Представление автоматных моделей марковских функций на основе укрупнения цепей Маркова

Б.Ф. Эминов, В.М. Захаров, М.А. Хуссейн

Аннотация. Представлено решение задачи алгоритмического синтеза автоматных моделей марковских функций на основе укрупнения конечных цепей Маркова. Введены эквивалентные автоматные модели марковских функций. Определена зависимость сложности алгоритмической реализации автоматных моделей от размера стохастической матрицы, описывающей закон полученной укрупненной цепи Маркова, и длины имплицирующего вектора этой матрицы. Дана сравнительная оценка сложности рассматриваемых моделей.

Ключевые слова: Цепь Маркова, стохастическая матрица, автономный вероятностный автомат, автоматные модели марковских функций, имплицирующий вектор, оценки сложности, укрупнение цепи.

Введение

Функции конечных цепей Маркова (далее цепь) можно рассматривать как процессы, получаемые на выходе вероятностных автоматов [1, 2]. В [1] показано, что при автоматном преобразовании случайных последовательностей получаемый класс последовательностей определяется как класс функций конечных цепей Маркова. Подклассы вероятностных автоматов, получаемые при ограничениях на функции выхода автомата, порождают различные подклассы функций цепей Маркова [1]. Общий подход к построению функций цепей Маркова состоит в следующем: множество состояний заданной цепи разбивается на непересекающиеся подмножества (классы) и исследуется поведение цепи при условии, что состояния, принадлежащие одному классу, не различаются [1, 2]. Эффективным и исследованным является подход синтеза вероятностных автоматов, где отражен взгляд на цепь как на конечный детерминированный автомат со случайным входом [2-5].

В данной работе задача представления функций цепей Маркова рассматривается как задача представления вероятностных автоматов из класса конечных автономных вероятностных автоматов (АВА) [2, 6]. Данные автоматы с детерминированной функцией выхода и со стохастической матрицей P_s, задающей функцию переходов состояний, можно преобразовать в композицию [1, 6], состоящую из источника случайности Бернулли, выдающего с вероятностью p_i букву x_i из некоторого алфавита X, и конечного детерминированного автомата (КДА), заданного функциями переходов и выхода. Методы синтеза [4-6] автономных автоматов базируются на разложении матрицы P_s цепи Маркова в линейную комбинацию булевых стохастических матриц и стохастический имплицирующий вектор [2] размера l. Величина l определяет сложность алгоритмической реализации автомата. Эффективный подход к решению задачи минимизации автономных вероятностный автоматов основан на решении задачи минимизации имплицирующего вектора [7-10]. Результаты решения этой задачи отражены в большом числе публикаций, достаточный список которых представлен в [10].

В [8] показана *NP*-полнота задачи минимизации имплицирующего вектора. Имеются результаты исследований зависимости величины l от размера стохастической матрицы [11], от точности представления переходных вероятностей [9, 10], от структуры стохастической матрицы (от числа нулевых элементов матрицы [8], от числа совпадающих элементов в отдельных строках [6]). Неисследованной является задача определения зависимости величины l от наличия в структуре стохастической матрицы совпадающих вероятностных переходов между определенными подмножествами, на которые разбивается множество состояний заданной цепи.

В данной работе представление автоматных моделей функций цепей Маркова рассматривается на основе укрупнения цепей, получаемых разбиением множества состояний исходной цепи, и построения имплицирующего вектора укрупненной цепи.

Задача укрупнения стохастических процессов и цепей Маркова является предметом исследований уже более 50 лет, начиная с работ Романовского [12], Кемени [13] и Королюка [14]. Укрупнение случайного процесса в общем виде рассматривается как замена стохастического процесса с большим числом состояний на процесс с укрупненными состояниями [12-14]. Впервые про укрупнение цепей описано в работе [12], где результат укрупнения рассматривается как характеристическая функция (марковская функция) конечных цепей. В построенной функции цепи посредством разбиения множества состояний исходной цепи связь укрупненных состояний во времени, в общем случае, нельзя представить в виде простой цепи [12, 13], т.е. последовательность укрупненных состояний может не обладать марковским свойством [13] (независимость "будущего" от "прошлого" при фиксированном "настоящем").

Представление марковских функций в виде укрупненных цепей Маркова позволяет изучать сложный процесс методами цепей Маркова и решать различные прикладные задачи, например в сфере информационных технологий: при локализации узких мест в вычислительных системах и сетях [16, 17], оценки эффективности от увеличения числа процессоров в мультипроцессорных системах [16, 18], оценки алгоритмов диспетчирования программ в многозадачной кластерной системе [16, 18, 19], оценки для программ времени наработки на отказ [16], распознавание речи с помощью скрытых марковских моделей, являющихся частным случаем автономных вероятностных автоматов [20], представления скрытых полумарковских моделей в полиномиальном виде над полем Галуа [21], криптоанализ алгоритмов блочного шифрования [22].

Задача укрупнения цепей и ее приложения актуальны и по сегодняшний день. Этой тематике посвящено большое число работ [13-31], в том числе и за последнее десятилетие. В области укрупнения цепей можно выделить следующие направления исследований:

1) алгоритмы укрупнения цепей и задачи снижения вычислительной сложности данных алгоритмов с сохранением марковского свойства цепей [13, 15, 23-25];

2) вычисление предельных характеристик укрупненной цепи [16, 27, 28]: предельного вектора, матрицы времен попадания и времени блуждания до попадания в поглощающее состояние;

3) укрупнение с сохранением свойств стохастической матрицы цепи [13, 25] (например, регулярности [13], энтропии [25]);

4) расширение приложений укрупнения [21, 22, 29-31].

Целью работы является решение задачи определения зависимости сложности автономных вероятностных автоматов от размера стохастической матрицы укрупненной цепи Маркова и размера имплицирующего вектора этой стохастической матрицы.

1. Определение автоматных моделей марковских функций

Пусть задана простая однородная цепь маркова системой вида [13]

$$(S, P_s, \overline{\pi_0}), \tag{1}$$

где $S = \{s_i\}$ – множество состояний цепи; $P_s = (p_{ij}),\ i, j = \overline{0, n-1}$ – регулярная стохастиче-

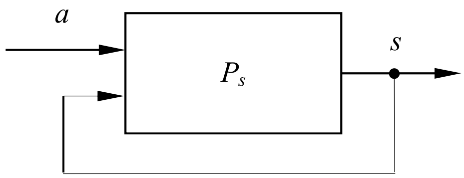

Рис. 1. Автоматная модель системы (1)

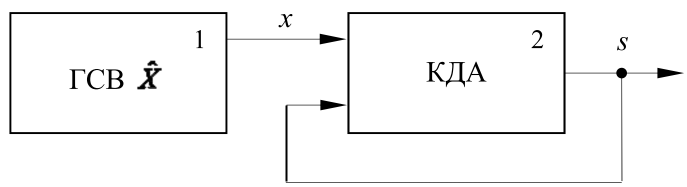

Рис. 2. Структурная схема системы (2)

ская матрица цепи Маркова размера $n \times n$; p_{ij} – вероятности переходов между состояниями; $\overline{\pi_0}$ - стохастический вектор начального распределения вероятностей состояний цепи.

Систему (1) можно рассматривать как задание автомата (Рис. 1) с одним входным символом a, под действием которого в дискретный момент времени автомат разыгрывает новое состояние $s \in S$ по заданной стохастической матрице P_s. Начальное состояние автомата определяется стохастическим вектором $\overline{\pi_0}$.

Определение 1. Автономным вероятностным автоматом типа $ABA(1)$, являющимся автоматной марковской моделью цепи, и эквивалентным системе (1), будем называть систему [6]

$$ABA(1) = (S,\ \hat{X},\ \Delta(x,s) = s,\ \overline{\pi_0}), \qquad (2)$$

где $S = \{s_i\}$, $i = \overline{0,n-1}$ - множество состояний $ABA(1)$ и цепь (1); $\hat{X}$ - дискретная случайная величина $\hat{X} = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_{l-1} \\ p_0 & p_1 & \dots & p_{l-1} \end{pmatrix}$, принимающая конечное множество значений $X = \{x_0, x_1, ..., x_{l-1}\}$ на входе $ABA(1)$ с вероятностями $\overline{P} = (p_0, p_1, ..., p_{l-1})$, $0 \le p_i \le 1$, $\sum_{i=0}^{l-1} p_i = 1$; $\Delta(x,s)$ – функция переходов $ABA(1)$, ставящая паре (x, s) в соответствие новое состояние $s \in S$.

Пару ($\hat{X}$, $\Delta(x,s)$) определим на основе разложения [11] P_s из (1):

$$P_s = \sum_{k=0}^{l-1} p_k M(x_k), \qquad (3)$$

где p_k, $k = \overline{0,l-1}$ - элементы стохастического вектора $\overline{P} = (p_0, p_1, ..., p_{l-1})$ (элементы импликирующего вектора [1] матрицы P_s); $M(x_k)$, $k = \overline{0,l-1}$ - булева стохастическая матрица размера $n \times n$, соответствующая символу x_k; величина l удовлетворяет соотношению [11]

$$l \le n^2 - n + 1. \qquad (4)$$

Элементы матриц $M(x_k)$, $k = \overline{0,l-1}$, (обозначим их через $\pi_{ij}(x_k)$, $i,j = \overline{0,n-1}$) задают функцию $\Delta(x,s)$ следующим образом [11]. Если в матрице $M(x_k)$ элемент $\pi_{ij}(x_k) = 1$, то $\Delta(x_k, s_i) = s_j$, $i,j = \overline{0,n-1}$:

$$\Delta(x_k, s_i) = \begin{cases} s_j,\ \pi_{ij}(x_k) = 1 \\ \Delta(x_k, s_i) = 0,\ \pi_{ij}(x_k) = 0 \end{cases}.$$

Замечание 1. Существуют и другие оценки для размера l импликирующего вектора, зависящие от структуры матрицы P_s, от точности представления переходных вероятностей в P_s и др. [6, 9, 10]. Мы будем применять оценку (4).

На Рис. 2 [11] представлена структурная схема системы (2). Здесь генератор случайной величины (ГСВ), в соответствии с дискретной случайной величиной $\hat{X}$, выдает символ x. Конечный детерминированный автомат на основе входных символов x и s, с помощью функции $\Delta(x,s)$, выдает последующее состояние s системы. Последовательность состояний является простой цепи с законом P_s [11].

Рассмотрим автономный вероятностный автомат (Рис. 3) [1]

$$(S, P_s, Y,\ \lambda(s) = y,\ \overline{\pi_0}), \qquad (5)$$

где элементы S, $\overline{\pi_0}$ и P_s - те же, что и в (1); P_s задает вероятностную функцию переходов из s_i в s_j; $Y = \{y_0, y_1, \dots, y_{t-1}\}$ - конечный выходной алфавит; $\lambda(s) = y$, $y \in Y$ - функция выхода, реализующая однозначное отображение множества состояний S цепи (1) в множество Y:

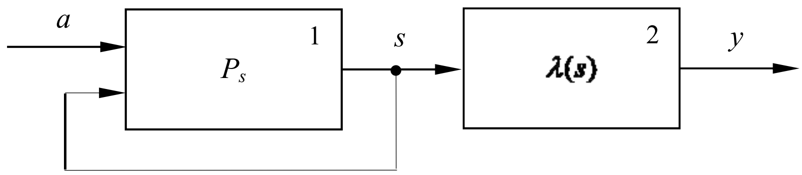

Рис. 3. Структурная схема системы (5)

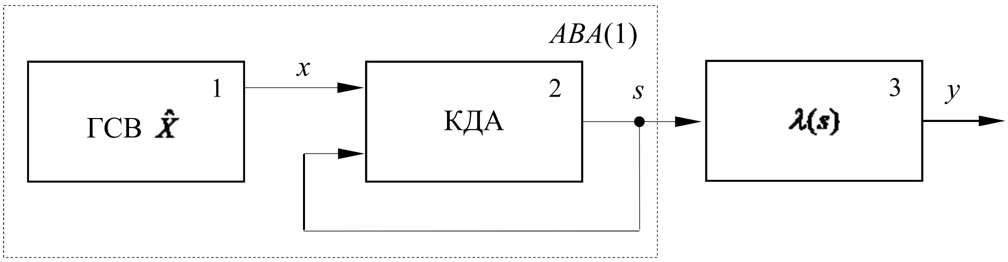

Рис. 4. Структурная схема системы (8)

$$\lambda(s): S \to Y = \{y_0, y_1, \ldots, y_{t-1}\}. \qquad (6)$$

Функцию $\lambda(s)$ определим разбиением множества S на t подмножеств

$$\{A_0, A_1, \ldots, A_{t-1}\},\ \bigcup_{j=0}^{t-1} A_j = S\ ,\ A_j \cap A_k = 0$$

при $\forall j, \forall k = \overline{0, t-1}$ и $j \neq k$. (7)

Подмножества A_j будем называть укрупненными состояниями [13]. Обозначим через $\{Y_t\}$ процесс с t состояниями $y_0, y_1, \ldots, y_{t-1}$, определяемый условием $y_j = i$, $j = \overline{0, t-1}$, $i = \overline{0, n-1}$, если в некоторый момент времени цепь находится в состоянии s_i подмножества A_j. Процесс $\{Y_t\}$, формируемый на выходе автомата (5), является функцией цепи Маркова [1].

Определение 2. Автономным вероятностным автоматом типа $ABA(2)$, эквивалентным автомату (5) [1], будем называть систему

$$ABA(2) = (S,\ \hat{X},\ \Delta(x,s) = s,\ Y,\ \lambda(s) = y,\ \overline{\pi_0})$$
$$\text{или } ABA(2) = (ABA(1),\ Y,\ \lambda(s) = y), \qquad (8)$$

где элементы S, $\hat{X}$, $\Delta(x,s)$, $\overline{\pi_0}$ - те же элементы, что и в (2), а Y, $\lambda(s)$ - то же, что и в (5). Тогда $ABA(2)$ образован на основе $ABA(1)$ со случайным входом в виде дискретной случайной величины $\hat{X}$: последовательность состояний $ABA(1)$ является цепью Маркова, а последовательность выходных букв $y \in Y$ $ABA(2)$ - функцией $\{Y_t\}$ цепи Маркова [1].

На Рис. 4 представлена структурная схема системы (8). Блоки "ГСВ $\hat{X}$" и КДА соответствуют обозначениям Рис. 2. Блок $\lambda(s)$ в соответствии с (6) выдает выходной символ y.

Оценим сложность реализации функций $\Delta(x,s)$ и $\lambda(s)$ автомата (8). Данные функции, заданные в виде автоматных таблиц [3], можно реализовать программно табличным способом, храня данные в оперативной памяти (ОЗУ). В этом случае сложность реализации функций $\Delta(x,s)$ и $\lambda(s)$, измеряемая количеством ячеек в автоматных таблицах (соответственно количеством ячеек ОЗУ), определяется, соответственно, величинами

$$q_1 = l \times n, \qquad (9)$$

$$q_2 = n, \qquad (10)$$

где l определяется из (4). Выражение (9) определяет сложность реализации отображения $X \times S \to S$, а выражение (10) - сложность реализации отображения $S \to Y$. Тогда общая сложность реализации этих функций оценивается величиной

$$q = q_1 + q_2. \qquad (11)$$

Последующие оценки сложности рассматриваемых далее автоматов измеряются также количеством ячеек ОЗУ.

Замечание 2. Дискретную случайную величину $\hat{X}$ можно реализовать табличным способом в соответствии с [32].

Процесс $\{Y_t\}$, построенный посредством разбиения вида (7), может не обладать марковским свойством [13]. Но при определенных ограничениях (свойствах исходной матрицы P_s [13]), принятых для разбиения (7), процесс $\{Y_t\}$ может являться цепью с t состояниями и определяться регулярной стохастической матрицей (обозначим ее символом $\hat{P}$) размера $t \times t$ [13], вычислимой по заданной P_s алгоритмом [6]. Такой процесс $\{Y_t\}$, обладающий марковским свойством, в [13] назван укрупненной цепью Маркова.

Пусть в автомате (5) цепь Маркова задана матрица P_s и, при заданном разбиении (7) множества S, матрица P_s удовлетворяет следующему условию укрупнения [13].

Обозначим

$$p_{kA_j} = \sum_{s_i \in A_j} p_{ki}\,,\ i,k = \overline{0,n-1}\,,\ j = \overline{0,t-1} \quad (12)$$

- вероятность попасть из состояния s_k в множество A_j за один шаг исходной цепи (1).

Теорема 1 [13]. Для того чтобы состояния цепи Маркова можно было укрупнить посредством разбиения на классы $A = \{A_0, A_1, \ldots, A_{t-1}\}$, необходимо и достаточно, чтобы для любых двух классов A_i и A_j и для $\forall s_k \in A_i$, $k = \overline{0,n-1}$, $i,j = \overline{0,t-1}$, вероятности p_{kA_j} имели одно и то же значение. Вероятности $\{\hat{p}_{ij}\}$ переходов между классами образуют стохастическую матрицу $\hat{P}$ укрупненной цепи.

Проверку выполнения условия укрупнения для стохастической матрицы P_s в соответствии с [13] можно провести по алгоритму [6]. По данному алгоритму матрицу P_s можно поставить в соответствие стохастическую матрицу $\hat{P}$ размера $t \times t$, $t \le n$, которая описывает укрупненную цепь с множеством состояний $Y = \{y_0, y_1, \ldots, y_{t-1}\}$. Обозначим генератор случайной величины, формирующий имплицирующий вектор для $\hat{P}$, символом "ГСВ $\hat{X}'$". Тогда автомат вида (5), способный формировать укрупненную цепь с законом $\hat{P}$, можно задать по аналогии с представлением $ABA(1)$ в виде (Рис. 5)

$$ABA(1)' = (Y,\ \hat{X}',\ \Delta(y,x) = y,\ \overline{\pi_0}\,), \qquad (13)$$

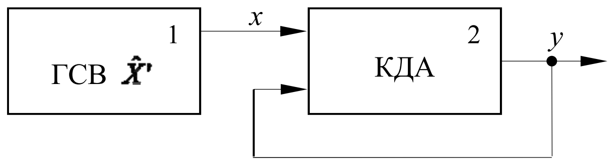

Рис. 5. Структурная схема автомата $ABA(1)'$

где $Y = \{y_0, y_1, \ldots, y_{t-1}\}$ – множество состояний автомата $ABA(1)'$;

$\hat{X}' = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \ldots & x_{l_1-1} \\ p_0 & p_1 & \ldots & p_{l_1-1} \end{pmatrix}$ - входная дискретная случайная величина, принимающая l_1 значений;

пара ($\hat{X}'$, $\Delta(y,x)$) задается на основе разложения матрицы $\hat{P}$ в соответствии с (3).

Определим следующие матрицы V и U [13]. Пусть матрица $V = (v_{ij})$, $i = \overline{0,n-1}$, $j = \overline{0,t-1}$ – булева матрица размера $n \times t$, единичный элемент v_{ij} которой определяет, что состояние s_i исходной цепи входит в укрупненное состояние A_j из (7): $v_{ij} = \begin{cases} 1, & s_i \in A_j \\ 0, & s_i \notin A_j \end{cases}$. Пусть у матрицы $U = (u_{ji})$, $i = \overline{0,n-1}$, $j = \overline{0,t-1}$, размера $t \times n$, j-ая строка (стохастический вектор) задает информацию о классе A_j : ненулевой элемент u_{ji} показывает, что укрупненное состояние A_j содержит состояние s_i из исходной цепи, а значение элемента u_{ji} принимается вероятностным и вычисляется как

$$u_{ji} = \begin{cases} 1 \Big/ \sum\limits_{i=0}^{n-1} v_{ij}, & s_i \in A_j \\ 0, & s_i \notin A_j \end{cases}, \quad \sum_{i=0}^{n-1} u_{ji} = 1,$$

где $\sum\limits_{i=0}^{n-1} v_{ij}$ - число всех состояний s_i исходной цепи, принадлежащих классу A_j.

2. Эквивалентные автоматные модели марковских функций и их сложность

Введем эквивалентность автоматов (5) и (13). Обозначим:

$\pi_{np} = (\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_{n-1})$ - предельный стохастический вектор [13] матрицы P_s в автомате (5);

$\overline{\pi_{np}^{(y)}} = (\pi_0(y_0), \pi_1(y_1), ..., \pi_{t\text{-}1}(y_{t\text{-}1}))$ - стохастический вектор, описывающий предельное распределение букв $y \in Y$ процесса $\{Y_t\}$ на выходе автомата (5);

$\overline{\hat{\pi}_{np}} = (\pi_0(y'_0), \pi_1(y'_1), ..., \pi_{t\text{-}1}(y'_{t\text{-}1}))$ - предельный стохастический вектор укрупненной цепи, вычисленный по стохастической матрице $\hat{P}$ и описывающий предельное распределение состояний укрупненной цепи в автомате (13).

Замечание 3. Стохастический вектор $\overline{\pi_{np}^{(y)}}$ можно вычислить по формуле

$$\overline{\pi_{np}^{(y)}} = \overline{\pi_{np}} \cdot V \; . \qquad (14)$$

При заданном разбиении (7) стохастическая матрица $\hat{P}$, описывающая укрупненную цепь Маркова, определяется равенством [13]

$$\hat{P} = UP_sV \; . \qquad (15)$$

Равенство [13] $\quad VUP_sV = P_sV \qquad (16)$

при заданных P_s, (7), U и V будем рассматривать в соответствии с [13] в качестве условия возможности укрупнения цепи.

Замечание 4 [13]. Из равенства (16) следует справедливость равенства

$$\hat{P}^k = UP^kV \; , \qquad (17)$$

где k – натуральное число.

Теорема 2. Если: 1) матрица P_s при заданном разбиении (7) удовлетворяет условию укрупнения в соответствии с (16); 2) укрупненная матрица $\hat{P}$ построена по матрице P_s и разбиению (7), то

$$\overline{\pi_{np}^{(y)}} = \overline{\hat{\pi}_{np}} \; . \qquad (18)$$

Доказательство теоремы.

Лемма 1. Пусть задана предельная матрица P_{np} регулярной цепи Маркова. Тогда цепь, заданная стохастической матрицей P_{np}, при любом разбиении (7) является укрупняемой.

Доказательство. У регулярной цепи существует стохастическая предельная матрица P_{np}. Все строки этой матрицы одинаковы и равны предельному вектору $\overline{\pi_{np}}$. Зададим некоторую простую цепь, определяемую законом в виде стохастической матрицы P_{np}. При любом разбиении (7), для любых двух классов A_d и A_j и для $\forall s_k \in A_d$, $k = \overline{0, n-1}$, $d, j = \overline{0, t-1}$, вероятности p_{kA_j} (12) имеют одно и то же значение (значения p_{kA_j} для всех k-ых строк являются одинаковыми). Т.е. по условию теоремы 1 данная цепь укрупняема. Лемма доказана.

Лемма 2. Если исходная регулярная цепь Маркова укрупняема по разбиению (7) и матрицы U и V определены как выше, то результатом ее укрупнения также будет регулярная цепь.

Доказательство. Для регулярной цепи существует предельная матрица P_{np}. Тогда, в соответствии с леммой 1, заданная стохастической матрицей P_{np} цепь при любом разбиении (7) является укрупняемой. Тогда в соответствии с равенством (15) справедлива формула $\hat{P}_{np} = UP_{np}V$, где $\hat{P}_{np}$ - стохастическая матрица укрупненной цепи, полученной на основе цепи со стохастической матрицей P_{np}.

Из (17) следует справедливость формулы: $\hat{P}_{np}^k = UP_{np}^kV$. Т.к. матрица P_{np} - предельная, то $P_{np} = P_{np}^k$. Соответственно при неизменности P_{np}, U, V, значение $\hat{P}_{np}^k$ будет равно $\hat{P}_{np}$. Т.е. $\hat{P}_{np}$ не изменяется и является предельной. Тогда согласно теореме 4.1.2 из работы [13, стр. 93] полученная укрупненная цепь со стохастической матрицей $\hat{P}$ является регулярной. Лемма доказана.

Лемма 2 устанавливает, что у цепи, полученной укрупнением регулярной цепи, существуют предельный вектор $\overline{\hat{\pi}_{np}} = (\hat{\pi}_0^{np}, \hat{\pi}_1^{np}, ..., \hat{\pi}_{t\text{-}1}^{np})$ и предельная матрица $\hat{P}_{np}$.

С учетом замечания 3 заменим $\overline{\pi_{np}^{(y)}}$ в доказываемом равенстве на правую часть формулы (14): получим $\overline{\hat{\pi}_{np}} = \overline{\pi_{np}} \cdot V$. Докажем верность этого равенства.

Матрицу $\hat{P}_{np}$ можно вычислить через предел от $\hat{P}$: $\hat{P}_{np} = \lim_{k\to\infty} \hat{P}^k$. По формуле (17) из замечания 4 распишем $\hat{P}^k$: $\hat{P}_{np} = \lim_{k\to\infty} \hat{P}^k = \lim_{k\to\infty} UP^kV =$ $= U \lim_{k\to\infty} P^kV$ Т.к. $P_{np} = \lim_{k\to\infty} P^k$, то $\hat{P}_{np} = UP_{np}V$.

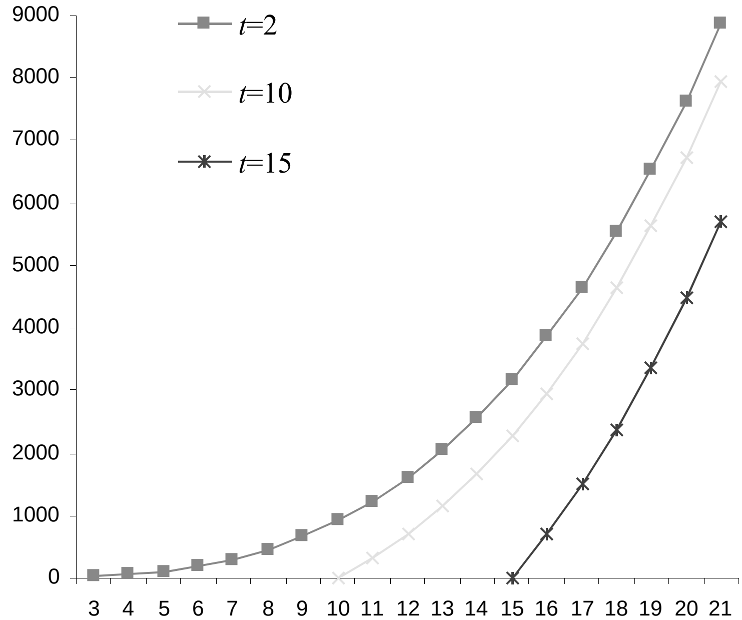

Рис. 6. График изменения величины $q–q_y$ от n и t

Матрицу $\hat{P}_{np}$ можно представить как произведение $\hat{P}_{np} = \xi_{t\times1} \times \overline{\hat{\pi}_{np}}$, где $\xi_{t\times1}$ - единичный вектор-столбец из t элементов. Матрицу P_{np} можно представить как произведение $P_{np} = \xi_{n\times1} \times \overline{\pi_{np}}$, где $\xi_{n\times1}$ - единичный вектор-столбец из n элементов. Тогда равенство $\hat{P}_{np} = UP_{np}V$ можно расписать как $\xi_{t\times1} \times \overline{\hat{\pi}_{np}} = U \times \xi_{n\times1} \overline{\pi_{np}} \times V$.

Из определения матрицы $U = (u_{ji})$, $i = \overline{0, n-1}$, $j = \overline{0, t-1}$, имеющей размеры $t\times n$, следует условие стохастичности по строкам $\sum_{i=0}^{n-1} u_{ji} = 1$. Тогда результатом умножения $U \times \xi_{n\times1}$ будет единичный вектор-столбец $\xi_{t\times1}$ из t элементов. С учетом вышесказанного основное равенство можно записать как $\xi_{t\times1} \times \overline{\hat{\pi}_{np}} = \xi_{t\times1} \overline{\pi_{np}} \times V$. Сократив в обеих частях равенства вектор $\xi_{t\times1}$, получим $\overline{\hat{\pi}_{np}} = \overline{\pi_{np}} \times V$. Теорема доказана.

Определение 3. Автоматы (5) и (13) эквиваленты, если для их выходных последовательностей - процесса $\{Y_t\}$ и укрупненной цепи - выполняется условие (18).

Размер имплицирующего вектора для матрицы $\hat{P}$, определяемого по разложению вида (3), удовлетворяет соотношению $l_1 \le t^2 - t + 1$. Тогда сложность автомата (13), эквивалентного автомату (5), можно оценить по аналогии с формулой (9) как

$$q_y = l_1 \times t. \qquad (19)$$

Замечание 5. Для случая, когда $l_1 < l$, из (11) и (19) следует справедливость соотношения $q_y < q$. С увеличением разности $n - t$, при фиксированном значении t, разность $q–q_y$ возрастает нелинейно.

Пусть $q = q_1 + q_2 = n(l + 1)$, $l = n^2 - n + 1$, $q_y = l_1 \times t$ и $l_1 = t^2 - t + 1$. Тогда $q - q_y = (n^2 - n + 2)n - (t^2 - t + 1)t$. Вычислим изменения $q–q_y$ при разных n и фиксированных t = 2, 10, 15. Полученные значения представим на общем графике (Рис. 6), где по абсциссе задаются значения n, а по ординате - значения величины $q–q_y$. Рис. 6 характеризует уменьшение сложности автоматных схем, построенных на основе укрупнения цепи в зависимости от n и t.

Рассмотрим иной способ задания в автомате (8) элементов $\hat{X}$ и $\Delta(x,s)$. Элементы S, Y, $\lambda(s)$ остаются те же самые.

Зададим некоторую конечную дискретную случайную величину $\hat{X}_1 = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_{m-1} \\ p_0 & p_1 & \dots & p_{m-1} \end{pmatrix}$, $m \geq n$, и некоторую функцию $\Delta_1(x,s)$ автоматной таблицей размера $m \times n$, где в столбце, соответствующем текущему состоянию $s_i \in S$, заданы состояния $s_j \in S$, $i, j = \overline{0, n-1}$, в которые автомат переходит под действием букв $x_k \in X$, $k = \overline{0, m-1}$. Заданный автомат имеет вид

$$ABA(2)_1 = (S,\ \hat{X}_1,\ \Delta_1(x,s),\ Y,\ \lambda(s) = y,\ \overline{\pi_0}). \quad (20)$$

Последовательность состояний $s \in S$ этого автомата является цепью, описываемой матрицей P размера $n \times n$ [4], однозначно определяемой по заданной паре ($\hat{X}_1$, $\Delta_1(x,s)$). Матрицу P можно вычислить по алгоритму [3]. Выходная последовательность автомата является функцией цепи Маркова вида $\{Y_t\}$.

Сложность автомата (20) оценивается величиной $q_3 = m \times n + n$.

Следствие 1 (из теоремы 2). Пусть полученная стохастическая матрица P для автомата (20) является регулярной, задаваемая ею цепь обладает свойством укрупнения вида (16) при заданной функции (6) и по матрице P вычислена соответствующая стохастическая матрица $\hat{P}_1$. Тогда автомат вида (13), формирующий укрупненную цепь с множеством состояний $Y = \{y_0, y_1, \dots, y_{t-1}\}$ и с законом $\hat{P}_1$, эквивалентен автомату (20) по критерию (18).

Справедливость следствия 1 следует из соотношения (16).

Сложность данного автомата, эквивалентного автомату (20), оценивается величиной $q_у$. Для случая, когда $l_1 < m$, выполняется неравенство $q_y < q_3$.

Определение 4. Автономным вероятностным автоматом типа $ABA(3)$ будем называть систему

$$ABA(3) = (S,\ \hat{X},\ \Delta(x,s) = s,\ Y_1,\ \lambda`(y/s) = y,\ \overline{\pi_0}), \quad (21)$$

где S, $\hat{X}$, $\Delta(x,s)$, $\overline{\pi_0}$ - те же элементы, что и в (8); $Y_1 = \{y_0, y_1, \dots, y_{d-1}\}$; $\lambda`(y/s)$ - вероятностная функция выхода, определяемая стохастической матрицей $P_{(y/s)} = (p(y_j/s_i))$, $i = \overline{0, n-1}$, $j = \overline{0, d-1}$, размера $n \times d$, где $d \neq n$ в общем случае.

Элементы $p(y_j/s_i)$ матрицы $P_{(y/s)}$ задают вероятность появления буквы y_j, $j = \overline{0, d-1}$, при условии поступления на вход функции $\lambda`(y/s)$ состояния $s_i$, $i = \overline{0, n-1}$. Т.е. функция $\lambda`(y/s)$ при состоянии s_i принимает значения $y_0, y_1, \dots, y_{d-1}$ с вероятностями $p_{i\,0}, p_{i\,1}, \dots, p_{i\,d-1}$. Обозначим данный процесс - последовательность выходных букв $y \in Y_1$ автомата $ABA(3)$ - как процесс $\{Y_t'\}$. Данный процесс относится к классу функций цепей Маркова [1, 13].

Матрицу $P_{(y/s)}$ представим на основе разложения вида (3) выражением

$$P_{(y/s)} = \sum_{i=0}^{l_2-1} p_i M(u_i),$$

где p_i, $i = \overline{0, l_2 - 1}$ - элементы стохастического вектора $\overline{P}_2 = (p_0, p_1, \dots, p_{l_2-1})$, определяющего распределение дискретной случайной величины $\hat{U}$; $\hat{U}$ принимает конечное множество значений $U = \{u_0, u_1, \dots, u_{l_2-1}\}$; $M(u_i)$, $i = \overline{0, l_2 - 1}$ - булева стохастическая матрица размера $n \times d$, соответствующая символу u_i; величина l_2 определяется величиной [33]

$$l_2 \leq n \cdot d - d + 1.$$

Т.е. автомат (21) можно задать эквивалентным автономным вероятностным автоматом [1] (Рис. 7) вида

$$ABA(3)_э = (ABA(1),\ \hat{U},\ \mu(u,s) = y) \quad (22)$$

где "ГСВ $\hat{U}$" формирует дискретную случайную величину $\hat{U}$ со значением u_i, $i = \overline{0, l_2 - 1}$, с распределением $\overline{P}_2$. Блок 2 формирует цепь с n состояниями, блок 4 реализует функцию выхода $\mu(u,s)$ с t возможными значениями $y \in Y_1$.

При заданных $q_4 = l_2 \times d$ и q_1 из (9) сложность системы (22) равна

$$q_5 = q_1 + q_4. \quad (23)$$

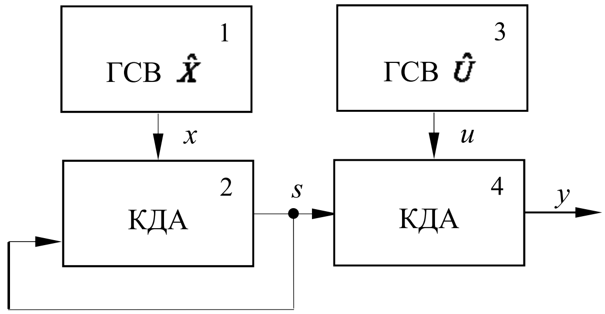

Рис. 7. Структурная схема системы (22)

Замечание 6. Для случая $d \neq n$ стохастический процесс $\{Y_t'\}$, задаваемый матрицей $P_{(y/s)}$, не удовлетворяет условию (16) укрупнения цепи.

Модификацией системы (22) служит получение на выходе цепи Маркова, когда $d = n$, а матрицы P_s и $P_{(y/s)}$ допускают укрупнение в соответствии с (16) при заданных разбиениях вида (7). Сложность полученной системы (обозначим ее как $ABA(3)_м$) при данных ограничениях можно оценить величиной

$$q_6 = 2q_y,$$

где величина q_y определена в (19); $q_6 < q_5$.

Определение 5. Автономным вероятностным автоматом типа $ABA(4)$ будем называть систему

$$(S,\ \hat{X},\ \Delta(x,s) = s,\ Y,\ \lambda(s) = y,\ \overline{\pi_0},\ Z,\ \mu(z/y))$$
$$\text{или } ABA(4) = (ABA(2),\ Z,\ \mu(z/y)), \qquad (24)$$

где $ABA(2)$ задается системой (8), $\mu(z/y)$ - вероятностная функция, задаваемая, аналогично функции $\lambda`(y/s) = y$, стохастической матрицей $P_{(z/y)} = (p(z_j/y_i))$, $i = \overline{0,t-1}$, $j = \overline{0,d-1}$, размера $t \times d$, где $t \neq d$ в общем случае и элемент $p(z_j/y_i)$ определяет вероятность появления буквы z_j при условии, что на выходе автомата $ABA(2)$ появилась буква y_i.

На Рис. 8 представлена структурная схема $ABA(4)$, где пунктирной линией очерчен базовый $ABA(2)$, вырабатывающий последовательность состояний y процесса $\{Y_t\}$. Блоки 4-5 реализуют функцию $\mu(z/y)$ по аналогии с блоками 3-4 на Рис.6. Процесс, представляющий собой последовательность букв z автомата $ABA(4)$, является функцией цепи Маркова [1].

Оценим сложность системы (24) для следующих случаев.

1. Без укрупнения матрицы P_s, $d > t$. Тогда размер l_3 имплицирующего вектора, формируемого блоком 5, определяется величиной [33]

$$l_3 \leq d \cdot t - d + 1,$$

и сложность автомата (24) оценивается как $q_8 = q + q_7$, где $q_7 = l_3 \times t$, $q_7 > q_y$.

2. Без укрупнения матрицы P_s, $d = t$. Тогда сложность автомата (24) оценивается величиной $q_9 = q + q_y$, $q_9 < q_8$.

3. С укрупнением матрицы P_s. Пусть $d = t$ и существует возможность укрупнения матрицы P_s при разбиении вида (7). Тогда задание автомата (24) сводится к заданию автомата $ABA(3)_м$ и его сложность оценивается величиной q_6, $q_6 < q_9$.

Следствие 2 (из теоремы 2). Автоматы вида (24), представленные для случаев 2-3, эквивалентны: характеристики их выходных последовательностей отвечают условию

$$\pi_{пр} \cdot V \cdot P_{(z/y)} = \hat{\pi}_{пр} \cdot P_{(z/y)},$$

где левая и правая части описывают предельные распределения выходных последовательностей автомата (24) для случая 2 и 3 соответственно.

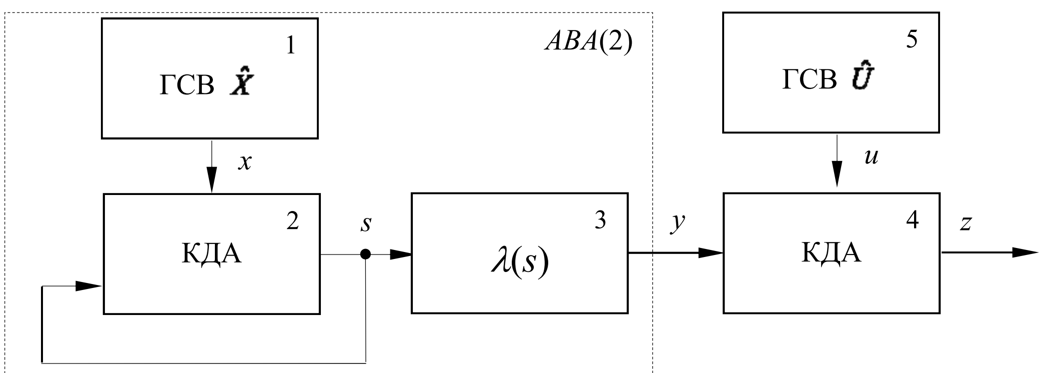

Рис. 8. Структурная схема системы (24)

Заключение

Определены оценки сложности алгоритмической реализации автономных вероятностных автоматов, формирующих функции цепей Маркова. Рассматриваемым автономным вероятностным автоматам поставлены в соответствие эквивалентные автоматы, представленные на основе укрупненных цепей Маркова. Приведенные оценки сложности эквивалентных автоматов характеризуют высокую эффективность применения аппарата укрупнения цепей для уменьшения сложности рассматриваемых автоматов.

Отметим следующее приложение модели (13). В работе [34] рассмотрен метод моделирования марковских функций вида (5) полиномами над конечным полем GF(2^n), где порядок поля (величина 2^n) зависит от величины l. Актуальной задачей при построении рассматриваемых полиномов является задача понижения порядка поля. Применение модели (13) для задачи моделирования марковских функций над полем GF(2^n) позволит понизить порядок поля в соответствии с зависимостью, представленной на Рис.6.

Литература

1. Бухараев Р.Г. Автоматное преобразование вероятностных последовательностей // Вероятностные методы и кибернетика. Вып. 4. Казань: Изд-во КГУ, 1966. С. 24-33.
2. Бухараев Р.Г. Основы теории вероятностных автоматов. М.: Наука, 1985. 287 с.
3. Левин Б.Р., Шварц В. Вероятностные модели и методы в системах связи и управления. М.: Радио и связь, 1985. 312 с.
4. Davis A.S. Markov chains as random input automata. Amer. Math. Monthly, 1961, 68, 3, pp. 264-267.
5. Ченцов В.М. Об одном методе синтеза автономного стохастического автомата // Кибернетика. Киев, 1968. №3. С. 32-35.
6. Поспелов Д. А. Вероятностные автоматы. М.: Энергия, 1970. 88 с.
7. Бухараев Р.Г., Захаров В.М., Управляемые генераторы случайных кодов. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1978. 160 с.
8. Габбасов Н.З. Задача об имплицирующем векторе и ее приложениях // Вероятностные методы и кибернетика. Казань: Изд-во КГУ, 1987. С. 36-50.
9. Кузнецов С.Е., Нурмеев Н.Н., Салимов Ф.И. Задача о минимальном имплицирующем векторе // Математические вопросы кибернетики. Вып. №3. Сборник статей / Под ред. С.В. Яблонского. М.: Наука, Гл. ред. физико-математической литературы, 1991. С. 199-216.
10. Захаров В.М., Эминов Б.Ф. Анализ алгоритмов разложения двоично-рациональных стохастических матриц на комбинацию булевых матриц // Информационные технологии, №3. М.: Новые технологии, 2008. С. 54-59.
11. Ченцов В.М. Об одном методе синтеза автономного стохастического автомата // Кибернетика. Киев, Кибернетика, 1968. №3. С. 32-35.
12. Романовский В. Дискретные цепи Маркова. М.:Гостехиздат, 1949.436 с.
13. Kemeny J., Snell L. Finite Markov chains. Princeton: Van Nostrand Company. 1960. 210 pp. Кемени Д., Снелл Д. Конечные цепи Маркова. М.: Наука, 1970. 272 с.
14. Королюк В.С., Турбин А.Ф. Полумарковские процессы и их приложения. Киев: Наукова Думка, 1976. 184 с.
15. Захаров В.М., Эминов Б.Ф. Алгоритмы укрупнения цепей Маркова // Вестник Казанского государственного технического университета им. А.Н. Туполева, №2 (выпуск 1), 2013. С.125-133.
16. Gambin, A., Pokarowski, P. A new combinatorial algorithm for large Markov chains. Proc. Computer Algebra in Scientific Computing, CASC'01, Springer, Berlin 2001, pp. 195-212. http://bioputer.mimuw.edu.pl/papers/aggr.pdf
17. Феррари Д. Оценка производительности вычислительных систем. М.: Мир, 1981. 576 с.
18. Franceschinis G., Muntz R. Bounds for quasi-lumpable markov chains. Los Angeles: University of California, 1993. 37 p.
19. Stewart W.J. Introduction to the numerocal solution of Markov chains, Princeton University Press, 1994.
20. Мазуренко И. Л. Эффективный способ введения метрики на множестве непрерывных СММ-автоматов // Интеллектуальные системы, том 11, выпуск 3. М.: Изд-во МГУ, 2007. С. 593-608 (СММ - скрытая марковская модель).
21. Деундяк В.М., Жданова М.А. Полиномиальное представление скрытой полумарковской модели фергнесовского типа // Вестник ВГУ: системный анализ и информационные технологии, 2013, №2. С. 71-78.
22. Погорелов Б.А., Пудовкина М.А. Об обобщениях марковского подхода при изучении алгоритмов блочного шифрования // Прикладная дискретная математика. Приложение. Сентябрь 2014. № 7, 2014. С. 51-52.
23. Derisavi, S., Hermanns, H., Sanders, W. H.: Optimal State-Space Lumping in Markov Chains. Information Processing Letters 87 (6), 2003. pp.309–315.
24. Hillston J. Compositional Markovian modelling using a process algebra // Computations with Markov Chains, 1995, pp. 177-196.
25. Geiger B., Temmel C. Lumpings of Markov chains, entropy rate preservation, and higher-order lumpability // Advances in Applied Probability, 51(4), 2014. pp. 1114-1132.
27. Bolch G., Greiner S. Queuing Networks and Markov Chains Modeling and Performance Evaluation with Computer Science Application. Wiley. 2006. 896 p.
28. Katehakis M., Smit L. A Successive Lumping Procedure for a Class of Markov Chains // Probability in the Engineering and Informational Sciences 26 (4), 2012. pp 483-508.
29. Пономаренко Л.А., Меликов А.З., Нагиев Ф.Н. Анализ системы обслуживания с различными уровнями пространственных и временных приоритетов // Информа-

ционно-управляющие комплексы и системы, № 2(18), 2006. С. 80-89.
30. Рожков М.И. Суммирование марковских последовательностей на конечной абелевой группе//Дискретная математика, №3, т.22, 2010. С.44-62.
31. Максимов Ю.И. Некоторые результаты для задачи укрупнения состояний цепей Маркова // Труды по дискретной математике, №8. М.: Физматлит, 2004. С. 148-154.
32. Походзей Б.Б. Сложность табличных методов моделирования конечных дискретных распределений // Изв. Вузов. Математика. Казань: Изд-во КГУ, 1985, №7. С. 45-50.
33. Лоренц А.А. Синтез надежных вероятностных автоматов. Рига: Зинатне, 1975. 187 с.
34. Эминов Б.Ф., Захаров В.М. Методы и алгоритмы построения и анализа полиномиальных функций над конечным полем на основе стохастических матриц. Saarbrucken: LAP Lambert Academic Publishing, 2011. 161 c.

Эминов Булат Фаридович. Доцент кафедры Компьютерных систем Казанского национального исследовательского технического университета (КНИТУ-КАИ) им. А.Н. Туполева. Окончил Казанский государственный технический университет им. А.Н. Туполева в 2005 году. Кандидит физико-математических наук. Автор 55 печатных работ. Область научных интересов: дискретная математика, стохастические процессы, цепи Маркова, поля Галуа, программирование.
E-mail: bulfami@mail.ru

Захаров Вячеслав Михайлович. Профессор кафедры Компьютерных систем КНИТУ-КАИ им. А.Н. Туполева. Окончил Казанский государственный университет в 1964 году. Доктор технических наук. Автор 170 печатных работ. Область научных интересов: дискретная математика, стохастические процессы, цепи Маркова, поля Галуа.
E-mail: gilvv@mail.ru

Хуссейн Мазен Али Али. Аспирант кафедры Компьютерных систем КНИТУ-КАИ им. А.Н. Туполева. Окончил Казанский государственный технический университет им. А.Н. Туполева в 2012 году. Автор 4 печатных работ. Область научных интересов: дискретная математика, стохастические процессы, цепи Маркова, программирование.
E-mail: mazinaliali@yahoo.com