Высокоточное управление в предсказуемых средах

А.Л. Бунич

Аннотация. Рассматривается линейно-квадратичная задача управления дискретным объектом по критерию минимума дисперсии установившейся реакции при условии, что нули спектральной плотности возмущения содержат некоторый интервал частот. Предложен метод синтеза оптимального управления; показано, что этот метод обеспечивает нулевое значение критерия и обладает робастностью по отношению к достаточно широкому классу возмущений.

Ключевые слова: дискретный объект, линейно-квадратичная задача управления, метод синтеза, оптимальное управление, идентификация, регуляторы, лакунарные процессы.

Введение

Регуляторы малого порядка и блестящие результаты их практического использования составили целую эпоху в истории автоматического управления [1]. Высока доля простых (в основном ПИД) регуляторов с 1 – 3 настраиваемыми параметрами в действующих системах управления и в наше время, несмотря на рекомендации теории, сопровождаемые мощными средствами компьютерной поддержки и ужесточение требований к системам управления, прежде всего, к точности регулирования [2, 3]. Анализ данных о действующих системах управления свидетельствует о неудовлетворенности специалистов современным состоянием проектирования промышленных систем регулирования [4], ориентацией теории на собственный «банк стандартных моделей» [5] и рекомендаций, не подкрепленных инженерной интуицией.

Использование регуляторов малых порядков естественно при достаточно слабых (стабилизационных) целях синтеза, однако тенденция усложнения законов регулирования характерна и в период становления автоматического управления (цепочка Уатт – Сименс – Фарко, 1784 – 1845 – 1873 г.).

Высказанная Н. Винером идея замены в комбинированном законе управления неизмеряемых возмущений оценками по прошлым наблюдениям наиболее эффективна в предсказуемых средах, когда достижимая точность регулирования лимитируется только глубиной памяти прогнозирующего фильтра в цепи обратной связи. Связь предсказуемости возмущений с ценой управления очевидна на простом примере дискретной скалярной линейно-квадратичной системы с измеряемой без помех стабилизируемой переменной. Если возмущение имеет заданный конечный спектр N частот, то безошибочный прогноз определяется линейным фильтром глубины памяти, а порядок допустимого регулятора, построенного на основе принципа поглощения [6] и обеспечивающего нулевую ошибку в установившемся режиме, растет линейно по N. Сколь угодно высокая точность регулирования достижима и при существенно менее жестких требованиях к информации о спектральном составе возмущений [7].

В настоящей работе ограничимся простой версией линейно-квадратичной задачи для скалярной системы с дискретным временем, стационарным (в широком смысле) центрированным возмущением $v = \{v_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ со спектральной функцией S (такое же обозначение используется и для спектральной меры). Объект описывается разностным уравнением

$$a(\nabla) y_t = b(\nabla) u_t + v_t \tag{1}$$

с измеряемым без помех выходом y_t и управлением u_t, пара полиномов от оператора сдвига назад по времени ∇, $a(0) = 1, b(0) = 0$ стабилизируема.

Допустимы любые (без ограничения порядка) стабилизирующие регуляторы (характеристический полином замкнутой системы $g = \alpha a - \beta b$ устойчив):

$$\alpha(\nabla) u_t = \beta(\nabla) y_t, \alpha(0) = 1. \tag{2}$$

Стоимость управления представляет дисперсию установившейся реакции:

$$I(W, S) = \int_{-\pi}^{\pi} | W(e^{j\lambda}) |^2 \, dS, \tag{3}$$

где $W = g^{-1}\alpha$ – п.ф. (передаточная функция) системы управления от возмущения к выходу. Класс всех таких п.ф. представляет аффинное многообразие $M = W_0 + b\Re$, где $\Re$ – семейство рациональных функций без полюсов в единичном диске, W_0 – п.ф. системы с некоторым фиксированным допустимым (опорным) регулятором.

В силу (1) каждой точке из M взаимно однозначно соответствует некоторый допустимый регулятор, поэтому минимизация функционала стоимости управления (3) по $W \in M$ эквивалентна минимизации по классу Σ допустимых регуляторов.

Напомним следующий факт, вытекающий из альтернативы Г. Сеге – А.Н. Колмогорова – М.Г. Крейна [8]: стационарный процесс со спектральной мерой S тогда и только тогда допускает безошибочный (в среднеквадратическом смысле) линейный прогноз, когда плотность s абсолютно непрерывной компоненты меры S удовлетворяет условию $\ln s \notin L^1$, например, если нули плотности содержат некоторый интервал частот (такой интервал назовем лакуной, а процессы, для которых плотность s удовлетворяет этому условию, назовем лакунарными). Очевидно, класс лакунарных процессов достаточно богат: любой регулярный процесс можно аппроксимировать лакунарным, например, преобразованием с помощью режекторного фильтра с малым интервалом непропускания.

Введем некоторые определения.

Нижняя граница стоимости $I(S) = \inf\limits_{W \in M} I(W, S)$ называется ценой управления. Задачи синтеза регулятора с нулевой ценой называются вырожденными.

Неотрицательный вогнутый функционал $I(S)$ на пространстве нормированных спектральных мер $(S[-\pi, \pi) = 1)$ с топологией сходимости по вариации называется функционалом цены управления.

Вырожденные задачи представляют интерес по нескольким причинам.

Во-первых, решение вырожденной задачи неулучшаемо в классе всех (необязательно линейных) неупреждающих стратегий управления линейным объектом, в противоположность, например, линейно-квадратичным задачам с негауссовскими возмущениями [9].

Во-вторых, вырожденность задачи является свойством среды (что отражено в названии настоящей статьи) и не зависит от передаточной функции объекта по управлению. В частности, если объект представляет звено задержки с аддитивным возмущением, то в любой вырожденной (т.е. без использования дополнительной информации о возмущениях) задаче возмущение допускает точный линейный прогноз (регулятор «заранее, до поступления возмущения на объект» формирует парирующее воздействие. Именно это кажущееся противоречие с причинностью стало «неопровержимым аргументом» критиков идеи полной компенсации Г.В. Щипанова).

В третьих, как будет установлено далее, для достаточно широкого класса L предсказуемых возмущений, предложенный метод синтеза обладает свойством условной робастности: цель синтеза гарантируется для всего класса L. Этот класс определяется указанием лакуны – любого интервала частот нулевой спектральной меры.

Критерий вырожденности задачи синтеза

Оценим снизу цену управления через дисперсию ошибки оптимального (в среднеквадратическом смысле) линейного прогноза на такт σ^2. Для любой функции $W \in \mathrm{M}$ рациональная функция $\varphi(z) = [1 - W(z)]z^{-1}$ не имеет полюсов при $|z| \leq 1$, поэтому с учетом (3) получим: $\sigma^2 \leq \int_{-\pi}^{\pi} |1 - e^{j\gamma}\varphi(e^{j\lambda})|^2 \, dS = I(W, S)$, где $\sigma^2 = \inf_{\psi \in \Re} \int_{-\pi}^{\pi} |1 - e^{j\lambda}\psi(e^{j\lambda})|^2 \, dS$. Откуда

$$\sigma^2 \leq I(S). \quad (4)$$

В частности, для объекта, представляющего задержку на такт с аддитивной помехой в (4) имеет место строгое равенство.

Из (4) следует, что вырожденность задачи синтеза возможна лишь для линейно-сингулярных возмущений (т.е. для возмущений, допускающих точный линейный прогноз). Дисперсия ошибки оптимального линейного прогноза зависит только от абсолютно непрерывной компоненты спектральной меры, плотность которой (по мере Лебега) обозначим s_a. Напомним необходимое условие линейной сингулярности:

$$\ln s_a \notin L^1. \quad (5)$$

При выполнении условия

$$b(z) \neq 0 \text{ при } |z| = 1 \quad (6)$$

линейная сингулярность возмущений достаточна для вырожденности. Действительно, из (5) вытекает линейная сингулярность возмущения и плотность полиномов в пространстве функций $L^2(S)$ с интегрируемым по спектральной мере квадратом модуля. Но из (6) следует $b^{-1}W_0 \in L^2(S)$, откуда $\| W_0 - bf \|^2_{L^2(S)} \leq \| b \|^2_\infty \| b^{-1}W_0 - f \|^2_{L^2(S)}$ и после перехода к нижней грани по всем полиномам f получим: $I(W) = 0$, что и требовалось доказать.

В действительности доказано большее: если возмущение линейно-сингулярно, то заданная стоимость управления обеспечивается одновременно с конечной длительностью переходного процесса. В частности, цель регулирования достигается, если возмущение имеет априорно заданную лакуну – интервал частот нулевой спектральной меры (в этом случае дополнительная информация о возмущении избыточна по отношению к цели синтеза; термин «лакуна» имеет несколько значений, среди которых отметим пропуск, пробел, как наиболее адекватные).

Возможно занижение цены управления. Непосредственное вычисление цены управления возможно лишь для известной спектральной функции возмущения. В противном случае используют метод подстановки, т.е. замену в определении цены управления спектральной функции ее достаточно точной оценкой. Метод обоснован лишь при условии непрерывности функционала цены. Однако функционал цены обладает лишь более слабым свойством полунепрерывности сверху, поэтому без дополнительных предположений использование метода подстановки может привести к ошибочным результатам.

Пусть s – спектральная плотность некоторого регулярного процесса, μ – спектральная плотность некоторого сингулярного процесса, тогда в силу неравенства Гельдера функция $s^t\mu^{1-t}$ также является спектральной плотностью некоторого процесса, сингулярного при $t \in (0,1)$ в силу соотношения $\ln(s^t\mu^{1-t}) \notin L^1$. Следовательно, $I(S_t) = 0$, где S_t – спектральная функция с плотностью $s^t\mu^{1-t}$. Имеем:

$$0 = \lim_{t \to 1} I(S_t) < I(S_1), \quad (7)$$

т.е., функционал цены $I(S)$ не является полунепрерывным снизу в точке S в топологии сходимости по вариации. Второе следствие из (7) состоит в том, что при решении невырожденных задач синтеза регулятора метод подстановки может привести к занижению стоимости управления.

О типичности вырожденных задач синтеза

Семейство Q спектральных плотностей сингулярных процессов с абсолютно непрерывным спектром плотно в классе L всех спектральных плотностей с L^1 – метрикой. Аналогичное свойство плотности справедливо и для его дополнения $L \setminus Q$ – семейства спектральных плотностей регулярных процессов. Термин «сингулярный» (эквивалент: особый, исключительный) в рассматриваемом контексте означает, что вырожденность задачи синтеза регулятора не относится к свойствам «общего положения», в противоположность «типичному» свойству регулярности возмущения, эквивалентному разрешимости задачи факторизации спектральных плотностей семейства $L \setminus Q$. Так как L – полное метрическое пространство, то для решения проблемы типичности можно использовать категорный подход.

Назовем некоторое свойство объектов, образующих множество Q полного метрического пространства, типичным, если Q – множество второй категории Бэра. Стационарные гауссовские возмущения с абсолютно непрерывными спектральными функциями будем классифицировать по их спектральным плотностям.

Утверждение. Свойство регулярности возмущения нетипично.

Доказательство. Семейство всех спектральных плотностей регулярных процессов $M \subset L$, где L – семейство всех спектральных плотностей с L^1 метрикой, допускает представление

$$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n, \quad M_n = \{s \in M : \int_{-\pi}^{\pi} \ln (ns) d\lambda > 0\},$$

$n = 1,2,...$ Множества M_n различаются между собой сдвигами на константы, поэтому либо M – множество первой категории (и тогда утверждение доказано), либо его замыкание $\bar{M}_1$ содержит некоторый шар и тогда $\mu \in \bar{M}_1$, где плотность μ равна нулю в точности на некотором открытом множестве U малой меры. Во втором случае имеем: $\mu = \lim_{n\to\infty} s_n$, $s_n \in M_1$, откуда $\int_U s_n d\lambda \to 0$ и в силу неравенства Иенсена $\int_U \ln s_n d\lambda \to -\infty$, вопреки включениям $s_n \in M_1, n = 1,2,...$ Полученное противоречие исключает альтернативу и утверждение доказано.

Синтез регулятора, обеспечивающего заданную стоимость управления

Сошлемся на любопытные данные при исследовании энцефалограмм, приводимые автором метода факторизации – «замечательное падение мощности в окрестности частоты 9,05 *гц*. Точка, в которой спектр по существу исчезает, выражена весьма отчетливо…» [10]. «Исчезновение спектра» имеет место и для возмущений с конечным спектром частот, измеренных с достаточно малыми погрешностями (объединение заданных содержащих эти частоты интервалов не должно перекрывать весь частотный диапазон). Заметим, что в приведенных примерах не выполняется гипотеза регулярности возмущения и для синтеза регулятора необходимо использовать подходы, альтернативные методу факторизации.

Суть процедуры синтеза высокоточной системы с лакунарными возмущениями состоит в деформации частотной характеристики системы от возмущения к выходу, при которой диапазоны частот, где амплитудная характеристика выше заданного порога, сместятся в лакуну. Оказывается, что такая деформация реализуема без потери устойчивости.

Пусть объект (1) управляем и $T = \exp(j\Delta)$, где известное замкнутое множество $\Delta = -\Delta \subset (-\pi, \pi)$ (включение строгое) содержит спектр возмущения. В качестве опорного выберем регулятор, определенный решением минимальной степени полиномиального уравнения $a\alpha - b\beta = 1$. По предположению полином b не имеет нулей на T. Функция b^{-1} в силу приведенной ниже леммы допускает равномерную на T полиномиальную аппроксимацию в классе полиномов с действительными коэффициентами.

Лемма [11]. Если T - собственное замкнутое множество на единичной окружности, то любая непрерывная комплекснозначная функция на T равномерно аппроксимируется полиномами.

Для конкретизации в качестве аппроксимирующего выберем полином Чебышева (полином наилучшего приближения) f достаточно высокого порядка и построим регулятор с п.ф. $(\alpha - bf)^1 (\beta - af)$. В силу неравенства $\| W_y \|_K \ \sigma \geq \| W_y \|_{L^2(S)}$ требуемый уровень стоимости управления гарантируется для всех возмущений с фиксированной дисперсией σ^2 и локализацией спектра в априорно заданном диапазоне. Кроме того, в системе управления обеспечивается конечная длительность переходного процесса.

Цель управления достижима, вообще говоря, и в случае нарушения частотного условия $b(z) \neq 0$ при $|z|=1$ (это условие необходимо для разрешимости задачи оптимизации для стандартной модели возмущений). Наконец заметим, что вырожденность задачи синтеза не связана с распределением возмущения.

Приведем иную схему синтеза, основанную на аппроксимации идеальной комбинированной системы неупреждающими обратными связями по выходу. Построим комбинированную систему с упреждением по возмущению

$$\alpha(\nabla) u_t = \beta(\nabla) y_t + \gamma(\nabla) v_t, \qquad (8)$$

где рациональная функция $\gamma(z)$ не имеет полюсов на окружности $|z|=1$, процесс $\gamma(\nabla)v_t$ определен в смысле линейного преобразования стационарного случайного процесса, а выбор полиномов α, β обеспечивает желаемое размещение полюсов замкнутой системы. Выберем это преобразование так, что замкнутая система (1), (8) имеет стационарное решение, для которого $y_t = 0$. Тогда (8) можно представить в виде:

$$\alpha(\nabla)[u_t + b^{-1}(\nabla) v_t\,] = \beta(\nabla) y_t\,. \qquad (9)$$

Функция $b^{-1}(z)$ при выполнении условия $b|_{z\in A}(z) \neq 0, A = \exp(j\Delta^c)$, где Δ^c – дополнение лакуны возмущения равномерно по $z \in A$, аппроксимируется полиномами и после замены в (9) $v_t \to a(\nabla) y_t - b(\nabla) u_t$ получаем аппроксимацию комбинированного закона (8) обратной связью по выходу

$$\alpha(1-pb)(\nabla)u_t = (\beta - \alpha pa)(\nabla) y_t\,. \qquad (10)$$

Одновременно с обеспечением требуемой стоимости управления (определяемой выбором аппроксимирующего полинома p в (10)) решается и задача размещения полюсов, определяющих тип переходного процесса.

Рассмотрим теперь вопрос о порядке регулятора (10), растущего линейно по степени этого полинома $\deg p$. Выберем p из условия $\chi = \| 1 - pb \|_A < 1$ и определим полином $p_N : 1 - p_N b = (1-pb)^N$. Очевидно, $\deg p_N = N \deg p + (N-1), \| 1 - p_N b \|_A < \chi^N$, откуда следует, что стоимость управления уменьшается экспоненциально по порядку регулятора.

Показатель экспоненты зависит от массивности спектра возмущения. Например, для звена задержки на такт дисперсия ошибки оптимального линейного прогноза выхода убывает со скоростью геометрической прогрессии, знаменатель которой совпадает с трансфинитным диаметром спектра [12].

Положив $\alpha^{-1}\beta = K_0$, представим (10) в операторной форме как коррекцию опорного регулятора K_0:

$$K = (1-pb)^{-1}(K_0 - pa). \qquad (11)$$

Из определения полинома p (приближенное обращение операторного полинома b) следует, что множитель $(1-pb)^{-1}$ играет роль «большого коэффициента усиления». В отличие от принципа глубокой обратной связи, усиление селективно по частоте, что позволяет согласовать точность регулирования с требованием устойчивости.

Соотношение (11) можно интерпретировать как замену опорного регулятора $K_0 \to K$. Повторение этой операции приводит к регулятору, итеративному по структуре, а число итераций определяется требованием к стоимости управления. Присутствие в (11) большого коэффициента указывает, что одновременно с уменьшением цены управления растет чувствительность системы к параметрическим возмущениям, например, к погрешностям оценивания коэффициентов операторных полиномов a,b.

Условная робастность

Построенный в предыдущем разделе регулятор имеет свойство условной робастности: требуемая стоимость управления гарантируется для любых стационарных возмущений с фиксированной лакуной и фиксированной дисперсией. Если же информация о локализации с пектра возмущения недостоверна, то использование регулятора (11) может привести к неприемлемо высокой стоимости управления.

Предположим, что «реальное» возмущение v имеет отграниченную от нуля спектральную плотность, однако «по легенде» возмущение лакунарно с некоторой несингулярной спектральной мерой S и регулятор построен именно для этого случая согласно приведенной выше схеме. Естественно предположить, что неадекватная модель возмущения приведет к резкому ухудшению качества регулирования. Покажем, что при ужесточении требований к стоимости управления недостоверная информация о локализации спектра возмущения приводит к неограниченному росту дисперсии установившейся реакции.

Утверждение достаточно доказать для случая белошумного возмущения. Пусть $\{W_n \in M\}_{n=1}^{\infty}$ – H^2-ограниченная последовательность п.ф. от возмущения к выходу системы, дисперсия которого в установившемся режиме не превосходит $n^{-2}, n=1,2,...$ Тогда на окружности $|z|=1$ имеем: $W_n \xrightarrow{S\ п.в.} 0$. По условию мера S несингулярна относительно меры Лебега m. Заменив, если необходимо, $\{W_n\}_{n=1}^{\infty}$ некоторой последовательностью $\{N^{-1}\sum_{n=1}^{N} W_{k_n}\}_{N=1}^{\infty}$, будем считать без ограничения общности последовательность $\{W_n \in M\}_{n=1}^{\infty}$ сходящейся в H^2 к некоторому $W \in H^2$. Так как $W_n \xrightarrow{S\ п.в.} 0$, $W_n(0)=1, n=1,2,...,$ то $W(0)=1$. Но граничные значения ненулевых функций из H^2 не могут иметь множество нулей положительной меры Лебега, следовательно, вопреки предположению, мера S сингулярна и предположение об H^2-ограниченности ошибочно, что и требовалось доказать.

Локальный анализ чувствительности к ошибкам идентификации

При построении регулятора, обеспечивающего заданную стоимость управления, передаточная функция объекта по управлению по легенде предполагалась известной. Представляет интерес локальное исследование чувствительности системы управления к малым ошибкам идентификации объекта.

Наряду с номинальным (1), рассматривается параметрически возмущенный объект

$$a^*(\nabla)y_t = b^*(\nabla)u_t + v_t, \qquad (12)$$

где коэффициенты полиномов a^*,b^* представляют оценки коэффициентов полиномов a,b. При достаточно малых ошибках опорный регулятор (2) одновременно стабилизирует объекты (1) и (12) и выполнено неравенство $\chi^* = \|1-pb^*\|_A < 1$, поэтому при локальном исследовании чувствительности можно положить $p^*=p$. Обратная связь по выходу описывается уравнением $\alpha(1-p^*b^*)(\nabla)u_t = (\beta - \alpha p^* a^*)(\nabla)y_t$. Вычислим характеристический полином замкнутой системы «возмущенный объект – расчетный регулятор»: $g^* = W_y(1-pb^*)/[1-W_y p(b^*a - ba^*)]$ и п.ф. от возмущения к выходу: $W_y^* = W_y(1-pb^*)/\,[W_y(1-pb^*)/[1-W_y p(b^*a-ba^*)]$. Как видно из последнего соотношения сжимающее свойство отображения $W_y \to W_y^*$ сохраняется (с иным коэффициентом сжатия), поэтому справедливо и утверждение об экспоненциальной по порядку регулятора скорости убывания стоимости управления.

Литература

1. Вознесенский И.Н. О принципах и схемах автоматического регулирования. В кн. Г.В.Щипанов и теория инвариантности.: М. Физматлит, 2004. С.270 – 282.

2. Красовский А.А. Исторический обзор и современное состояние фундаментальной прикладной науки управления на примере самоорганизующихся регуляторов / Международная конференция по проблемам управления. Сб. пленарных докл. М.: ИПУ РАН, 1999. С. 4 – 23.
3. Qin S.J, Badgwell T.A. A survey of industrial control technology // Contr. Eng. Practice. 2003. V.11. No. 7. P. 733 – 764.
4. Штейнберг Ш.Е., Сережин Л.П. и др. Проблемы создания и эксплуатации эффективных систем регулирования // Промышленные АСУ и контроллеры. 2004. № 7. С.1 – 7.
5. Емельянов С.В., Коровин С.К. Новые типы обратной связи: Управление при неопределенности. – М.: Наука. Физматлит. 1997.
6. Цыпкин Я.З. Скользящая аппроксимация и принцип поглощения // Доклады РАН. Т. 357. №6. С. 750 – 752.
7. Бунич А.Л. Метод последовательного улучшения в задаче синтеза регулятора линейного дискретного объекта // Автоматика и телемеханика. 2004. № 4. С. 48 – 55.
8. Пеллер В.В., Хрущев С.В. Операторы Ганкеля, наилучшие приближения и стационарные гауссовские процессы. Успехи математических наук. 1982. Т. 37. Вып.1 (223). С. 53 – 124.
9. Казаринов Ю.Ф. Нелинейный оптимальный регулятор в стохастических системах с линейным объектом // Автоматика и телемеханика. 1986. №1. С. 56 – 64.
10. Винер Н. Кибернетика или управление и связь в животном и машине. М. ИЛ. 1958. С.268.
11. Гофман К. Банаховы пространства аналитических функций. М.: ИЛ. 1963. С.137.
12. Rosenblatt M. Some purely deterministic processes.— J. Rat. Mecli. Anal., 1957. V.6. № 6. P. 801—810.

Бунич Александр Львович. Главный научный сотрудник Института проблем управления им. М.А. Трапезникова РАН. Окончил МГУ им. М.В. Ломоносова. Доктор технических наук, профессор. Область научных интересов: идентификация систем управления и адаптивных систем. E-mail: bunich.46@mail.ru