_\xi^2 .$$

Из утверждения следует, что для получения сильно состоятельных оценок параметров линейных разностных уравнений требуется лишь априорное знание дисперсии входного сигнала $\overline{\sigma}_x^2$ и несколько значений автоковариационной функции.

В формуле (3) используется дисперсия входного сигнала, которая обычно неизвестна. Согласно теореме Манна-Вольда [12]: если случайные величины $\hat{\sigma}_x^2$, $\hat{h}_x(1),\ldots,\hat{h}_x(r_2)$ сходятся почти наверное, соответственно к постоянной $\overline{\sigma}_x^2, h_x(1),\ldots,h_x(r_2)$, то любая непрерывная функция $J(\hat{\overline{\sigma}}_x^2, \hat{h}_x(1),\ldots,\hat{h}_x(r_2))$ сходится почти наверное к постоянной $J(\overline{\sigma}_x^2, h_x(1),\ldots,h_x(r_2))$:

$$\hat{\overline{\sigma}}_x^2 \xrightarrow{п.н.} \overline{\sigma}_x^2,\quad J(\hat{\overline{\sigma}}_x^2, \hat{h}_x(1),\ldots,\hat{h}_x(r_2)) \xrightarrow{п.н.} J(\overline{\sigma}_x^2, h_x(1),\ldots,h_x(r_2)) \tag{14}$$

Следовательно, если заменить в (3) $\overline{\sigma}_x^2, h_x(1),\ldots,h_x(r_2)$ оценками $\hat{\overline{\sigma}}_x^2, \hat{h}_x(1),\ldots,\hat{h}_x(r_2)$ оценки параметров $\hat{\theta}$ останутся состоятельными.

Состоятельные и несмещенные оценки дисперсии $\hat{\overline{\sigma}}_x^2$ и коэффициентов корреляции $\hat{h}_x(1),\ldots,\hat{h}_x(r_2)$ могут быть получены как

$$\overline{x} = N^{-1}\sum_{i=1}^{N} x_i,\ \hat{\overline{\sigma}}_x^2 = (N-1)^{-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\overline{x})^2,\ \hat{h}_x(k) = (N-k-1)^{-1}\sum_{i=k}^{N}(x_{i-k}-\overline{x})(x_i-\overline{x}).$$

3. Численный метод оценивания параметров

Лемма 3. Для функции $V_N(\hat{\lambda})$, связанной с критерием (3), справедливы следующие утверждения:

1. все корни уравнения $V_N(\hat{\lambda}) = 0$ (15)

(если они существуют) неотрицательны;

2. уравнение (15) на полусегменте $[0,\lambda_{\min}(N))$ имеет не более одного корня $\hat{\lambda}_1(N)$, если $\det(\Phi_x^T\Phi_x) \neq 0$, где $\lambda_{\min}(N)$ - минимальное собственное число регулярного пучка форм, то есть наименьший корень уравнения

$$\det\left(\left(\begin{pmatrix}\Phi_y^T\Phi_y & \Phi_y^T\Phi_{xy}\\ \Phi_{xy}^T\Phi_y & \Phi_{xy}^T\Phi_{xy}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\Phi_y^T\Phi_x\\ \Phi_{xy}^T\Phi_x\end{pmatrix}\left(\Phi_x^T\Phi_x\right)^{-1}\left(\left(\Phi_y^T\Phi_x\right)^T \;\middle|\; \left(\Phi_{xy}^T\Phi_x\right)^T\right)\right) - \lambda\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & D_x\end{pmatrix}\right) = 0\ ; \tag{16}$$

3. невырожденность матрицы $\Phi_x^T\Phi_x$ и существование корня на полусегменте $[0,\lambda_{\min}(N))$ является необходимым и достаточным условием существования единственного решения задачи (12).

Доказательство леммы 3. Функция $V_N(\lambda)$ на $[0,\lambda_{\min}(N))$ непрерывна, к тому же $\lambda_{\min}(N) \geq 0$ как собственное число положительно полуопределенной матрицы.

Далее,

$$\dot{V}_N(\lambda) = -\left(1 + (\theta(\lambda))^T D\theta(\lambda)\right) \leq -1.$$

Тогда на интервале $(-\infty,\lambda_{\min}(N))$ $V_N(\lambda)$ имеет не более одного корня, если он существует, $V_N(0) \geq 0$ и, следовательно, $V_N(\lambda) \geq 0 \forall \lambda \in (-\infty,0)$ (матрица $I_N - \Phi^T\left(\Phi^T\Phi\right)^{-1}\Phi$ идемпотентная).

Отсюда вытекает справедливость утверждений 1, 2 и достаточность 3. Необходимость 3 вытекает из экстремальных свойств регулярного пучка форм [10].

Из теоремы 1 и леммы 3 непосредственно следует:

Теорема 2. Пусть выполняются все условия Теоремы 1, тогда с вероятностью 1 при $N \to \infty$ *существует корень* $\hat{\lambda}(N) \in [0, \lambda_{\min}(N)]$ *и единственная оценка (16), которая является одновременно решением задачи (3) и* $\hat{\theta}(N) \xrightarrow[N\to\infty]{} \theta_0$ *п.н.*

Доказательство теоремы 2 следует из теоремы 1 и леммы 3.

На основании теоремы предлагается численный метод, который позволяет:

1. ответить на вопрос существует ли единственная оценка $\hat{\theta}(N)$;
2. определить начальное приближение, гарантирующее сходимость итерационного процесса к единственной оценке $\hat{\theta}(N)$;
3. вычислить с любой наперед заданной точностью оценку $\hat{\theta}(N)$.

Пусть последовательность $\{\hat{\lambda}'(i)\}$ определяется следующим алгоритмом:

Шаг 0. $\hat{\lambda}'(0) = 0$;

Шаг 1. $\hat{\lambda}'(i) = \dfrac{\left(\lambda_{\min} + \hat{\lambda}'(i-1)\right)}{2}$, $\lambda_{\min}$ определяется из (16);

Шаг 2. Вычислить $\hat{b}\left(N, \hat{\lambda}'(i)\right)$, $\hat{a}\left(N, \hat{\lambda}'(i)\right)$, $\hat{c}\left(N, \hat{\lambda}'(i)\right)$из системы линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} \hat{b}\left(N, \hat{\lambda}'(i)\right) \\ \hat{a}\left(N, \hat{\lambda}'(i)\right) \\ \hat{c}\left(N, \hat{\lambda}'(i)\right) \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c} \Phi_y^T \Phi_y - \hat{\lambda}'(i) I_r & \Phi_y^T \Phi_x & \Phi_y^T \Phi_{xy} \\ \hline \Phi_x^T \Phi_y & \Phi_x^T \Phi_x & \Phi_x^T \Phi_{xy} \\ \hline \Phi_{xy}^T \Phi_y & \Phi_{xy}^T \Phi_x & \Phi_{xy}^T \Phi_{xy} - \hat{\lambda}'(i) D_x \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} \Phi_y^T Y \\ \hline \Phi_x^T Y \\ \hline \Phi_{xy}^T Y \end{array}\right). \qquad (17)$$

Шаг 3. Вычислить

$$V_N(\lambda) = Y^T Y - \lambda - \left(\begin{array}{c} \Phi_y^T Y \\ \hline \Phi_x^T Y \\ \hline \Phi_{xy}^T Y \end{array}\right)^T \left(\begin{array}{c|c|c} \Phi_y^T \Phi_y - \lambda I_r & \Phi_y^T \Phi_x & \Phi_y^T \Phi_{xy} \\ \hline \Phi_x^T \Phi_y & \Phi_x^T \Phi_x & \Phi_x^T \Phi_{xy} \\ \hline \Phi_{xy}^T \Phi_y & \Phi_{xy}^T \Phi_x & \Phi_{xy}^T \Phi_{xy} - \lambda D_x \end{array}\right)^{-1} \left(\begin{array}{c} \Phi_y^T Y \\ \hline \Phi_x^T Y \\ \hline \Phi_{xy}^T Y \end{array}\right).$$

Шаг 4. Проверить условие $V_N\left(\hat{\lambda}'(i)\right) \le 0$.

Тогда если уравнение$V_N\left(\hat{\lambda}'(i)\right) = 0$ имеет корень $\hat{\lambda}_1'(N) \in \left[0, \lambda_{\min}(N)\right)$, то последовательность $\hat{\lambda}'(0), \hat{\lambda}'(1), \ldots \hat{\lambda}'(0)$- конечна и $\lambda(0) \in \left[\hat{\lambda}_1'(N), \lambda_{\min}(N)\right)$, в противном случае последовательность бесконечна.

Этот алгоритм позволяет определить начальное приближение$\hat{\lambda}(0)$, необходимое для дальнейшего применения метода Ньютона или определить, что корень $\hat{\lambda}_1'(N)$ не существует.

Пусть существуют $\hat{\lambda}(0) \in \left[\hat{\lambda}_1'(N), \lambda_{\min}(N)\right)$, тогда $\lim\limits_{i\to\infty} \hat{\lambda}(i) = \hat{\lambda}_1'(N)$, $\lim\limits_{i\to\infty} \hat{b}\left(N, \hat{\lambda}'(i)\right) = \hat{b}(N)$, $\lim\limits_{i\to\infty} \hat{a}\left(i, \hat{\lambda}'(i)\right) = \hat{a}(N)$, $\lim\limits_{i\to\infty} \hat{c}\left(i, \hat{\lambda}'(i)\right) = \hat{c}(N)$, где $\hat{\lambda}(i)$, $\hat{b}\left(i, \hat{\lambda}(i)\right)$ и $\hat{a}\left(i, \hat{\lambda}(i)\right)$, $\hat{c}\left(i, \hat{\lambda}'(i)\right)$ определяется совместно со следующим алгоритмом:

Шаг 1. Вычислить $\hat{b}\left(N, \hat{\lambda}'(i)\right)$, $\hat{a}\left(N, \hat{\lambda}'(i)\right)$, $\hat{c}\left(i, \hat{\lambda}'(i)\right)$ из системы уравнений (17);

Шаг 2. Вычислить

$$\hat{\lambda}(i+1) = \left(1 + \left[\hat{b}\left(N,\hat{\lambda}(i)\right)\right]^T \hat{b}\left(N,\hat{\lambda}(i)\right) + \left[\hat{c}\left(N,\hat{\lambda}(i)\right)\right]^T D_x \hat{c}\left(N,\hat{\lambda}(i)\right)\right)^{-1} \times$$

$$\times \left(Y^T Y + \hat{\lambda}(i)\left(\left[\hat{b}\left(N,\hat{\lambda}(i)\right)\right]^T \hat{b}\left(N,\hat{\lambda}(i)\right) + \left[\hat{c}\left(N,\hat{\lambda}(i)\right)\right]^T D_x \hat{c}\left(N,\hat{\lambda}(i)\right)\right) - \begin{pmatrix} \Phi_y^T Y \\ \hdashline \Phi_x^T Y \\ \hdashline \Phi_{xy}^T Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{b}\left(N,\hat{\lambda}(i)\right) \\ \hdashline \hat{a}\left(N,\hat{\lambda}(i)\right) \\ \hdashline \hat{c}\left(N,\hat{\lambda}(i)\right) \end{pmatrix}\right)$$

Шаг 3. Перейти к шагу 1.

Процесс вычисления заканчивается, если выполняется условие

$$\frac{\left\| V_N\left(\hat{\lambda}(i+1)\right) - V_N\left(\hat{\lambda}(i)\right)\right\|}{\left\| V_N\left(\hat{\lambda}(i+1)\right)\right\|} \le \delta$$

где δ - априорно заданная точность оценок.

Это утверждение непосредственно вытекает из метода Ньютона:

$$\hat{\lambda}(i+1) = \hat{\lambda}(i) - \frac{V_N\left(\hat{\lambda}(i)\right)}{\dot{V}_N\left(\hat{\lambda}(i)\right)}$$

Обоснованность использования метода Ньютона следует из того, что $V_N\left(\hat{\lambda}\right)$- непрерывна для $\forall \hat{\lambda} \in \left[0, \lambda_{\min}(N)\right)$, $\dot{V}_N\left(\hat{\lambda}\right) \le -1$ для $\forall \hat{\lambda} \in \left[0, \lambda_{\min}(N)\right)$ и $\ddot{V}_N\left(\hat{\lambda}\right) = -2\theta^T D\left(\Phi^T \Phi\right)^{-1} D\theta \le 0$ для $\forall \hat{\lambda} \in \left[0, \lambda_{\min}(N)\right)$.

4. Результаты моделирования

Предложенный алгоритм (3) был реализован в Matlab. Динамическая система описывается уравнениями:

$$z_i - 0.7z_{i-1} + 0.4z_{i-2} = 0.3x_i + 0.7x_{i-1} + 0.2x_{i-2} + 0.2x_i z_{i-1},$$
$$y_i = z_i + \xi_i, \tag{18}$$

На вход подавался сигнал: $x_i + 0.5 \cdot x_{i-1} = \zeta_i + 0.8 \cdot \zeta_{i-1} + 0.6 \cdot \zeta_{i-2}$.

Предложенный нелинейный метод наименьших квадратов сравнивался с методом наименьших квадратов (МНК) и расширенным методом инструментальных переменных[2]. Алгоритмы сравнивались по следующим характеристикам:

относительной погрешностью параметров: $\delta\theta = \left\|\hat{\theta} - \theta_0\right\| / \left\|(\theta_0)\right\| \cdot 100\%$,

относительной погрешностью моделирования: $\delta z = \left\|\hat{z} - z\right\| / \left\|z\right\| \cdot 100\%$,

где $z = \left(z_i, \ldots, z_N\right)^T$ – вектор выходной ненаблюдаемой переменной,

$\hat{z} = \left(\hat{z}_i, \ldots, \hat{z}_N\right)^T$ – оценка вектора выходной ненаблюдаемой переменной, полученная с помощью модели.

Количество наблюдений $N = 1000$. В Табл. 1 приведены средние значения и среднеквадратические отклонения относительных погрешностей, рассчитанные по 50 процедурам оценивания.

Как видно из таблицы предложенный алгоритм дает наименьшие относительные погрешности, как для оценивания параметров, так и для моделирования. Инструментальные переменные оценивают параметры точнее, чем классический МНК, однако дают большую погрешность моделирования, а при высоком уровне помех оценивание параметров с помощью РИП, может приводить к неустойчивости динамической системы.

Табл. 1.

	σ_ξ / σ_x	МНК	РИП	НМНК
$\delta\theta$,%	0.2	19.88±2.26	10.40±9.54	2.61±1.01
δz , %		9.78±0.99	15.47±15.59	2.10±0.56
$\delta\theta$,%	0.5	56.62±3.76	28.09±24.50	8.06±4.06
δz , %		22.71±0.97	75.97±180.4	5.85±2.02
$\delta\theta$,%	0.75	70.50±3.48	58.83±50.04	12.12±5.86
δz , %		27.20±1.11	-	9.41±2.90

Заключение

В работе предложен алгоритм для оценивания параметров билинейных динамических систем с помехой наблюдения. В среде MATLAB создано программное обеспечение, результаты моделирования подтверждают эффективность работы алгоритма. Дальнейшее направление исследований может быть направлено на обобщение предложенного алгоритма на случай более сложных моделей шума.

Литература

1. R.R. Mohler, Bilinear Control Processes: With Applications to Engineering, Ecology, and Medicine. New York: Academic Press, 1973.
2. M. S. Ahmed, Parameter estimation in bilinear systems by instrumental variable methods. International Journal of Control, Vol. 44(4), pp.1177-1183, 1986.
3. M. Ekman, Modeling and control of bilinear systems: application to the activated sludge process. PhD thesis 2005.
4. M. M. Gabr, T. Subba Rao, On the identification of bilinear systems from operating records. International Journal of Control, Vol. 40(1), pp.121-128, 1984.
5. V. Tsoulkas, P. Koukoulas, N. Kalouptsidis. Identification of input-output bilinear systems using cumulants. In Proceedings of the 6th IEEE International Conference on Electronics, Circuits and Systems, Pafos, Greece, pp. 1105-1108, 1999.
6. Кацюба О.А. Теория идентификации стохастических динамических систем в условиях неопределенности: монография. – Самара: СамГУПС, 2008. – 119с. – ISBN 978-5-98941-079-8.
7. Иванов Д.В. Идентификация билинейных динамических систем с помехой в выходном сигнале. // Системный анализ и информационные технологии: тр. четвертой международной конференции (Абзаково, Россия 17-23 августа 2011г.) в 2т. Т.1. Челябинск: Изд-во Челяб. гос. ун-та, 2011. С.56-57.
8. Кацюба О.А., Жданов А.И. Особенности применения МНК для оценивания линейных разностных операторов в задачах идентификации объектов управления // Автоматика и телемеханика.– 1979. - № 8. - С.86-90.
9. Кацюба О.А., Жданов А.И. Идентификация методом наименьших квадратов параметров уравнений авторегрессии с аддитивными ошибками измерений // Автоматика и телемеханика. – 1982. - № 2. – С.29-38.
10. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1966. – 575 с.
11. Stoica P., Soderstrom T. Bias correction in least – squares identification // Int. J. Control. 1982. V. 35. № 3.
12. http://en.wikipedia.org/wiki/Continuous_mapping_theorem#CITEREFMannWald1943(дата обращения: 20.04.2009).

Иванов Дмитрий Владимирович. Доцент кафедры мехатроники в автоматизированных производствах Самарского государственного университета путей сообщения (СамГУПС). Окончил СамГУПС в 2007 году. Кандидат физико-математических наук. Автор более 40 научных работ, в том числе 1 монографии. Область научных интересов: идентификация динамических систем. E-mail: dvi85@list.ru

Кацюба Олег Алексеевич. Заведующий кафедрой мехатроники в автоматизированных производствах СамГУПС. Окончил Самарский государственный технический университет в 1963 году. Доктор технических наук, профессор. Автор более 200 научных работ, в том числе 5 монографий. Область научных интересов: идентификация динамических систем. E-mail: katsuba.samgups@mail.ru

Усков Олег Владимирович. Аспирант кафедры мехатроника в автоматизированных производствах СамГУПС. Окончил СамГУПС в 2011 году. Автор 12 научных работ. Область научных интересов: математическое и компьютерное моделирование. E-mail: quentyn@bk.ru