

Один алгоритм построения регуляторов для нелинейных систем с формальным малым параметром¹

Ю.Э. Даник, М.Г. Дмитриев, Д.А. Макаров

Аннотация. В работе рассматривается задача конструирования стабилизирующего нелинейного регулятора для нелинейных систем управления с дискретным и непрерывным временем. Для построения регулятора используется метод на основе формального уравнения Риккати с коэффициентами, зависящими от состояния (SDRE). Для демонстрации полученных результатов проводится ряд численных экспериментов на модели перевернутого маятника. Приводятся сравнительные результаты по ряду критериев качества регулирования для линейных и нелинейных управлений.

Ключевые слова: нелинейные дискретные и непрерывные системы, нелинейный стабилизирующий регулятор, построение критериев качества, уравнения Риккати с зависящими от состояния коэффициентами, модель перевернутого маятника.

Введение

В теории управления большое внимание уделяется задаче стабилизации нелинейных систем управления, как с непрерывным, так и с дискретным временем. За последнее время появились новые подходы к построению алгоритмов управления нелинейными системами, одним из которых является алгоритм конструирования регуляторов, основанный на использовании уравнений Риккати с коэффициентами, зависящими от состояния (SDRE – State Dependent Riccati Equation для непрерывных систем и D-SDRE – Discrete-Time State Dependent Riccati Equation, соответственно, для дискретных систем) [1-8].

Техника SDRE позволяет конструировать нелинейные регуляторы, устройства наблюдения и фильтры. Суть подхода заключается в представлении исходной системы в линейном

по состоянию и управлению виде с коэффициентами, зависящими от состояния, что позволяет формально использовать уравнения типа Риккати для генерации закона управления с обратной связью.

Первоначально этот метод был разработан для непрерывных систем. Существует несколько вариантов уравнений D-SDRE, например, основанных на дискретных алгебраических уравнениях Риккати (DARE) или на разностных уравнениях Риккати, а также оптимизированное дискретное SDRE с корректирующими тензорами [6], обобщенное дискретное уравнение Риккати GD-RE с критерием, коэффициенты матриц которого зависят от состояния [7]. В работах [6, 7] рассматриваются вопросы оптимальности получающихся на основе D-SDRE регуляторов. Вывод D-SDRE проводится на основе поиска оптимума гамильтониана для нелинейной дискретной системы. В работах [7, 8] с помощью критерия устойчивости по входу-

¹ Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №14-11-00692).

состоянию (ISS – Input to state stability) формулируется условие локальной устойчивости замкнутой нелинейной дискретной системы.

В настоящей работе рассматриваются алгоритмы построения стабилизирующего управления для класса нелинейных систем управления, допускающих выделение формального малого параметра и дальнейшее преобразование системы к виду линейному по состоянию и управлению, но с коэффициентами, зависящими от состояния, а также предполагающие конструирование соответствующих квадратичных функционалов с коэффициентами, зависящими от состояния. Задачи регулирования и оптимального управления с малым параметром активно рассматриваются в литературе в связи с развитием подходов к изучению схем декомпозиции, разделения движений с использованием регулярных и сингулярных возмущений [9-13].

Предлагаемые в работе регуляторы обладают определенной субоптимальностью относительно построенных критериев. Целью работы является проведение численных экспериментов, демонстрирующих работоспособность предложенных алгоритмов и эффективность соответствующих регуляторов.

1. Постановка задачи

Пусть имеется нелинейная аффинная управляемая система

$$\begin{aligned} \delta(x) = f(x(t)) + g(x(t))u, \quad x(0) = x^0, \\ x \in R^n, \quad u \in R^r, \end{aligned} \quad (1)$$

$\delta(\cdot)$ обозначает $\frac{dx}{dt}$ для систем с непрерывным

временем $t \in [0, \infty)$ или $x(t+1)$ для систем с

дискретным временем $t = 0, 1, 2, \dots$

Будем считать, что произвольная нелинейная по состоянию и линейная по управлению система (1) может быть преобразована в систему с коэффициентами, зависящими от состояния [1, 3, 7], и некоторого положительного параметра μ вида

$$\begin{aligned} \delta(x) = A(x(t), \mu)x(t) + B(x(t), \mu)u(t) = \\ = (A_0 + \mu A_1(x(t)))x(t) + (B_0 + \mu B_1(x(t)))u(t), \\ x(0) = x^0, \quad x(t) \in X \subset R^n, \quad u \in R^r, \quad t \in [0, \infty) \\ \text{или } t = 0, 1, 2, \dots, \quad 0 < \mu \leq \mu_0, \end{aligned} \quad (2)$$

где μ_0 – некоторое заданное число, не обязательно малое, A_0, B_0 – постоянные матрицы, $A_0, A_1(x) \in R^{n \times n}$, $B_0, B_1(x) \in R^{n \times r}$, $X \subset R^n$ – заданное ограниченное множество пространства состояний такое, что для любого допустимого управления траектории замкнутой системы (2) существуют и единственны на $[0, \infty)$ или при всех $t = 0, 1, 2, \dots$

Требуется найти такое управление $u(x, \mu)$ для некоторой области $G = \{x \in X, 0 < \mu \leq \mu_0\}$, чтобы положение равновесия в замкнутой системе, отвечающей (2), было асимптотически устойчиво по Ляпунову равномерно по $t \geq t_0$, $\mu \in (0, \mu_0]$, и сконструировать при этом критерий, по которому построенное управление обладает некоторой субоптимальностью.

2. Конструирование регулятора в возмущенной нелинейной системе

Будем рассматривать два вида управления. Первый – линейный $u_0(x) = K_0 x(t)$, а второй – в форме нелинейной обратной связи по состоянию

$$\begin{aligned} u(x, \mu) = K(x, \mu)x = (K_0 + \mu K_1(x))x = \\ = u_0(x) + \mu \cdot u_1(x), \end{aligned} \quad (3)$$

где $u_1(x) = K_1(x)x$, $K_0 = -R_0^{-1} B_0^T P_0$ или $K_0 = -\tilde{R}_0^{-1} B_0^T P_0 A_0$, $\tilde{R}_0 = R_0 + B_0^T P_0 B_0$ соответственно для непрерывной и дискретной задачи. Для непрерывного случая P_0 – положительно определенное решение матричного непрерывного уравнения Риккати

$$\begin{aligned} -P_0 A_0 - A_0^T P_0 + P_0 S_0 P_0 - Q_0 = 0, \\ S_0 = B_0 R_0^{-1} B_0^T. \end{aligned} \quad (4)$$

Для дискретного случая P_0 – положительно определенное решение матричного дискретного уравнения Риккати

$$-A_0^T P_0 A_0 + P_0 + A_0^T P_0 S_0 P_0 A_0 - Q_0 = 0, \quad (5)$$

$$S_0 = B_0 (R_0 + B_0^T P_0 B_0)^{-1} B_0^T.$$

Назначение матрицы $K_1(x)$ состоит в учете возмущений $A_1(x), B_1(x)$ в коэффициентах системы (2). В непрерывном случае эта матрица задается как

$$K_1(x) = -R_0^{-1} \{B_1^T(x)P_0 + B_0^T P_1(x) + \mu B_1^T P_1(x)\}, \quad (6)$$

а в дискретном случае –

$$K_1(x) = \tilde{R}_0^{-1} \{[B_0^T P_1(x)B_0 - B_0^T P_0 B_1(x) - B_1^T(x)P_0 B_0] \times \tilde{R}_0^{-1} B_0^T P_0 A_0 - [B_0^T P_0 A_1(x) + B_1^T(x)P_0 A_0 + B_0^T P_1(x)A_0]\}. \quad (7)$$

Замкнутая система для (2) вдоль нелинейного управления (3) имеет следующий вид

$$\begin{aligned} \delta(x) &= (A_0 + \mu A_1(x(t)))x(t) + (B_0 + \mu B_1(x(t))) \times \\ &\times (K_0 + \mu K_1(x(t)))x(t) = [(A_0 + \mu A_1(x(t))) + \\ &+ (B_0 + \mu B_1(x(t)))(K_0 + \mu K_1(x(t)))]x(t) = \\ &= A_{cl}(x(t), \mu)x(t), \quad x(0) = x^0 \end{aligned} \quad (8)$$

Будем находить $K_0, K_1(x)$ в процессе конструирования критериев качества регулирования, которые для непрерывного и дискретного случая имеют соответственно вид

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^T Q(x, \mu)x + u^T R_0 u) dt \rightarrow \min, \quad (9)$$

$$I(u) = \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{\infty} (x^T Q(x, \mu)x + u^T R_0 u) \rightarrow \min$$

где $Q(x, \mu) = Q_0 + \mu Q_1(x)$, Q_0, R_0 – постоянные матрицы, и $Q_0 \geq 0, R_0 > 0, Q_1(x) \geq 0$.

Введем для непрерывного случая матрицу $C(x)$

$$\begin{aligned} C(x) &= P_0 (A_1(x) - S_{10}(x)P_0) + \\ &+ (A_1(x) - S_{10}(x)P_0)^T P_0 + Q_1(x), \quad (10) \\ S_{10}(x) &= B_1(x)R_0^{-1}B_0^T. \end{aligned}$$

В дискретном случае матрица $C(x)$ определяется как

$$\begin{aligned} C(x) &= A_0^T P_0 A_1(x) + A_1^T(x)P_0 A_0 - \\ &- A_0^T P_0 B_1(x)\tilde{R}_0^{-1}B_0^T P_0 A_0 - \\ &- A_0^T P_0 B_0 \tilde{R}_0^{-1} B_1^T(x)P_0 A_0 - A_1^T(x)P_0 B_0 \tilde{R}_0^{-1} B_0^T P_0 A_0 - \\ &- A_0^T P_0 B_0 \tilde{R}_0^{-1} B_0^T P_0 A_1(x) + \\ &+ A_0^T P_0 B_0 \tilde{R}_0^{-1} B_0^T P_0 B_1(x)\tilde{R}_0^{-1} B_0^T P_0 A_0 + \\ &+ A_0^T P_0 B_0 \tilde{R}_0^{-1} B_1^T(x)P_0 B_0 \tilde{R}_0^{-1} B_0^T P_0 A_0 + Q_1(x). \end{aligned} \quad (11)$$

Введем следующие условия.

I. Все элементы матриц $A_1(x), B_1(x)$ непрерывные в области X и параметр μ принадлежит интервалу $(0, \mu_0]$, где параметр μ_0 – некоторое положительное число, не обязательно малое.

II. Тройка матриц $(A_0, B_0, Q_0^{\frac{1}{2}})$ стабилизируема и детектируема.

III. Найдутся такие $Q_1(x) > 0$, что соответствующие матрицы $C(x(t))$ являются положительно определенными для $x \in X$, начиная с некоторого момента $t_0 \geq 0$.

При условиях I-III можно предложить алгоритмы построения регуляторов для обоих случаев, которые при дополнительных условиях (локальной управляемости или малости параметра) позволяют установить утверждения об асимптотической устойчивости положения равновесия в замкнутых системах (например, [12]).

3. Численно-аналитические алгоритмы конструирования регуляторов

Таким образом, имеем следующий численно-аналитический алгоритм построения нелинейного управления вида (3) для системы (2).

Задача с непрерывным временем

1. Преобразуем систему (1) к виду (2) так, чтобы удовлетворялись условия I-II.

2. Находим положительно определенное решение P_0 матричного уравнения (4).

3. Подбираем, если это возможно, матрицу $R_0 > 0, Q_1(x) \geq 0$ так, что условие III для $C(x)$ из (10) будет выполняться.

4. Определяем $P_1(x)$ как

$$P_1(x) = \int_0^\infty \exp(A_{cl,0}^T \sigma) C(x) \exp(A_{cl,0} \sigma) d\sigma.$$

5. Получаем искомый стабилизирующий регулятор в виде (3),(6).

Задача с дискретным временем

1. Преобразуем систему (1) к виду (2) так, чтобы удовлетворялись условия I-II.

2. Находим положительно определенное решение P_0 матричного уравнения (5).

3. Подбираем, если это возможно, матрицу $R_0 > 0$, $Q_1(x) \geq 0$ так, что условие III для $C(x)$ из (11) будет выполняться.

4. Определяем $P_1(x)$ как

$$P_1(x) = \sum_{i=0}^\infty (A_{cl,0}^T)^i C(x) (A_{cl,0})^i.$$

5. Получаем искомый стабилизирующий регулятор в виде (3),(7).

4. Численные эксперименты.

Сравнение результатов

Рассмотрим работу приведенных алгоритмов на различных примерах задачи стабилизации перевернутого маятника [6], используя аналитические представления решений линейных матричных уравнений Ляпунова [14].

Пример 1

Уравнение динамики перевернутого маятника в непрерывном случае имеет вид

$$\frac{dx}{dt} x(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g \sin(x_1)}{Lx_1} & -\frac{\gamma}{ML} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad (12)$$

где первая координата соответствует углу отклонения маятника, а вторая – угловой скорости, $u(t)$ – скалярное управление. Модель имеет следующие параметры: $M = 0.1$, $L = 0.1$, $g = 9.8$, $\gamma = 0.05$. Определим начальное условие как $x(0) = (2.8; 1)$.

Прежде всего, согласно приведенному выше алгоритму, необходимо преобразовать исходную модель к виду (2). Отметим, что при размерности системы $n \geq 2$ существует бесчислен-

ное множество способов приведения системы к виду (2). Следовательно, оба алгоритма обладают достаточно большой гибкостью и позволяют осуществить выбор матриц A_0, A_1, B_0, B_1 и параметра μ с учетом специфики задачи. При этом не налагается заведомых ограничений на величину этого параметра, в отличие, например, от техники синтеза регуляторов на основе теории возмущений [9,10]. В данном примере определим матрицы A_0, A_1, B_0, B_1 в виде

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{L} & -\frac{\gamma}{ML} \end{bmatrix}, B_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, A_1(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{g \sin(x_1)}{Lx_1} & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_1(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ а параметр } \mu \text{ положим равным } 1.$$

Иными словам, параметр μ является искусственно выделенным параметром. Зададим следующие матрицы критерия качества

$$Q_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, Q_1(x) = \begin{bmatrix} 1500 + 0.1x_1^2 & 0 \\ 0 & 30 + 0.1x_2^2 \end{bmatrix},$$

$$R_0 = 1.$$

Далее приведем результаты численного моделирования системы (12) с линейным регулятором u_0 и с нелинейным регулятором u_1 , построенным по представленному выше алгоритму. Значения критерия (9) и стандартного квадратичного критерия, получающегося из (9) при $\mu = 0$, для времени моделирования равного 1 с. приведены в Табл. 1.

Построенный регулятор оказался эффективнее линейного на 32.6% и на 73.8% по нелинейному и стандартному квадратичному критериям соответственно. Графики переходных процессов и управляющих сигналов представлены на Рис. 1 и Рис. 2 соответственно.

Табл. 1. Значения критериев для непрерывной модели маятника (12)

Критерий	Линейный регулятор	Нелинейный регулятор
Нелинейный критерий	12205.85	9203.51
Стандартный квадратичный критерий	9854.88	5668.43

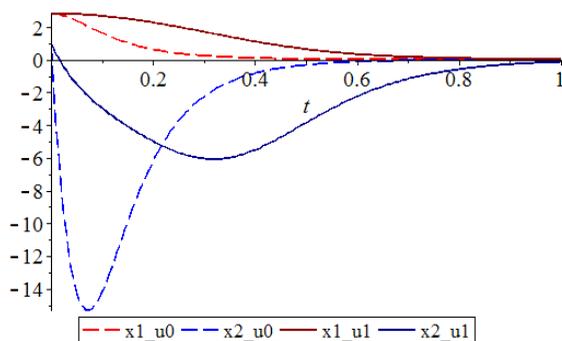


Рис. 1. Траектории системы при управлениях u_0, u_1

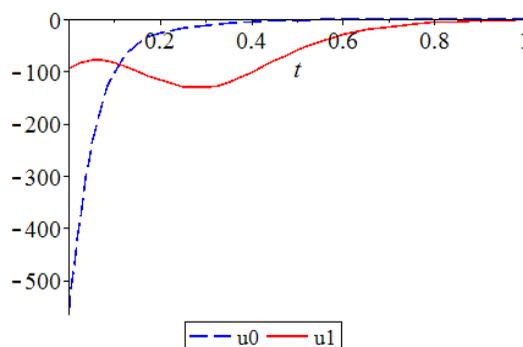


Рис. 2. Управления u_0, u_1

Кроме критериев (9), работоспособность реальных физических систем управления оценивается и с помощью ряда других качественных показателей регулирования, популярных в теории регулирования [15]. А именно:

1. Время регулирования t_p – минимальное время, по истечении которого регулируемая величина будет оставаться близкой к установившемуся значению с заданной точностью, т.е. имеет место неравенство $|h(t) - h_{ycm}| \leq \varepsilon$, где $h(t)$ – координата системы, h_{ycm} – установившееся значение (значение координаты в конце времени моделирования), ε – постоянная величина. Показатель времени регулирования позволяет оценить быстродействие системы.

2. Время достижения первого максимума t_{max} .

3. Максимальное отклонение управляемой величины Δ_{max} от установившегося значения (кроме начального отклонения), соответствующее времени t_{max} ; рассчитывается как $\Delta_{max} = |h(t_{max}) - h_{ycm}| = |h_{max} - h_{ycm}|$, где h_{max} – значение первого максимума. Определяет точность системы в переходном процессе.

4. Перерегулирование (σ) – максимальное отклонение регулируемой величины от установившегося значения в сторону противоположную от начального значения.

5. Статическое отклонение регулируемой величины (установившееся отклонение) Δ_{cm} – отклонение регулируемой величины от задан-

ного значения по окончании переходного процесса, в установившемся режиме.

6. Квадратичная ошибка регулирования J . В непрерывном и дискретном случае определяется соответственно как $J = \int_0^T e^T(t)e(t)dt$ или

$$J = \sum_{t=0}^N e^T(t)e(t), \text{ где } e(t) = h(t) - h_{ycm}.$$

Полученные показатели качества управления приведены в Табл. 2.

Как видно, по некоторым показателям u_1 имеет явное преимущество (например, квадратичная ошибка у нелинейного регулятора меньше приблизительно в 2 раза, также существенное улучшение есть и по Δ_{max} и σ). По ряду других показателей нелинейный регулятор показывает худшие результаты, чем линейный. Однако подчеркнем, что основным критерием качества, на минимизацию которого стремился осуществить регулятор, является интегральный критерий качества (9). По этому критерию наблюдается существенное улучшение, связанное как с учетом нелинейности исходной системы регулятором u_1 , так и с нелинейностью самого интегрального критерия, которую не учитывает регулятор u_0 .

Пример 2

Теперь рассмотрим задачу стабилизации дискретной модели перевернутого маятника

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & T_s \\ \frac{T_s g \sin(x_1)}{Lx_1} & 1 - \frac{T_s \gamma}{ML} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad (13)$$

где $T_s = 0.05$ – шаг дискретизации, прочие параметры имеют те же значения, что и в (12).

Табл. 2. Показатели качества для непрерывной модели маятника (12)

Показатель качества	Угол отклонения маятника, 1-ая координата		Угловая скорость маятника, 2-ая координата	
	Линейный	Нелинейный	Линейный	Нелинейный
t_p, c при $\varepsilon = 0.1$	0.36	0.73	0.66	0.95
t_{\max}	0	0.01	0.07	0.32
Δ_{\max}	2.80094	2.80770	15.28	6.07
σ	0	0	15.28	6.07
Δ_{cm}	$6 \cdot 10^{-4}$	$1.8 \cdot 10^{-2}$	$5.3 \cdot 10^{-3}$	$1.36 \cdot 10^{-1}$
	Линейный регулятор		Нелинейный регулятор	
J	28.99		14.33	

Табл. 3. Значения критериев для дискретной модели маятника (13)

Критерий	Начальное условие $x(0) = (2.8 ; 1)$	
	Линейный регулятор	Нелинейный регулятор
Нелинейный критерий	$3.19 \cdot 10^3$	$1.84 \cdot 10^3$
Стандартный квадратичный критерий	774.18	369.66
	Начальное условие $x(0) = (0.2 ; 0.1)$	
Нелинейный критерий	12.00	11.87
Стандартный квадратичный критерий	4.16	5.04
	Начальное условие $x(0) = (1 ; 1)$	
Нелинейный критерий	290.88	298.84
Стандартный квадратичный критерий	99.39	116.76

Согласно приведенному выше алгоритму, преобразуем модель к виду (2). Пусть матрицы A_0, A_1, B_0, B_1 определяются как

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & T_s \\ \frac{T_s g}{L} & 1 - \frac{T_s \gamma}{ML} \end{bmatrix}, \quad A_1(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{g \sin(x_1)}{Lx_1} - \frac{g}{L} & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_1(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \text{ Матрицы критерия каче-}$$

ства (9) $Q_0, Q_1(x), R_0$ оставим такими же, как и выше. Отметим, что в данном примере, модель содержит естественный малый параметр T_s , который и примем в качестве μ , т.е. $\mu = T_s = 0.05$.

После выполнения последующих пунктов алгоритма и проведения численного моделиро-

вания при числе шагов $N = 40$, получаем значения критерия (9) и стандартного критерия вдоль u_0 и u_1 для системы (13) для различных начальных условий (Табл. 3).

При начальном условии $x(0) = (2.8 ; 1)$ построенный регулятор эффективнее линейного на 73,3% по нелинейному критерию и на 109,4% по стандартному квадратичному критерию. Графики переходных процессов и управляющих сигналов приведены на Рис. 3 и Рис. 4, на которых по оси абсцисс откладывается номер шага моделирования. Отметим, что результаты качественно повторяют аналогичные расчеты, проведенные в [6].

Согласно Табл. 3 различие по критерию качества между регуляторами нивелируется, если начальное условие находится вблизи положения равновесия $x \approx 0$. С ростом же начальных

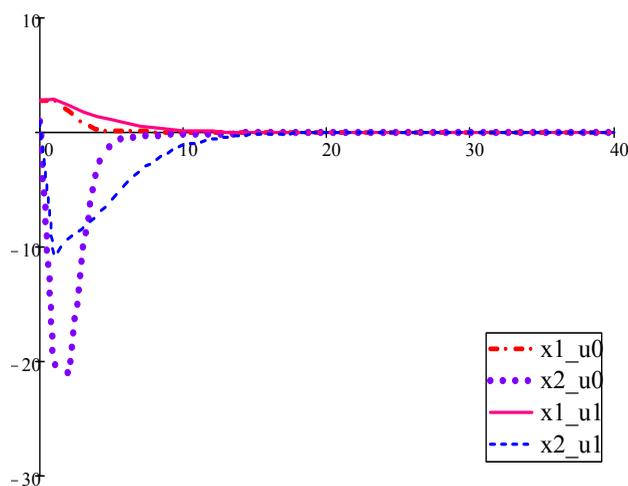


Рис. 3. Траектории системы (13) при управлениях u_0, u_1

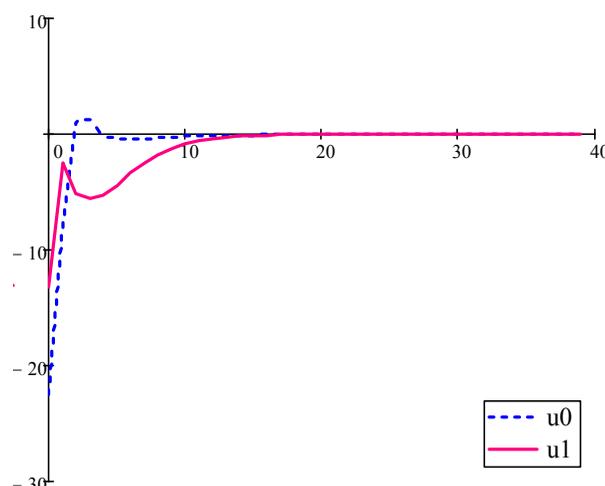


Рис. 4. Управления u_0, u_1

условий, естественно, нелинейный регулятор демонстрирует лучшие результаты. Прочие показатели качества управления приведены в Табл. 4.

Здесь, как и ранее, имеем как улучшение нелинейным регулятором некоторых показателей, так и ухудшение ряда других. Однако, сравнивая основные интегральные характеристики, наблюдаем очевидное превосходство нелинейного регулятора.

Очевидно, что из-за линейности регулятор u_0 хуже учитывает специфику исходной нелинейной системы, что может приводить к отсутствию асимптотической устойчивости нулевого положения равновесия замкнутой системы, что демонстрирует пример 3.

Также отметим, что расчеты на этой модели показывают чувствительность эффективности нелинейного регулятора к изменению параметра μ , особенно, вблизи нуля, т.к. при μ малых различия между регуляторами исчезают, а увеличение значения параметра μ приводит к большему коэффициенту усиления и эффективность нелинейного регулятора растет.

Пример 3

Изменение выбора матриц $A_0, A_1, B_0, B_1, Q_0, Q_1(x), R_0$, естественно, может сказаться на характеристиках регуляторов u_0, u_1 . Продемонстрируем это на следующем примере.

Табл. 4. Показатели качества для дискретной модели маятника (13)

Показатель качества	Угол отклонения маятника, 1-ая координата		Скорость колебания маятника, 2-ая координата	
	Линейный	Нелинейный	Линейный	Нелинейный
t_p при $\varepsilon = 0.1$	6	12	12	17
t_{max}	1	1	2	1
Δ_{max}	2.85	2.85	21.17	10.82
σ	0	0	21.17	10.82
Δ_{cm}	$1.06 \cdot 10^{-4}$	$2.31 \cdot 10^{-6}$	$3.81 \cdot 10^{-4}$	$1.45 \cdot 10^{-5}$
	Линейный регулятор		Нелинейный регулятор	
J	983.58		429.82	

Табл. 5. Значения критериев для дискретной модели маятника в примере 3

	Линейный регулятор	Нелинейный регулятор
Нелинейный критерий	$4.35 \cdot 10^3$	926.67
Стандартный квадратичный критерий	440.36	384.85

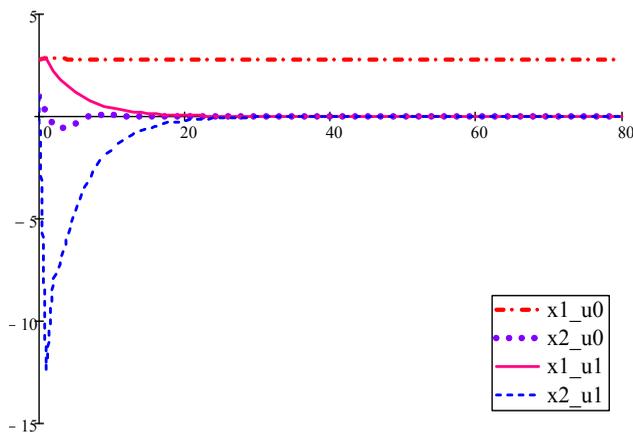


Рис. 5. Траектории системы при управлениях u_0, u_1

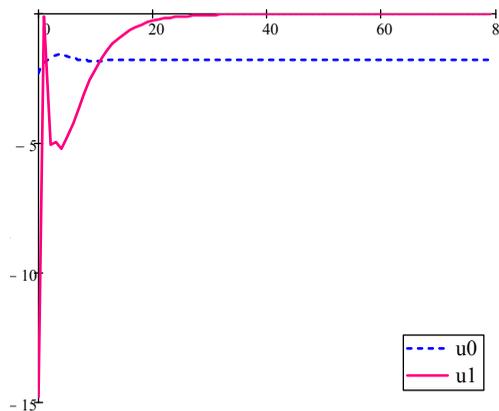


Рис. 6. Управления u_0, u_1

Пусть для модели маятника (13) имеем следующие матрицы $A_0 = \begin{bmatrix} 1 & T_s \\ 0 & 1 - \frac{T_s \gamma}{ML} \end{bmatrix}$,

$$A_1(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{g \sin(x_1)}{Lx_1} & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_1(x) = \begin{bmatrix} 250 + 0.1x_1^2 & 0 \\ 0 & 30 + 0.1x_2^2 \end{bmatrix}$$

а значения всех остальных матриц и параметров остаются прежними, т.е. по сравнению с примером 2, имеем другое представление A_0, A_1 и сильное изменение Q_1 .

При $N = 80, x(0) = (2.8; 1)$ нелинейный регулятор превосходит линейный на 368.39% по нелинейному критерию и на 14.43% по стандартному квадратичному критерию (Табл. 5). В этом примере одна координата системы вдоль линейного регулятора стремится к ненулевому значению (Рис. 5), т.е. теряется асимптотическая устойчивость нулевого положения равновесия замкнутой системы (матрица замкнутой системы в установившемся режиме имеет одно собственное число равное единице, а другое равное 0.28, при этом во время переходного процесса одно из собственных чисел матрицы замкнутой системы находится вне

единичного круга и в пределе стремится к границе единичного круга). Для поддержания маятника в таком положении требуется постоянное ненулевое управляющее воздействие (Рис. 6). При использовании нелинейного регулятора замкнутая система является асимптотически устойчивой.

Прочие показатели качества управления приведены в Табл. 6.

Отметим, что здесь потребовалось изменить Q_1 , т.к. при том же Q_1 , что и в примере 2 нелинейный регулятор теряет свою эффективность. Значительное уменьшение первого элемента главной диагонали матрицы Q_1 позволяет получить регулятор, большинство характеристик которого лучше соответствующего линейного регулятора, а последнее объясняется недопустимостью линейного регулятора в данном примере, т.к. происходит потеря асимптотической устойчивости нелинейной замкнутой системы вдоль регулятора u_0 .

Заключение

В настоящей статье приведены алгоритмы по конструированию нелинейных стабилизирующих регуляторов для нелинейных систем с

Табл. 6. Показатели качества для системы и регуляторов u_0 и u_1

Показатель качества	Угол отклонения маятника, 1-ая координата		Скорость колебания маятника, 2-ая координата	
	Линейный	Нелинейный	Линейный	Нелинейный
Время регулирования t_p при $\varepsilon = 0.1$	>80	17	7	24
Время достижения первого максимума t_{max}	2	1	3	1
Максимальное отклонение Δ_{max}	2.86	2.85	0.56	12.38
Перерегулирование σ	0	0	-0.56	-12.38
Статическая ошибка регулирования $\Delta_{ст}$	2.77	$2.20 \cdot 10^{-7}$	$-9.42 \cdot 10^{-12}$	$-8.22 \cdot 10^{-7}$
	Линейный регулятор		Нелинейный регулятор	
Суммарная квадратичная ошибка J	625.23		390.80	

непрерывным и дискретным временем на основе уравнений Риккати с зависящими от состояния коэффициентами, а также рассмотрены соответствующие примеры для модели перевернутого маятника.

Особенностью подхода является достаточная гибкость, обусловленная различными способами преобразования исходной нелинейной системы к виду, линейному по управлению и состоянию с коэффициентами, зависящими от состояния и представлением этих коэффициентов в виде линейной функции искусственно вводимого параметра, который позволяет отдельно учитывать нелинейности в коэффициентах и предложить на этой основе нелинейные коррекции обычного линейного регулятора, а также построить критерии, для которых нелинейные регуляторы обладают некоторой субоптимальностью.

Проведено сравнение значений критериев качества регулирования вдоль построенных нелинейных и соответствующих линейных регуляторов. В частности, нелинейные регуляторы при определенном выборе параметров обеспечивают лучшее значение предлагаемого нелинейного критерия и стандартного квадратичного критерия по сравнению со значениями этих критериев вдоль линейных регуляторов, значительно меньшую суммарную квадратичную ошибку. Хотя переходные процессы могут быть более плавными вдоль нелинейных регуляторов, но это может привести к увеличению времени регулирования. Тем не менее, основные критерии качества, а именно, строящиеся

в работе нелинейные и стандартные квадратичные критерии, говорят о значительной эффективности нелинейных регуляторов и свидетельствуют о более широкой области их применения по сравнению с линейными.

Литература

1. Cloutier J.R. State-dependent Riccati equation techniques: an overview // American Control Conference, 1997. Proceedings of the 1997. 1997. № 2. Pp. 932-936.
2. Mracek C.P., Cloutier J.R. Control designs for the nonlinear benchmark problem via the state-dependent Riccati equation method // International Journal of robust and nonlinear control. 1998. Т. 8. № 4-5. Pp. 401-433.
3. Çimen T. State-dependent Riccati equation (SDRE) control: a survey // Proceedings of the 17th World Congress of the International Federation of Automatic Control (IFAC), Seoul, Korea, July. 2008. Pp. 6-11.
4. Çimen T. Survey of state-dependent Riccati equation in nonlinear optimal feedback control synthesis // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2012. Т. 35. №. 4. Pp. 1025-1047.
5. Афанасьев В.Н. Управление нелинейными объектами с параметрами, зависящими от состояния // Автомат. и телемех., 2011. № 4. С. 43-56
6. Dutka A.S., Ordys A.W., Grimble M.J. Optimized discrete-time state dependent Riccati equation regulator // Proceedings of the American Control Conference (ACC 2005). IEEE, 2005. Pp. 2293-2298.
7. Chang I., Bentsman J. Constrained discrete-time state-dependent Riccati equation technique: A model predictive control approach // 52nd IEEE Conference on Decision and Control. December 10-13, 2013, Florence, Italy. 2013. Pp. 5125-5130.
8. Zhang Y., Naidu D. S., Cai C. X., Zou Y. Composite/control of a class of nonlinear singularly perturbed discrete-time systems via D-SDRE // International Journal of Systems Science. 2015. <http://dx.doi.org/10.1080/00207721.2015.1006710>. Pp. 1-10.

9. Kokotovic P.V., Khalil H. K. Singular Perturbations in Systems and Control. New York: IEEE Press, 1986.
10. Dmitriev M. G., Kurina G. A. Singular perturbations in control theory // Autom. Remote Control. 2006. Т. 67. № 1. Pp.1–43.
11. Дмитриев М.Г. Теория сингулярных возмущений и некоторые задачи оптимального управления // Дифференциальные уравнения. 1985. Т. 21. №. 10. С. 1693-1698; English translation, Differential equations. 1985. Т. 21. № 10. Pp. 1132-1136.
12. Дмитриев М.Г., Макаров Д.А. Гладкий нелинейный регулятор в нелинейной системе управления с коэффициентами, зависящими от состояния // Труды ИСА РАН. 2014. Т. 64. №4. С. 53-58.
13. Дмитриев М. Г., Макаров Д.А. Композитный регулятор в линейной нестационарной системе управления // Известия РАН. Теория и системы управления. 2014. № 6. С.3-13; English translation, Journal of Computer and Systems Sciences International. 2014. Vol. 53. No. 6. Pp. 777–787.
14. Демиденко Г.В. Матричные уравнения. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 2009. 203 с.
15. Воронов А.А. и др. Теория автоматического управления. Теория линейных систем автоматического управления. М.: Высш. шк., 1986. 367 с.

Макаров Дмитрий Александрович. Старший научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» РАН (ФИЦ ИУ РАН). Окончил Рыбинскую государственную авиационную технологическую академию им. П.А. Соловьева в 2008 году. Автор 21 печатной работы. Область научных интересов: управление сложными динамическими системами, робастные методы устойчивости и стабилизируемости, искусственный интеллект, экспертные системы. E-mail: makarov@isa.ru.

Даник Юлия Эдуардовна. Аспирантка ФИЦ ИУ РАН. Окончила НИУ ВШЭ в 2014 году. Автор 1 печатной работы. Область научных интересов: дискретные системы управления, системный анализ. E-mail: yuliadanic@gmail.com.

Дмитриев Михаил Геннадьевич. Главный научный сотрудник ФИЦ ИУ РАН, профессор НИУ ВШЭ. Окончил Днепропетровский государственный университет имени 300-летия воссоединения Украины с Россией в 1969 году. Доктор физико-математических наук, профессор. Автор более 200 печатных работ из них 2 монографии. Область научных интересов: математическое моделирование, асимптотические методы, оптимальное управление, системный анализ. E-mail: mdmitriev@mail.ru