

Параллельные вычисления и закон построения модельного описания для алгоритмов цифровой обработки сигналов¹

О.В. Климова

Аннотация. Предлагается формальное решение проблемы построения параллельных алгоритмов цифровой обработки сигналов, характеризующееся разработкой закона формирования модельного описания их внутренней структуры. Решение представляет теоретические основы для математического моделирования алгоритмов и открывает возможность проведения на формальной основе совместных исследований алгоритмов и архитектур перспективных вычислительных систем. Такой этап, являясь неотъемлемой частью процесса их проектирования, позволит повысить эффективность параллельной обработки данных.

Ключевые слова: параллельная обработка, внутренняя структура алгоритмов, декомпозиция, параметризованный синтез алгоритмов, композиционная форма, модельное описание.

Введение

Параллельный принцип обработки информации является естественным эволюционным способом повышения скорости вычислений. Для успешной реализации этого принципа и достижения указанного эффекта необходимо декомпозировать вычислительный процесс на составляющие его подпроцессы, реализовать их одновременную обработку, а затем произвести композицию полученных результатов. Практика применения параллельных вычислений показала, что сформулированная выше задача является далеко не тривиальной. Дело в том, что весь накопленный потенциал вычислительных алгоритмов ориентирован на последовательную обработку данных и представлен во временной

среде. Параллельный же принцип изменил среду вычислений, сделав её пространственно-временной. Поэтому алгоритмы, предназначенные для реализации в такой среде, изначально должны иметь пространственно-временную локализацию, выявляемую в процессе изучения внутренней структуры вычислений. Более того, для достижения эффективности параллельной обработки данных необходимо обеспечить согласованность алгоритмических и архитектурных параметров. Для этого необходимо решить проблему согласования алгоритмических и архитектурных характеристик параллельных вычислительных систем. Такое согласование может быть выполнено в ходе совместных исследований алгоритмов и архитектур. Именно от возможности их реализации зависит эффек-

¹ Работа выполнена при частичной поддержке программы УрО РАН "Математические модели, алгоритмы, высокопроизводительные вычислительные и информационные технологии и приложения" (проект 15-7-1-20).

тивность параллельной обработки. Однако для проведения требуемых исследований, которые должны характеризоваться синтезом и анализом различных вариантов организации вычислений, необходимы новые формальные описания, представляющие внутреннюю структуру вычислительных алгоритмов, а также позволяющие управлять изменениями этой структуры. Следовательно, необходимо создавать такие описания. Вышеупомянутая проблема согласования может быть решена с помощью создания формальных инструментов, изначально ориентированных на описание организации параллельных вычислений в пространственно-временной среде. Таким образом, изменение среды организации вычислений привело к необходимости изменения инструмента, используемого для её описания. Этот инструмент должен уметь:

- описывать разнообразие вариантов организации вычислений;
- обеспечивать формальный синтез этих вариантов;
- предоставлять возможность управления их изменениями.

На основе алгоритма эти действия выполнить нельзя. Однако их можно реализовать в рамках модельного описания организации вычислений. Следовательно, создание модели – это путь построения параллельных алгоритмов, ориентированный на обоснованный выбор варианта организации вычислений, осуществляемый, в свою очередь, на основе совместных исследований алгоритмов и архитектур.

Анализируя общие результаты исследований, направленные на построение параллельных алгоритмов и характеризующиеся реструктуризацией [1-3] известных последовательных алгоритмов и их программ, можно отметить, что они не приводят к созданию общего формального описания различных вариантов организации вычислений и характеризуются адаптацией структур последовательных алгоритмов к условиям параллельной обработки. Поэтому, результаты, полученные на этом пути, не могут привести к созданию формального инструмента, способного обеспечить реализацию совместных исследований алгоритмов и архитектур. В то же время, во многих современных

работах [4, 5] подчеркивается важность и актуальность таких исследований, а также приводятся результаты, обеспечивающие их реализацию на основе найденных приемов описания разнообразия параллельных алгоритмов. Эти приемы, позволяющие изучать внутреннюю структуру алгоритмов, всё же оставляют указанные исследования на том же алгоритмическом уровне абстракции. Для того чтобы перейти от алгоритма к модели организации параллельных вычислений необходимо поднять процесс исследования структур алгоритмов на более высокий уровень абстракции. Сделать это можно, используя формулу Алгоритм + Структура данных = Модель и определив условия, при которых эта формула будет справедливой. Тогда, широко известное выражение [6] Никлауса Вирта – Алгоритм + Структура данных = Программа, связанное с последовательной обработкой данных, может быть рассмотрено в качестве отправной точки движения по адаптивному пути построения параллельных алгоритмов, характеризующемуся реструктуризацией программ. А формула, приведенная выше, может быть использована для представления самостоятельного пути построения параллельных алгоритмов, изначально ориентированного на параллельную обработку данных и связанного с построением модели. Однако, известных результатов, относящихся к области разработки моделей организации параллельных вычислений, чрезвычайно недостаточно. Очевидно, что такие модели не могут быть универсальными, они должны разрабатываться для выделенного класса операций.

В предлагаемой работе представляется закон формирования модельного описания внутренней структуры алгоритмов для класса базовых операций цифровой обработки сигналов (ЦОС). Разработать такой закон удалось, встав на самостоятельный путь построения параллельных алгоритмов и изучив внутреннюю структуру входных данных и рассматриваемых операций. Представляемый закон позволяет получить общее для последовательных и параллельных алгоритмов описание и на его основе синтезировать различные вычислительные структуры, а также управлять процессом их изменения.

1. Постановка задачи

Итак, параллельные вычисления требуют новых формальных инструментов для описания разнообразия вариантов организации вычислений. Рассматриваемая и решаемая в данной статье задача – разработка закона построения модельного описания алгоритмов ЦОС, связана с созданием таких инструментов. Чтобы решить эту задачу необходимо выполнить следующие действия:

- анализ результатов, полученных при изучении внутренней структуры данных и базовых операций ЦОС и представленных в работах [7-12];
- разработка общей методики синтеза композиционных форм для класса операций ЦОС;
- формирование структур модельных описаний, как для отдельных операций, так и для целого класса операций.

Выполнение вышеперечисленных действий иллюстрируется на примере операций свертки и дискретного преобразования Фурье (ДПФ), являющихся базовыми для ЦОС. Отправной точкой для этого являются следующие аналитические выражения, представляющие последовательные алгоритмы вычисления циклической свертки длины N

$$C(t) = \sum_{b=0}^{N-1} x(t-b)y(b) \quad (1.1)$$

и N – точечного дискретного преобразования Фурье (ДПФ) входной последовательности $x(t)$

$$S(q) = \sum_{t=0}^{N-1} x(t)W_N^{tq}, \quad (1.2)$$

где

$$W_N = e^{-2\pi i/N}.$$

Прежде чем перейти к описанию реализации представленного выше списка необходимых действий сформулируем общие требования к разрабатываемому закону. Эти требования должны вытекать из требований к модельному описанию алгоритмов ЦОС, которое должно стать основой для совместных исследований алгоритмов и архитектур, а следовательно, должно обеспечивать синтез и анализ разнооб-

разия вариантов организации параллельных вычислений, а также возможность управления изменениями их структур. Для обеспечения этих требований закон построения модельного описания должен раскрывать и описывать внутреннюю структуру данных и операций с помощью аналитических композиционных форм. Причем, общие правила построения этих форм не должны зависеть от вида операции и её размерности. Таким образом, разрабатываемый закон должен формировать теоретические основы для математического моделирования алгоритмов ЦОС.

2. Теоретические основы построения модельного описания алгоритмов ЦОС

Разработать требуемый закон можно на основе результатов исследований внутренней структуры вычислительных операций, характеризующихся получением эквивалентных композиционных форм для представления алгоритмов и данных. Тогда симбиоз композиционных форм операций (КФО) и композиционных форм данных (КФД) позволит получить модельное описание вариантов организации вычислений. А формула – КФО + КФД = Модель = Алгоритм + Структура данных, определит условие построения модельного описания алгоритмов – выявление закона образования композиционных форм.

В работе [15] было предложено при построении параллельных вычислительных структур использовать принцип детерминированной композиции детерминированных компонентов. Согласно этому принципу последовательное исполнение операций – это простейшая модель организации вычислений, которая может быть преобразована в композиционную модель детерминированных компонентов рассматриваемой операции. В вышеупомянутых работах автора [7-12] для создания формального инструмента построения параллельных алгоритмов ЦОС реализован именно такой подход, характеризующийся выделением инвариантных компонентов рассматриваемой операции и установлением правил их композиции в исходную операцию. Полученные в результате пред-

ложенных эквивалентных преобразований композиционные формы операций ЦОС можно считать параметрическим расширением их исходных форм, способным порождать как известные последовательные алгоритмы, так и множество параллельных вычислительных структур. Такое свойство композиционных форм позволяет строить параллельные варианты организации вычислений на основе принципа преемственности основных законов их реализации, установленных в процессе создания последовательных алгоритмов. Таким образом, все формализмы, разработанные для последовательных вычислений, будут сохранены. Для разработки требуемого закона построения модельного описания алгоритмов ЦОС выполним краткий анализ вышеозначенных результатов, характеризующихся выявлением законов образования композиционных форм в процессе изучения внутренней структуры данных и операций.

В качестве общей характеристики предлагаемых законов отметим, что они были получены при изучении влияния масштаба данных и операций на изменение их пространственных структур. Были выделены компоненты, обладающие свойством инвариантности к сдвигу и масштабированию по времени и позволяющие представить исходные структуры данных и операций, описываемые выражениями (1.1) и (1.2), с помощью композиционных форм.

В основе создания композиционных форм лежит декомпозиция данных. В качестве входной последовательности данных рассматривается функция $x(t)$, заданная на отрезке $[0, N - 1]$. Декомпозиция выполняется путем реализации следующих действий – разложения порядка $N = h_1 \cdot L$, представления числа t с помощью выражения

$$t = j + t_1 \cdot L, \tag{2.1}$$

где

$$j = 0, \dots, L - 1, \quad t_1 = 0, \dots, h_1 - 1$$

и введения особых функций, заданных по функции $x(t)$ на отрезке $[0, N - 1]$,

$$x_j^*(t) = \begin{cases} x(t + j), & t = t_1 \cdot L \\ 0, & t \neq t_1 \cdot L \end{cases} \tag{2.2}$$

Функции вида (2.2) названы особыми ввиду того, что обладают двумя важными свойствами. Одним из них является свойство эквивалентности сдвигов [7-12] на группах одного порядка, но характеризующихся разными структурами

$$Z_N, \quad Z_{h_1} \times Z_L, \quad Z_{h_1} \times Z_{\bar{L}},$$

а вторым является свойство композиции, иллюстрируемое ниже. Действительно, с помощью функций $x_j^*(t)$ можно представить $x(t)$ следующим образом:

$$x(t) = \sum_{j=0}^{L-1} x_j^*(t - j). \tag{2.3}$$

В основе создания композиционной формы данных (3.3) лежит операция сдвига по времени, выполняемая над данными функциями. Таким образом, выражение (2.3) устанавливает важное свойство функций $x_j^*(t)$, названное свойством композиции, и одновременно определяет композиционную форму входной последовательности. Эта форма выявляет внутреннюю структуру входных данных, причем вид такой структурной организации определяется параметром j .

Выражения (2.1)-(2.3) получены в результате исследований структуры входной последовательности. Они формируют закон построения внутренней структуры данных. Представленные действия по реструктуризации входных данных могут носить рекуррентный характер, а также могут быть использованы для декомпозиции данных различной мерности [13, 14]. Результатом таких преобразований являются новые композиционные формы представления соответствующих им входных данных.

Анализ установленного закона описания внутренней структуры данных позволил выработать общую методологию их декомпозиции, представленную в работах [13, 14]. Проиллюстрируем базовые шаги разработанной методологии для одномерных данных. Композиционно её можно представить с помощью трёх последовательных шагов.

Первый шаг характеризуется выделением на временной оси L наборов входных данных в точках $t = j + t_1 \cdot L$ для $j = 0, \dots, L-1$.

Второй шаг связан с формированием по функции $x(t)$ особых функций $x_j^*(t)$, обладающих композиционными свойствами, путем сдвига на j позиций влево по оси времени каждого j -го набора данных.

Последний третий шаг характеризуется операцией сжатия (масштабирования по времени) функций, образованных на втором шаге и сдвинутых на j позиций вправо:

$$x_j^*(t - j)/L = x_j^*((t_1 \cdot L + j) - j)/L = x_j^*(t_1).$$

Предложенная методология позволяет выполнить переход от исходной последовательности к заменяющему её набору независимых данных, которые можно обрабатывать одновременно. Предназначениями методологии являются создание формальной основы для синтеза параллельных алгоритмов и установление взаимно-однозначных соответствий между последовательной и параллельной обработкой данных. Управляя значениями параметра L , определяющими пространственную составляющую вычислительной среды, можно не только порождать различные варианты организации входных данных, специально предназначенные для реализации их одновременной обработки, но и осуществлять прямой и обратный переход из пространственно-временной среды представления данных во временную. Разработка представленной методологии позволила открыть следующие возможности, позволяющие повысить эффективность параллельной обработки:

- возможность формирования разнообразия структур данных;
- возможность параметрического управления изменениями структур данных;
- возможность построения методики синтеза композиционных форм для представления операций.

Полученная композиционная форма (2.3) представления входных данных стала базой для разработки общего подхода к построению параллельных алгоритмов. При выполнении декомпозиции данных был использован аппарат теории групп, поэтому предлагаемая декомпозиция и соответствующий ей подход были названы теоретико-групповыми.

Теперь, выполнив анализ результатов, полученных при изучении внутренней структуры данных, рассмотрим общие вопросы построения композиционных форм, эквивалентных аналитическим выражениям вида (1.1), (1.2) и им подобным, а также реализуем возможность, предоставляемую методологией декомпозиции данных и характеризующуюся созданием методики синтеза композиционных форм для представления операций ЦОС. Основу методики составляют полученные композиционные формы данных и порождаемые ими эквивалентные преобразования над выражениями (1.1), (1.2). Методика состоит из следующих шагов:

- формирование исходных композиционных форм путем замены $x(t)$ на композиционную форму (2.3) в выражениях (1.1), (1.2) и им подобным, представляющих операции ЦОС;
- выполнение необходимых эквивалентных преобразований над исходными композиционными формами;
- разработка декомпозиционных методов построения параллельных алгоритмов, позволяющих вскрыть внутреннюю композиционную структуру рассматриваемых вычислительных операций, и переход к композиционным формам их представления.

Данная общая методика была разработана на основе анализа созданных методов декомпозиции отдельных операций ЦОС, позволивших получить соответствующие им композиционные формы. Указанные методы подробно описаны в работах [7-13], поэтому ниже приведем лишь те результаты их применения, которые позволят нам разработать и представить общий закон определения внутренней структуры вычислений для базовых операций ЦОС. В основе закона лежат особые функции, выявленные в процессе выполнения эквивалентных преобразований и обладающие свойством инвариантности к сдвигу и масштабированию по времени. Использование таких функций позволило заменить исходные выражения (1.1), (1.2) на композиционные формы, в которых структуры соответствующих алгоритмов заданы с помощью параметров. Поэтому, полученные формы позволяют реализовать гибкий выбор варианта структуры параллельного алгоритма. Проиллюстрируем сказанное, представив композицион-

ную форму, которую можно получить с помощью использования представленной выше методики,

$$C(t) = C(t_1 \cdot L + p) = \sum_{j=0}^{L-1} C_j(t) = \sum_{j=0}^{L-1} \sum_{b_1=0}^{h_1-1} x_j^*((t_1 - b_1)L) \cdot y(b_1 \cdot L + p - j), \tag{2.4}$$

где

$$t = t_1 \cdot L + p, \quad b = b_1 \cdot L + p, \\ t_1 \in [0, h_1 - 1], \quad p \in [0, L - 1].$$

Выражения (1.1) и (2.4) эквивалентны. В выражении (2.4) функции $C_j(t)$ являются теми вышеупомянутыми особыми функциями, которые обладают свойствами инвариантности относительно операций сдвига и масштабирования во времени. Именно выявление таких функций позволило реализовать эволюционный переход из временной области представления рассматриваемой операции (1.1) в пространственно-временную область. Таким образом, используя выражение (2.4), можно представить внутреннюю структуру операции свертки

с помощью коротких сверток $C_{jp}(t_1)$ длины h_1 и двумерной координационно-вычислительной среды, в которую помещены вычисления над ними. Правила организации вычислений и законы их координации в двумерной среде определяются выражением (2.4). На основе этого выражения были получены композиционные формы для вычисления свертки в частотной области и, тем самым, было найдено решение задачи использования эффективных, но коротких теоретико-числовых преобразований (ТЧП) [7, 16] для вычисления сверток большой длины. На Рис. 1 и Рис. 2 представлены иллюстрации внутренней структуры операции свертки, вычисляемой во временной (Рис. 1) и частотной (Рис. 2) областях с помощью двумерной пространственной среды, характеризуемой параметрами j и p . Отметим, что вычисления свертки в частотной области выполняются с использованием прямых и обратных ортогональных преобразований (ОП, ОП⁻¹) длины h_1 . Это могут быть ДПФ, либо ТЧП. В каждой ячейке координационно-вычислительной среды, обозначенной на Рис. 1

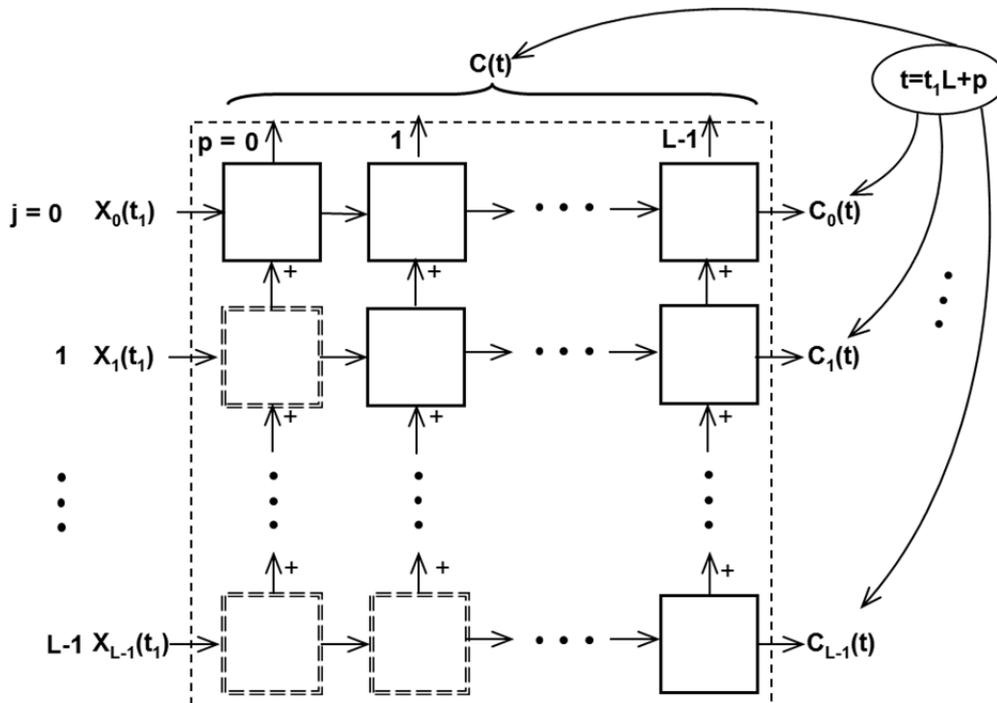


Рис. 1. Иллюстрация внутренней параметризованной структуры операции свертки, вычисляемой во временной области, с помощью двумерной пространственной среды

с помощью штриховых линий, вычисляются короткие свертки $C_{jp}(t_l)$. Их суммирование по параметру j при фиксированном значении параметра p приводит к образованию L h_l -точечных наборов данных $C(t_l \cdot L + p)$, формирующих отсчеты искомой N -точечной свертки (1.1). Реализация же вычислений при фиксированном значении параметра j позволит получить L коротких свертков $C_{jp}(t_l)$ длины h_l , формирующих N отсчетов свертков $C_j(t)$. Таким образом, представленная внутренняя структура операции свертки обеспечивает гибкий доступ, как к определенным участкам вычислительного процесса, так и к требуемым отсчетам искомой операции. При переходе к вычислениям в частотной области в каждой ячейке координационно-вычислительной среды выполняется произведение соответствующих спектров длины h_l .

Суммирование этих спектров по параметру j при фиксированном значении параметра p

приводит к образованию L h_l -точечных спектров $S(q_l + ph_l)$ функций $C(t_l \cdot L + p)$. Рассмотренная внутренняя структура вычислений свертки в частотной области позволяет использовать короткие ТЧП для вычисления длинных свертков и обеспечить гибкий выбор анализируемого частотного участка.

Итак, параметризация внутренней структуры операции свертки позволила представить разнообразие вариантов организации её вычислений. Более того, выражение (2.4) позволило расширить это разнообразие путем разработки на его основе методов псевдодвумерной декомпозиции, описанных в работах [11, 12] и устанавливающих его структурную связь с двумерной сверткой. Было показано, что форма свертки (2.4) отличается от двумерной свертки сдвигами на один разряд $(q_l - 1)$ на группе $Z_{h_l} (L - 1)$ последовательностей $y_{-jp}(q_l L)$, заданных на группе Z_{h_l} и расположенных в точках $j > p$, при вычислении свертки по координате p . На Рис. 1 ячейки координационно-

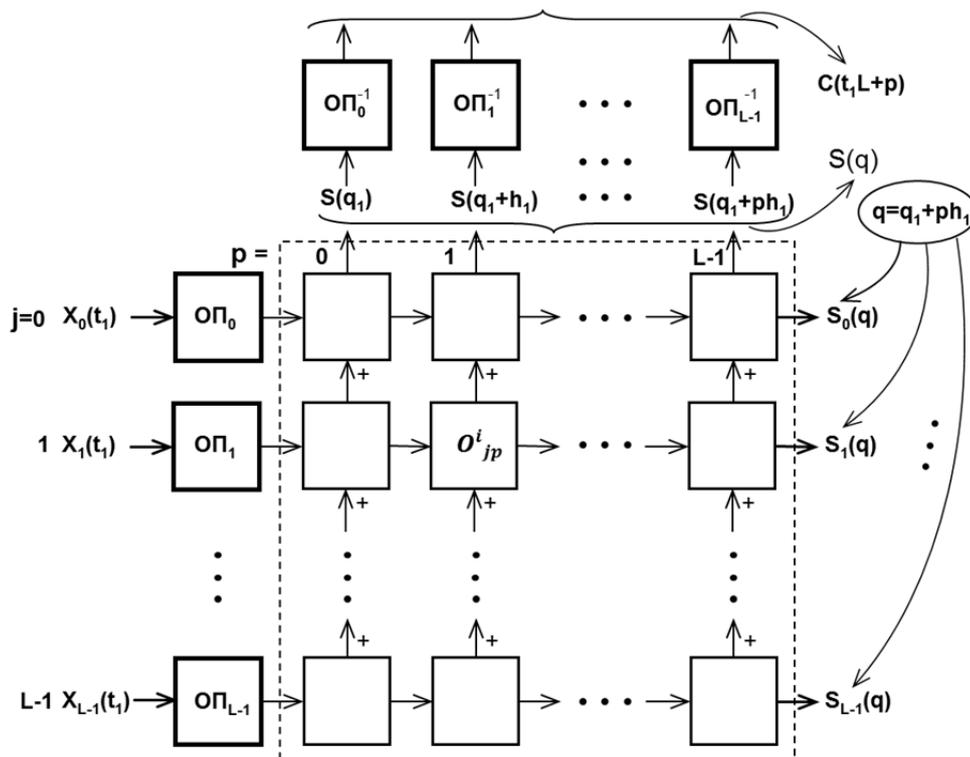


Рис.2. Иллюстрация внутренней параметризованной структуры операции свертки, вычисляемой в частотной области, с помощью двумерной пространственной среды

вычислительной среды, принадлежащие этой области, выделены специальным образом (с помощью двойных штриховых линий). Разработка методов псевдодвумерной декомпозиции свертки (1.1) позволила получить соответствующие им композиционные формы [11, 12], что, в свою очередь, расширило структурное разнообразие вариантов организации вычислений в рамках одного декомпозиционного подхода, повысив тем самым гибкость выбора вычислительной структуры.

Далее, для иллюстрации общности представленной выше методики синтеза композиционных форм для различных операций ЦОС приведем результат её использования для операции ДПФ. Исходная композиционная форма ДПФ описывается следующим выражением

$$S(q) = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{L-1} x_j^*(t-j) \cdot W_N^{iq} = \sum_{j=0}^{L-1} W_N^{jq} \sum_{i=0}^{N-1} x_j^*(t) \cdot W_N^{iq},$$

которое легко приводится к следующему виду

$$S(q) = S(q_1 + p h_1) = \sum_{j=0}^{L-1} W_L^{jp} \cdot W_N^{jq_1} \sum_{t_1=0}^{h_1-1} x_j^*(t_1 \cdot L) \cdot W_h^{t_1 q_1},$$

где

$$q = q_1 + p \cdot h_1, \quad q_1 = 0, \dots, h_1 - 1 \quad \text{и} \quad p = 0, \dots, L - 1.$$

На основе этого выражения разработаны два метода теоретико-групповой декомпозиции ДПФ, названные методами рекурсивной декомпозиции ДПФ и рекурсивной декомпозиции входных данных [8, 9]. Эти методы характеризуются формированием декомпозиционных процессов, которые в свою очередь позволяют построить вычислительные процессы. Декомпозиционные процессы состоят из $(k-1)$ этапов, вычислительные из k этапов. Для метода рекурсивной декомпозиции ДПФ оба эти процесса совмещены по времени, а для метода рекурсивной декомпозиции входных данных разъединены. Отправными для формирования каждого из декомпозиционных процессов являются следующие выражения,

$$t = j_1 + t_1 \cdot L \quad \text{и} \quad t = t_k + \tilde{j}_1 \cdot h_k \\ \text{при} \quad N = h_1 \cdot h_2 \cdot \dots \cdot h_k \quad \text{и} \quad L = h_2 \cdot \dots \cdot h_k.$$

Проиллюстрируем процесс изменения вида аргумента входной последовательности каждого из $k-1$ этапов декомпозиционного процес-

са, соответствующего методу рекурсивной декомпозиции ДПФ

$$t \leftrightarrow (j_1, t_1) \leftrightarrow \dots \leftrightarrow (q_1, \dots, q_{i-1}, j_i, t_i) \leftrightarrow \dots \\ \dots \leftrightarrow (q_1, \dots, q_{k-1}, t_k),$$

где $t_1, t_2, \dots, t_{k-1}, t_k$ и q_1, q_2, \dots, q_{k-1} - соответствующие разрядные единицы (цифры) чисел t и q в системе счисления со смешанными основаниями $t = t_k + t_{k-1} \cdot h_k + \dots + t_1 \cdot h_2 \cdot \dots \cdot h_{k-1} \cdot h_k$ и $q = q_1 + q_2 \cdot h_1 + q_3 \cdot h_1 \cdot h_2 + \dots + q_k \cdot h_1 \cdot h_2 \cdot \dots \cdot h_{k-1}$ соответственно. Можно сказать, что для данного метода декомпозиционный процесс развивается в направлении от t_1 к t_k . Направление же развития декомпозиционного процесса для метода рекурсивной декомпозиции входных данных от t_k к t_1 , при этом аргумент претерпевает следующие преобразования

$$t \leftrightarrow (t_k, \tilde{j}_1) \leftrightarrow \dots \leftrightarrow (t_k, t_{k-1}, \dots, \tilde{j}_{i-1}) \leftrightarrow \dots \leftrightarrow (t_k, t_{k-1}, \dots, t_1).$$

Направления вычислительных процессов для обоих методов от t_1 к t_k . Такая организация вычислений обеспечивает естественный порядок формирования отсчетов спектра при таком же порядке следования входных отсчетов. Разработанные методы позволяют управлять процессом формирования отсчетов спектра. В зависимости от используемого метода может быть предложен последовательный, либо прореженный поэтапный порядок их формирования. Вышесказанное подчеркивает безызыбочность и гибкость методов. Представленные методы порождают алгоритмы с одинаковой структурой для прямого и обратного преобразований. Полученные композиционные формы представления ДПФ одновременно предполагают распараллеливание вычислений и создание быстрых алгоритмов, разработкой структуры которых можно управлять по параметрам. Проиллюстрируем внутренние структуры ДПФ, полученные в результате применения вышеописанных методов, характеризующихся одним этапом декомпозиционного процесса (при $k=2$). Для иллюстрации внутренней структуры, порождаемой методом рекурсивной декомпозиции ДПФ, можно использовать Рис. 2, внося в него некоторые

коррективы. Они заключаются в следующем. Иллюстрируемая структура направлена на формирование спектра $S(q)$, поэтому этап обратных преобразований (ОП_p⁻¹) в данном случае будет невостребованным. Также необходимо добавить операцию умножения на поворачивающие множители $W_N^{jq_1}$ коротких спектров $S_j(q_1)$, полученных на выходе блоков ортогональных преобразований (ОП_j). И наконец, коррекция будет подлежать вид i -той операции O_{jp}^i , характеризующей координационно-вычислительную среду (Рис.2), в данном случае в каждой ячейке этой среды должна выполняться операция умножения на константу $W_L^{j_1 p_1}$ ($j_1 = j, p_1 = p$). Таким образом, с помощью параметризованной структуры операции свертки, вычисляемой в частотной области, можно представить внутреннюю структуру ортогонального преобразования, порождаемую методом рекурсивной декомпозиции ДПФ. По сути, Рис. 2 можно использовать и для иллюстрации внутренней структуры, полученной в результа-

те применения метода рекурсивной декомпозиции входных данных. Однако в этом случае коррекция должен подлежать сам принцип декомпозиции входных данных. Поэтому данную структуру представим с помощью Рис 3, отметив следующую эквивалентность $N_I = L$ используемых в нем обозначений.

Для того, чтобы представить возможности, полученные благодаря погружению вычислений в пространственно-временную координационно-вычислительную среду (КВС), выполним краткий анализ полученных композиционных форм, опираясь на иллюстрирующие их рисунки (Рис. 1-Рис. 3). Благодаря единству подхода к исследованию внутренней структуры различных операций ЦОС, можно выделить общие свойства, присущие их композиционным формам. Эти общие свойства определяют существенные особенности параллельных алгоритмов, построенных на основе предложенного подхода. Представим эти свойства. Прежде всего – это общность вычислительных структур для различных операций ЦОС, а также для операций умножения матри-

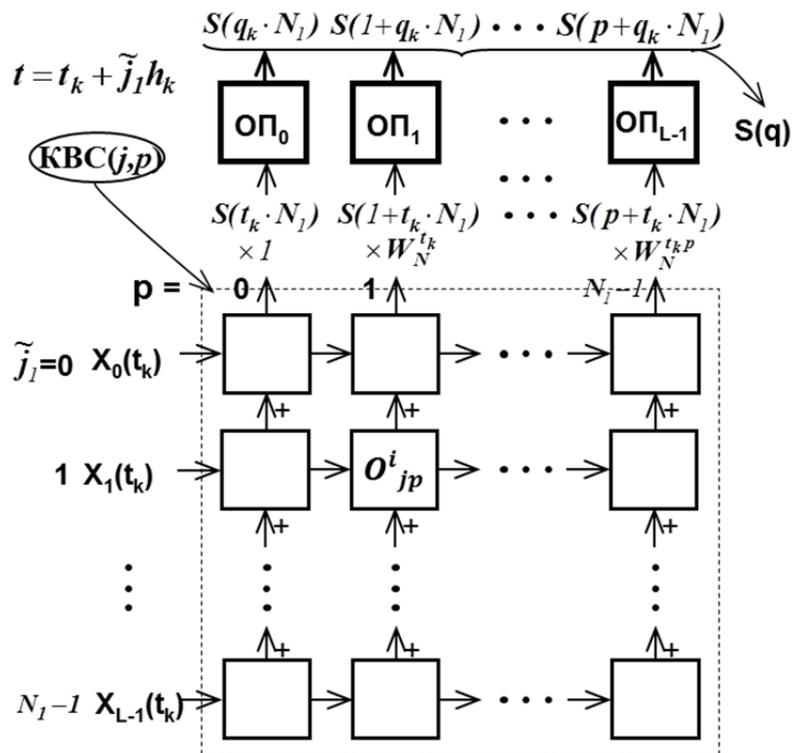


Рис.3. Иллюстрация внутренней параметризованной структуры ДПФ для метода рекурсивной декомпозиции данных

цы на вектор и операций умножения матриц. Рис. 1-Рис. 3 иллюстрируют эту общность для алгоритмов, синтезированных на основе композиционных форм представления операций (КФО). Следующим общим свойством является наличие параметризованной КВС. Для разных операций можно использовать одну и ту же КВС, подвергая её настройке на выполнение конкретной операции. Другой общей чертой полученных форм является способность управления изменениями структур алгоритмов. Это управление осуществляется на основе изменения значений параметра L , причем значение $L=I$ соответствует последовательным алгоритмам, а значения $L \neq I$ определяют различные параллельные варианты организации вычислений. Следующими общими свойствами являются возможность организации параллельно-конвейерной обработки, независимость от архитектуры вычислительных устройств, а также способность порождать разнообразие алгоритмов и их структур. Важной особенностью предложенного подхода является способность КФО, полученных на его основе, открывать доступ к различным областям вычислительного процесса и формируемого результата. Представленные возможности позволяют реализовать совместные исследования алгоритмов и архитектур перспективных вычислительных систем и повысить тем самым эффективность параллельной обработки данных.

3. Закон построения модельного описания алгоритмов ЦОС

Теперь, выполнив общий анализ результатов исследований внутренней структуры алгоритмов ЦОС, а также разработав методику синтеза их композиционных форм, представим закон построения модельного описания указанных алгоритмов. Этот закон формирует общие правила перехода от алгоритмического описания организации вычислений к модельному описанию. Основным элементом такого перехода является методология декомпозиции входных данных, переводящая их в пространственно-временную среду и позволяющая использовать параметризованную композиционную форму данных $KFD(t_i, j)$ для организации параллель-

ных вычислений путем разработки КФО. Теперь, основываясь на представленных выше КФО, сформируем следующее модельное описание алгоритмов - $KFO(A_i^{jp}(t_1), KBC_i(j, p))$. Его компонентами являются алгоритмы $A_i^{jp}(t_1)$, полученные в результате декомпозиции, погружения в пространственную среду и сжатия во времени последовательных алгоритмов $A_i(t)$, а также координационно-вычислительные среды $KBC_i(j, p)$. Тогда, множество последовательных алгоритмов $A_{mi}^{jp}(t_1)$, разработанных для различных операций O_m , благодаря созданному механизму образования КФО, будет компонентой модельного описания для целого класса алгоритмов. Ключевым параметром, сформированного таким образом следующего модельного описания

$$\text{Модель } (O_m, N, L, A_{mi}^{jp}(t_1), KBC_{mi}(j, p)),$$

определяющим возможность и уровень сжатия вычислений во времени является параметр L , задаваемый следующим образом $L=N/h_j$, где N - длина входной последовательности, $t_i=0, \dots, h_j, j, p=0, \dots, L-1$.

Именно введение и использование этого параметра позволило установить связь между алгоритмическим описанием и модельным описанием организации вычислений. Полученную модель можно рассматривать как единое описание последовательных и параллельных алгоритмов для операций вышеозначенного класса. Таким образом, представляемый ниже закон устанавливает правила реализации перехода на более высокий модельный уровень абстракции при описании организации вычислений. Этот уровень характеризуется параметризованной формой описания разнообразия вариантов алгоритмов.

Основу разработки закона составляют найденные формальные описания внутренней структуры данных и операций. Представим основное содержание вышеназванного закона. Итак, для построения модельного описания алгоритмов необходимо:

- разработать общий подход к декомпозиции алгоритмов одного класса;
- разработать закон описания внутренней структуры данных, позволяющий получить их композиционные формы;

- создать формальные инструменты для перевода данных и операций в пространственно-временную среду – методологию декомпозиции данных и методику синтеза КФО;
- перейти от исходных форм представления операций к КФО;
- сформировать модельное описание алгоритмов для вычисления отдельной операции;
- сформировать модельное описание алгоритмов для выделенного класса операций.

С помощью модельного описания алгоритмов ЦОС, созданного на основе данного закона, можно решать вышеупомянутые задачи – представления разнообразия, синтеза различных вариантов организации вычислений и управления изменениями их структур. Следовательно, применение закона позволило разработать требуемый формальный инструмент – модельное описание, способный обеспечить проведение совместных исследований алгоритмов и архитектур. Для реализации таких исследований модель необходимо дополнить параметрами архитектуры, корректирующими правила организации вычислений, и установить закон описания сложности их реализации, зависящий как от алгоритмических, так и от архитектурных параметров, используемых в уже дополненной модели. С помощью такого описания можно будет не только выполнять совместные исследования алгоритмов и архитектур, но и сокращать сложность решаемых задач, повышать гибкость и надежность реализации их алгоритмов, а также формировать новые способы анализа получаемой информации за счет предоставления доступа по параметрам j и p к внутренней структуре параллельного вычислительного процесса.

Заключение

В работе представлен закон построения модельного описания алгоритмов для операций ЦОС, реализация которого привела к созданию нового формального инструмента, изначально ориентированного на описание организации вычислений в пространственно-временной среде. По сути своей, закон в общем виде представляет теоретические основы математического моделирования параллельных алгоритмов, реализуя самостоятельный путь их создания –

эволюционный переход от алгоритмического описания организации вычислений к модельному описанию. В основе такого перехода лежит разработанный в процессе изучения внутренней структуры вычислительных алгоритмов единый теоретико-групповой подход к их декомпозиции. Разработанные в рамках подхода формальные инструменты – методология декомпозиции данных и методика синтеза композиционных форм операций стали основой для реализации перехода к модельному описанию алгоритмов. Представленная формулировка закона построения такого описания позволила выявить его возможности, прежде всего направленные на реализацию совместных исследований алгоритмов и архитектур. Этап таких исследований становится неотъемлемой частью процесса современного проектирования высокопроизводительных вычислительных систем, так как в результате его проведения выбор варианта архитектуры становится обоснованным, а это позволяет повысить эффективность использования параллельного принципа обработки данных и расширить горизонты для реализации интенсивных вычислений. Использование модельного описания также открывает новые возможности для анализа результатов вычислений, позволяя управлять формированием их внутренней структуры, предоставляет возможность использования быстрых коротких преобразований для вычисления операций ЦОС большой длины. Опираясь на установленные законы формирования внутренней структуры вычислений, модельное описание позволяет сократить их сложность, а также повысить их гибкость и надежность.

Литература

1. Воеводин В.В. Вычислительная математика и структура алгоритмов. М.: Изд-во МГУ, 2006.
2. Воеводин В.В., Воеводин Вл.В. Параллельные вычисления. СПб.: БХВ – Петербург, 2002.
3. Кун С. Матричные процессоры на СБИС. М.: Мир, 1991.
4. G.G. Lee, Y.K. Chen, M. Mattavelli, and E.S. Jang, Algorithm/Architecture Co-Exploration of Visual Computing: Overview and Future Perspectives // IEEE Trans. Circuits and Systems for Video Technology, vol. 19, no. 11, pp.1576-1587, Nov. 2009.
5. Gwo Giun (Chris) Lee, He-Yuan Lin, Chun-Fu Chen, and Tsung-Yuan Huang, Quantifying Intrinsic Parallelism Us-

- ing Linear Algebra for Algorithm/Architecture Coexploration // IEEE Trans. on Parallel and Distributed Systems, vol. 23, no. 5, pp. 944–957, May 2012.
6. Вирт Н. Алгоритмы+структуры данных = программы. М.: Мир, 1985.
 7. Климова О.В. Параллельная архитектура процессора свертки произвольной длины с использованием числовых преобразований Рейдера // Изв. РАН. Техн. кибернетика. - 1994. - №2. – С. 183-191.
 8. Климова О.В. Теоретико-групповая декомпозиция и быстрые параллельные алгоритмы дискретного преобразования Фурье. Известия Академии Наук. Теория и Системы Управления. 1997. №5. – С.158-162.
 9. Климова О.В. Единый подход к построению быстрых алгоритмов и распараллеливанию вычислений дискретного преобразования Фурье // Изв. РАН. Теория и системы управления. - 1999. - №3. – С. 68-75.
 10. Klimova O. Decomposition on a Group and Parallel Convolution and Fast Fourier Transform Algorithms. Parallel Computing Technologies 4th International Conference, PaCT-97. Proceedings, p.358-363 Springer-Verlag, Berlin, LNCS1277.
 11. Klimova O.V. Pseudo-two-Dimensional Decomposition Methods and Parallel Algorithms of Convolution // International Workshop on Spectral Methods and Multirate Signal Processing. - Tampere, Finland: TICSP Series, June 2001.
 12. Климова О.В. Быстрые параллельные алгоритмы и рекурсивная псевдодвумерная декомпозиция свертки // Вестник Томского государственного университета. - №1 (II). - Томск: Изд. ТГУ, 2002. – С.227-232.
 13. Климова О.В. Методология декомпозиции данных и единое описание последовательных и параллельных алгоритмов вычисления операций цифровой обработки сигналов // Вестник Томского Государственного Университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 2(23). С. 112-120.
 14. Klimova O.V. Methodology of data decomposition and formal synthesis of composition forms for digital signal processing basic operations. 2014 24nd Int. Crimean Conference “Microwave & Telecommunication Technology” (CriMiCo’2014). Sevastopol, 2014, Crimea, Russia, V.1, pp. 429 -430. ISBN: 978-966-335-412-5. IEEE Catalog Number: CFP14788.
 15. Edward A. Lee. The Problem with Threads // IEEE Computer, v. 39, № 5, pp. 33-42, may 2006.
 16. Макклеллан Дж.Г., Рейдер Ч.М. Применение теории чисел в цифровой обработке сигналов. - М.: Радио и связь, 1983. - 264 с.

Климова Ольга Витальевна. Научный сотрудник Института машиноведения УрО РАН. Окончила Уральский политехнический институт в 1977 году. Кандидат технических наук, старший научный сотрудник. Автор 66 печатных работ и одной монографии. Область научных интересов: методы параллельной обработки, совместные исследования алгоритмов и архитектур, цифровая обработка сигналов, быстрые вычислительные алгоритмы. E-mail: klimova@imach.uran.ru