Подход к построению нелинейного управления в задаче слежения с коэффициентами, зависящими от состояния[1]

Часть I. Алгоритм

Д.А. Макаров

Аннотация. В работе рассматривается построение обратной связи для нелинейного управляемого объекта с аддитивной линейной частью и с коэффициентами, зависящими от состояния системы, с целью слежения за конкретной траекторией на конечном интервале времени. Задача слежения сведена к задаче оптимального управления со свободным правым концом, для которой приводятся представления для точного и приближённого решений. Последнее используется для алгоритма построения вычислительно эффективного нелинейного управления.

Ключевые слова: задача слежения, нелинейное управление, малый параметр, уравнения Риккати с зависящими от состояния коэффициентами.

Введение

Работа посвящена построению обратной связи для нелинейного управляемого объекта, обладающей свойством адаптации для учета нелинейностей модели и позволяющей решить задачу слежения за эталонной траекторией на конечном интервале времени.

В отличие от линейных систем на данный момент не существует общепринятого метода решения поставленной задачи. Целью настоящего исследования является разработка алгоритма построения вычислительно эффективного нелинейного управления, связанного с представлением систем в псевдолинейном виде, где и состояние и управление входят в правые части систем линейно, но коэффициенты при них являются функциями состояния (SDC–State Dependent Coefficients). В этом случае формальная линейно квадратичная постановка для определения оптимального синтеза приводит к матричному алгебраическому уравнению Риккати с коэффициентами, зависящими от состояния (SDRE – State Dependent Riccati Equation для непрерывных систем и D-SDRE – Discrete-Time State Dependent Riccati Equation, соответственно, для дискретных систем, например, публикации [1-6]).

В последнее время, в литературе появились работы, где такой подход стал применяться и к задачам слежения на конечном отрезке времени [7-10], в которых применяется дифференциальное матричное уравнение типа Риккати.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-38-60198).

Одной из основных проблем в использовании SDRE техники является необходимость расчета коэффициентов усиления в контуре обратной связи в темпе функционирования объекта, что при большой размерности систем может наталкиваться на вычислительные ограничения. В связи с этим в работах [5, 6] для синтеза стабилизирующих регуляторов был предложен путь использования SDRE техники в системах определенного класса с аддитивной линейной частью. Подход позволяет строить линейное управление, полученное в ходе решения некоторой стандартной задачи Калмана-Летова, а также его аддитивную нелинейную коррекцию, имеющую аналитическое представление. Таким образом удаётся снизить вычислительную сложность выработки управляющего сигнала.

На данный момент доминирующим в области SDRE техники при решении задач слежения является подход, основанный на работе [7, 8]. Его суть заключается в преобразовании исходного SDRE к уравнению Ляпунова, для которого известна форма его решения. Тем не менее, шаги алгоритма выполняются при условии заморозки коэффициентов, что обуславливает повторение всех расчетов с некоторым шагом, зависящим от темпа функционирования объекта, и сопровождаются значительным числом операций, выполняемых при нахождении управления. Этот подход использовался в ряде работ, например, [9-12].

В настоящей работе подход из [5, 6] адаптируется для решения задач слежения, в которых необходимо учитывать наличие заданной эталонной траектории и зависимость от времени коэффициентов усиления управления, обусловленную конечным интервалом регулирования.

1. Постановка задачи

Пусть задана управляемая нелинейная система вида

$$\begin{gathered}\dot{x} = A(x,\mu)x + B(x,\mu)u,\ x(t_0) = x^0,\\ A(x,\mu) = A_0 + \mu A_1(x),\ B(x,\mu) = B_0 + \mu B_1(x),\\ x \in X \subset \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^r,\ t \in \left[t_0, t_1\right],\ \ 0 < \mu \le \mu_0,\end{gathered} \tag{1.1}$$

где x и u – векторы состояния и управления соответственно, μ_0 – некоторое заданное достаточно малое положительное число, A_0 и B_0 – известные постоянные матрицы, $A_1(x) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_1(x) \in \mathbb{R}^{n\times r}$ – известные матрицы с достаточно гладкими и ограниченными по аргументу x элементами, X – некоторое ограниченное множество пространства состояний такое, что для любого непрерывного управления $u(t)$ траектории замкнутой системы (1.1) существуют, единственны и принадлежат X на $\left[t_0, t_1\right]$.

Малый параметр μ считается известным в модели, что позволяет использовать асимптотический анализ, который широко применяется в литературе при исследовании систем управления [13, 14]. Границу области корректности применения асимптотического анализа определяет $\mu_0 > 0$, который для каждой конкретной задачи может иметь свое определенное значение.

Пусть задан также функционал качества

$$\begin{gathered}I(u) = \frac{1}{2}e^T(t_1)\mu F e(t_1) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left(e^T Q(x,x_r,\mu)e + u^T R u\right)dt \to \min_u,\\ Q(x,x_r,\mu) = Q_0 + \mu Q_1(x,x_r),\qquad e = x - x_r,\end{gathered} \tag{1.2}$$

где заданные симметрические матрицы $Q(x,x_r,\mu) \ge 0, Q_0 > 0, R > 0,\ F > 0$ при $x, x_r \in X, 0 < \mu \le \mu_0$, x_r – заданная (эталонная) траектория системы (1.1). Знаками > 0 (≥ 0) обозначается положительная определенность (полуопределенность) матрицы. Весовая матрица F имеет множитель μ для упрощения записи последующих выкладок. Необходимо найти такое непрерывное управление $u(x, \mu, t)$, которое обеспечивает приближенное решение задачи (1.1)-(1.2).

Пусть эталонная траектория для системы (1.1) описывается решением дифференциального уравнения

$$\dot{x}_r = A_r(x_r,\mu)x_r,\ A_r(x_r,\mu) = A_{r,0} + \mu A_{r,1}(x_r),\ x_r(t_0) = x_r^{\ 0},\ x_r \in X \subset \mathbb{R}^n,\ t \in [t_0, t_1], \qquad (1.3)$$

где $A_{r,0}$ – известная постоянная матрица, а $A_{r,1}(x_r)$ – известная матрица с достаточно гладкими и ограниченными по аргументу x_r элементами. Тогда исходная задача (1.1)-(1.2) может быть представлена [15] в виде

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}(\tilde{x},\mu)\tilde{x} + \tilde{B}(x,\mu)u, \qquad \tilde{x}(t_0) = \tilde{x}^0,$$

$$\tilde{I}(u) = \frac{1}{2}\tilde{x}^T(t_1)\mu\tilde{F}\tilde{x}(t_1) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left(\tilde{x}^T\tilde{Q}(\tilde{x},\mu)\tilde{x} + u^T Ru\right)dt \to \min_u, \qquad (1.4)$$

где $\tilde{x} = \begin{bmatrix} x \\ x_r \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}$ – расширенный вектор состояния, $\tilde{A}(\tilde{x},\mu) = \begin{bmatrix} A(x,\mu) & 0 \\ 0 & A_r(x_r,\mu) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$,

$\tilde{B}(x,\mu) = \begin{bmatrix} B(x,\mu) \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times r}$, $\tilde{Q}(\tilde{x},\mu) = \begin{bmatrix} Q(\tilde{x},\mu) & -Q(\tilde{x},\mu) \\ -Q(\tilde{x},\mu) & Q(\tilde{x},\mu) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n} \geq 0$,

$\tilde{F} = \begin{bmatrix} F & -F \\ -F & F \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n} \geq 0$, нулевые блоки в матрицах $\tilde{A}(\tilde{x},\mu)$ и $\tilde{B}(x,\mu)$ есть матрицы соответствующих размерностей.

Теперь перейдем к точному и приближенному решениям задачи (1.4).

2. Точное решение

Задача (1.4) является задачей Майера-Больца для SDC систем. Известно [7,8], что оптимальное управление в задаче (1.4) имеет вид

$$u(\tilde{x},t,\mu) = -R^{-1}\tilde{B}^T(x,\mu)(\tilde{P}(\tilde{x},t,\mu)\tilde{x} + \Pi(\tilde{x},t,\mu)), \qquad (2.1)$$

где $\Pi(\tilde{x},t,\mu) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \tilde{x}^T\dfrac{\partial\tilde{P}(\tilde{x},t,\mu)}{\partial\tilde{x}_1}\tilde{x} & \tilde{x}^T\dfrac{\partial\tilde{P}(\tilde{x},t,\mu)}{\partial\tilde{x}_2}\tilde{x} & \ldots & \tilde{x}^T\dfrac{\partial\tilde{P}(\tilde{x},t,\mu)}{\partial\tilde{x}_{2n}}\tilde{x} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{2n}$, если $\tilde{P} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ является положительно определенным решением следующей задачей Коши для матричного дифференциального уравнения типа Риккати

$$\frac{d\tilde{P}}{dt} + \tilde{A}^T(\tilde{x},\mu)\tilde{P} + \tilde{P}\tilde{A}(\tilde{x},\mu) - \tilde{P}\tilde{B}(x,\mu)R^{-1}\tilde{B}^T(x,\mu)\tilde{P} + \tilde{Q}(\tilde{x},\mu) + \Omega(\tilde{x},t,\mu) = 0,$$
$$\tilde{P}(\tilde{x}(t_1),t_1,\mu) = \mu\tilde{F}, \qquad (2.2)$$

где $\dfrac{d\tilde{P}}{dt}$ – полная производная по времени от $\tilde{P}(\tilde{x},t,\mu)$, $\Omega(\tilde{x},t,\mu) = \frac{1}{4}\widehat{P}_x^{\,T}\tilde{B}(x,\mu)R^{-1}(x)\tilde{B}^T(x,\mu)\widehat{P}_x$,

$\widehat{P}_x(\tilde{x},t,\mu) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\tilde{P}}{\partial\tilde{x}_1}\tilde{x} & \dfrac{\partial\tilde{P}}{\partial\tilde{x}_2}\tilde{x} & \ldots & \dfrac{\partial\tilde{P}}{\partial\tilde{x}_{2n}}\tilde{x} \end{bmatrix}^T$.

Матрица $\tilde{P}(\tilde{x},t,\mu)$ является блочной и имеет вид

$\tilde{P}(\tilde{x},t,\mu) = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^{\ T} & P_{22} \end{bmatrix} > 0,\ P_{11}(\tilde{x},t,\mu) > 0, P_{22}(\tilde{x},t,\mu) > 0.$

Нетрудно видеть, что уравнение в (2.2) в блочном виде можно переписать как

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11}A & P_{12}A_r \\ P_{12}^T A & P_{22}A_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A^T P_{11} & A^T P_{12} \\ A_r^T P_{12}^T & A_r^T P_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_{11}BR^{-1}B^T P_{11} & P_{11}BR^{-1}B^T P_{12} \\ P_{12}^T BR^{-1}B^T P_{11} & P_{12}^T BR^{-1}B^T P_{12} \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} Q & -Q \\ -Q & Q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \Omega_{12}^T & \Omega_{22} \end{bmatrix} = 0,$$

где $\Omega(\tilde{x},t,\mu) = \frac{1}{4}\widehat{P}_x^T \begin{bmatrix} BR^{-1}B^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \widehat{P}_x = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} \widehat{P}_{x,11}^T BR^{-1}B^T \widehat{P}_{x,11} & \widehat{P}_{x,11}^T BR^{-1}B^T \widehat{P}_{x,12} \\ \widehat{P}_{x,12}^T BR^{-1}B^T \widehat{P}_{x,11} & \widehat{P}_{x,12}^T BR^{-1}B^T \widehat{P}_{x,12} \end{bmatrix}.$

С учетом представлений для блоков $\widehat{P}_{x,11}, \widehat{P}_{x,12}, \widehat{P}_{x,22}$ задача (2.2) приобретает вид

$$\begin{gathered} \dot{P}_{11} = -P_{11}A - A^T P_{11} + P_{11}BR^{-1}B^T P_{11} - Q - \Omega_{11}, \\ \dot{P}_{12} = -P_{12}A_r(x_r) - A^T P_{12} + P_{11}BR^{-1}B^T P_{12} + Q - \Omega_{12}, \\ \dot{P}_{22} = -P_{22}A_r(x_r) - A_r^T(x_r)P_{22} + P_{12}^T BR^{-1}B^T P_{12} - Q - \Omega_{22}, \\ P_{11}(\tilde{x}(t_1),t_1,\mu) = \mu F, \quad P_{12}(\tilde{x}(t_1),t_1,\mu) = -\mu F, \quad P_{22}(\tilde{x}(t_1),t_1,\mu) = \mu F, \end{gathered} \tag{2.3}$$

где

$$\Omega_{11}(\tilde{x},t,\mu) = \frac{1}{4}\widehat{P}_{x,11}^T B(x,\mu)R^{-1}(x)B^T(x,\mu)\widehat{P}_{x,11}, \ \Omega_{12}(\tilde{x},t,\mu) = \frac{1}{4}\widehat{P}_{x,11}^T B(x,\mu)R^{-1}(x)B^T(x,\mu)\widehat{P}_{x,12},$$

$$\Omega_{22}(\tilde{x},t,\mu) = \frac{1}{4}\widehat{P}_{x,12}^T B(x,\mu)R^{-1}(x)B^T(x,\mu)\widehat{P}_{x,12},$$

Расписывая выражение для $\Pi(\tilde{x},t,\mu)$

$$\Pi(\tilde{x},t,\mu) = \begin{bmatrix} \Pi_1 \\ -- \\ \Pi_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \left[x^T \frac{\partial P_{11}}{\partial x_1} x + x_r^T \frac{\partial P_{12}^T}{\partial x_1} x + x^T \frac{\partial P_{12}}{\partial x_1} x_r + x_r^T \frac{\partial P_{22}}{\partial x_1} x_r \right]_1 \\ \vdots \\ \left[x^T \frac{\partial P_{11}}{\partial x_n} x + x_r^T \frac{\partial P_{12}^T}{\partial x_n} x + x^T \frac{\partial P_{12}}{\partial x_n} x_r + x_r^T \frac{\partial P_{22}}{\partial x_n} x_r \right]_n \\ ------------------------ \\ \left[x^T \frac{\partial P_{11}}{\partial x_{r,1}} + x_r^T \frac{\partial P_{12}^T}{\partial x_{r,1}} x + x^T \frac{\partial P_{12}}{\partial x_{r,1}} x_r + x_r^T \frac{\partial P_{22}}{\partial x_{r,1}} x_r \right]_{n+1} \\ \vdots \\ \left[x^T \frac{\partial P_{11}}{\partial x_{r,n}} x + x_r^T \frac{\partial P_{12}^T}{\partial x_{r,n}} x + x^T \frac{\partial P_{12}}{\partial x_{r,n}} x_r + x_r^T \frac{\partial P_{22}}{\partial x_{r,n}} x_r \right]_{2n} \end{bmatrix}$$

можно представить оптимальное управление (2.1) в задаче (1.4) в виде

$$u(\tilde{x},t,\mu) = -R^{-1}B(x,\mu)^T (P_{11}(\tilde{x},t,\mu)x + P_{12}(\tilde{x},t,\mu)x_r + \Pi_1(\tilde{x},t,\mu)) \tag{2.4}$$

Таким образом, для точного решения исходной задачи достаточно найти P_{11}, P_{12}, P_{22} из (2.3). Подчеркнем, что в отличие от задачи слежения для линейных систем [15] все блоки P_{11}, P_{12}, P_{22} оказались зависимы друг от друга через $\Omega_{11}, \Omega_{12}, \Omega_{22}$ и, кроме того, оптимальное управление (2.4) зависит от P_{22} через Π_1.

Очевидно, что точное решение такой задачи, в общем случае, представляется весьма сложным. В качестве естественных упрощений возможны следующие варианты:

а) игнорирование перекрестных связей в $\Omega_{11},\Omega_{12},\Omega_{22}$, тогда в (2.3) $\Omega_{11},\Omega_{12},\Omega_{22}$ определяются с помощью

$$\widehat{P}_{x,11}(x,t,\mu)=\begin{bmatrix}\left[x^T\dfrac{\partial P_{11}}{\partial x_1}\right]_{1\times n}\\ \left[x^T\dfrac{\partial P_{11}}{\partial x_2}\right]_{1\times n}\\ \vdots\\ \left[x^T\dfrac{\partial P_{11}}{\partial x_n}\right]_{1\times n}\end{bmatrix}_{n\times n},\quad \widehat{P}_{x,12}(\tilde{x},t,\mu)=\begin{bmatrix}\left[x^T\dfrac{\partial P_{12}}{\partial x_1}\right]_{1\times n}\\ \left[x^T\dfrac{\partial P_{12}}{\partial x_2}\right]_{1\times n}\\ \vdots\\ \left[x^T\dfrac{\partial P_{12}}{\partial x_n}\right]_{1\times n}\end{bmatrix}_{n\times n}.$$

б) полное игнорирование $\Omega_{11},\Omega_{12},\Omega_{22}$, тогда вместо (2.3) имеем

$$\dot{P}_{11}=-P_{11}A-A^TP_{11}+P_{11}BR^{-1}B^TP_{11}-Q,$$
$$\dot{P}_{12}=-P_{12}A_r(x_r)-A^TP_{12}+P_{11}BR^{-1}B^TP_{12}+Q,$$
$$\dot{P}_{22}=-P_{22}A_r(x_r)-A_r^{\,T}(x_r)P_{22}+P_{12}^{\,T}BR^{-1}B^TP_{12}-Q,$$
$$P_{11}(\tilde{x}(t_1),t_1)=\mu F,\quad P_{12}(\tilde{x}(t_1),t_1)=-\mu F,\quad P_{22}(\tilde{x}(t_1),t_1)=\mu F.$$

Отметим, что, даже используя упрощение б), получаем довольно сложную в вычислительном плане задачу, которую придется решать в темпе функционирования объекта управления. Поэтому рассмотрим другой вариант её приближенного решения.

3. Приближенный метод решения задачи слежения

Применим к задаче слежения (1.4) подход [5,6] к построению нелинейной коррекции линейного регулятора для нелинейных задач стабилизации. Введем представления

$$\tilde{A}(\tilde{x},\mu)=\tilde{A}_0+\mu\tilde{A}_1(\tilde{x}),\tilde{B}(x,\mu)=\tilde{B}_0+\mu\tilde{B}_1(x),\tilde{Q}(\tilde{x},\mu)=\tilde{Q}_0+\mu\tilde{Q}_1(\tilde{x})$$

$$\tilde{A}_0=\begin{bmatrix}A_0 & 0\\ 0 & A_{r,0}\end{bmatrix},\tilde{A}_1(\tilde{x})=\begin{bmatrix}A_1(x) & 0\\ 0 & A_{r,1}(x_r)\end{bmatrix},\tilde{B}_0=\begin{bmatrix}B_0\\ 0\end{bmatrix},\tilde{B}_1(x)=\begin{bmatrix}B_1(x)\\ 0\end{bmatrix},$$

$$\tilde{Q}_0=\begin{bmatrix}Q_0 & -Q_0\\ -Q_0 & Q_0\end{bmatrix},\tilde{Q}_1(\tilde{x})=\begin{bmatrix}Q_1(\tilde{x}) & -Q_1(\tilde{x})\\ -Q_1(\tilde{x}) & Q_1(\tilde{x})\end{bmatrix}.$$

Введем также следующие условия:

I. Траектории замкнутой системы (1.1) существуют, единственны и принадлежат X на $[t_0,t_1]$ для любого непрерывного управления $u(t)$, где X – некоторое ограниченное множество пространства состояний; элементы матриц $\tilde{A}_1(\tilde{x}),\tilde{B}_1(x)$ ограниченные, непрерывные и достаточно гладкие при $x,x_r\in X$; $\mu\in(0,\mu_0]$.

II. Тройка матриц $\{\tilde{A}_0,\tilde{B}_0,H_0\}$, где $H_0^TH_0=\tilde{Q}_0$, стабилизируема и наблюдаема.

III.Матрицы системы $\tilde{A}_0, \tilde{A}_1(\tilde{x}), \tilde{B}_0, \tilde{B}_1(x)$ и симметрические матрицы критерия $R > 0,\ Q_0 \geq 0,\ Q_1(x) \geq 0,\ F > 0$, а также $\mu_0 > 0$ таковы, что $\tilde{P}_0 + \mu \tilde{P}_1 > 0$ при $x, x_r \in X, t \in [t_0, t_1], \mu \in (0,\ \mu_0]$.

Будем искать матрицу $\tilde{P}(\tilde{x}, t, \mu)$ в виде $\tilde{P}(\tilde{x}, t, \mu) = \tilde{P}_0 + \mu \tilde{P}_1(\tilde{x}, t, \mu)$. Теперь управление (2.1) может быть записано как

$$u(\tilde{x}, t, \mu) = -R^{-1} \tilde{B}^T(x, \mu)(\tilde{P}\tilde{x} + \Pi) = u_0(\tilde{x}) + \mu u_1(\tilde{x}, t, \mu), \tag{3.1}$$

где $u_0(\tilde{x}) = -R^{-1} \tilde{B}_0{}^T \tilde{P}_0 \tilde{x}$ – линейная часть управления, а $\mu u_1(\tilde{x}, t, \mu) = -\mu R^{-1} \left(\tilde{B}_1{}^T(\tilde{x}) \tilde{P}_0 + (\tilde{B}_0 + \mu \tilde{B}_1(\tilde{x}))^T \tilde{P}_1(\tilde{x}, t) \right) \tilde{x}$ – нелинейная коррекция.

Кроме того, если левую часть первого уравнения из (2.2) обозначить как $f_R(\tilde{x}, \mu, u, t)$, то имеем

$$f_R(\tilde{x}, \mu, u, t) = \left[\tilde{P}_0 \tilde{A}_0 + \tilde{A}_0^T \tilde{P}_0 - \tilde{P}_0 \tilde{B}_0 R^{-1} \tilde{B}_0^T \tilde{P}_0 + \tilde{Q}_0 \right] + \mu \left[\frac{d\tilde{P}_1}{dt} + \tilde{P}_1 A_{cl,0} + A_{cl,0}^T \tilde{P}_1 + C(\tilde{x}) \right] +$$
$$\mu^2 f_{\mu^2}(\tilde{x}, \tilde{P}_1) + \mu^3 f_{\mu^3}(\tilde{x}, \tilde{P}_1) + \mu^4 f_{\mu^4}(\tilde{x}, \tilde{P}_1, \mu) = 0,$$

где $C(\tilde{x}) = \tilde{P}_0 \left(\tilde{A}_1 - \tilde{S}_{10} \tilde{P}_0 \right) + \left(\tilde{A}_1 - \tilde{S}_{10} \tilde{P}_0 \right)^T \tilde{P}_0 + \tilde{Q}_1$,

$f_{\mu^2}(\tilde{x}, \tilde{P}_1, \mu) = \tilde{P}_1 \overline{A} + \overline{A}^T \tilde{P}_1 - \overline{B} R^{-1} \overline{B}^T + 1/4 \tilde{P}_{1,x}{}^T \tilde{S}_0 \tilde{P}_{1,x}$,

$f_{\mu^3}(\tilde{x}, \tilde{P}_1, \mu) = -\tilde{P}_1 \tilde{B}_1 R^{-1} \overline{B}^T - \overline{B} R^{-1} \tilde{B}_1{}^T \tilde{P}_1 + 1/4 (\tilde{P}_{1,x}{}^T \tilde{S}_{10} \tilde{P}_{1,x} + (\tilde{P}_{1,x}{}^T \tilde{S}_{10} \tilde{P}_{1,x})^T), \tilde{S}_0 = \tilde{B}_0 R^{-1} \tilde{B}_0^T$,

$f_{\mu^4}(\tilde{x}, \tilde{P}_1, \mu) = -\tilde{P}_1 \tilde{S}_1 \tilde{P}_1 + 1/4 \tilde{P}_{1,x}{}^T \tilde{S}_1 \tilde{P}_{1,x},\ \tilde{S}_{10}(x, \mu) = \tilde{B}_1 R^{-1} \tilde{B}_0^T$,

$\tilde{A}_{cl,0} = \tilde{A}_0 - \tilde{S}_0 \tilde{P}_0, \quad \tilde{S}_1(x, \mu) = \tilde{B}_1 R^{-1} \tilde{B}_1^T$,

$$\overline{A}(\tilde{x}, \mu) = \tilde{A}_1 - \tilde{S}_{10} \tilde{P}_0, \quad \overline{B}(\tilde{x}, \mu) = \tilde{P}_1 \tilde{B}_0 + \tilde{P}_0 \tilde{B}_1,\ \tilde{P}_{1,x}(\tilde{x}, t, \mu) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \tilde{P}_1}{\partial \tilde{x}_1} \tilde{x} & \dfrac{\partial \tilde{P}_1}{\partial \tilde{x}_2} \tilde{x} & \ldots & \dfrac{\partial \tilde{P}_1}{\partial \tilde{x}_{2n}} \tilde{x} \end{bmatrix}^T.$$

Согласно подходу [5,6] неизвестные матрицы $\tilde{P}_0$ и $\tilde{P}_1$ определяются из уравнений, полученных для нулевого и первого члена приведенного формального разложения (отметим, что в этом случае $\tilde{P}_1$ не зависит от μ). Такой подход обоснован при ограниченных по x, x_r элементах матриц системы и критерия и достаточно малых значениях параметра μ.

Итак, из нулевого приближения полученного формального разложения для неизвестной постоянной матрицы $\tilde{P}_0$ имеем уравнение $\tilde{P}_0 \tilde{A}_0 + \tilde{A}_0^T \tilde{P}_0 - \tilde{P}_0 \tilde{B}_0 R^{-1} \tilde{B}_0^T \tilde{P}_0 + \tilde{Q}_0 = 0$ или в блочном представлении

$$P_{0\_11} A_0 + A_0{}^T P_{0\_11} - P_{0\_11} B_0 R^{-1} B_0{}^T P_{0\_11} + Q_0 = 0,$$
$$P_{0\_12} A_{r0} + \left(A_0{}^T - P_{0\_11} B_0 R^{-1} B_0{}^T \right) P_{0\_12} - Q_0 = 0,$$
$$P_{0\_22} A_{r0} + A_{r0}{}^T P_{0\_22} - P_{0\_12}{}^T B_0 R^{-1} B_0{}^T P_{0\_12} + Q_0 = 0.$$

Как известно [17], при условии II эти уравнения имеют положительно определенное решение $\tilde{P}_0$. Решая их, можно найти нулевое приближение управления (3.1) в виде линейного регулятора

$$u_0(\tilde{x}) = -R^{-1} B_0{}^T (P_{0\_11} x + P_{0\_12} x_r). \tag{3.2}$$

Отметим, что блок P_{0_22} не участвует в формировании (3.2). Теперь, приравнивая нулю член при первой степени μ в формальном разложении для $f_R(\tilde{x},\mu,u,t)$, получаем задачу

$$\frac{d\tilde{P}_1}{dt} = -\tilde{P}_1\tilde{A}_{cl,0} - \tilde{A}_{cl,0}^T\tilde{P}_1 - C(\tilde{x}), \quad \tilde{P}_1(x(t_1),t_1) = \tilde{F}. \tag{3.3}$$

Пусть $x(t)$ есть известная функция времени, тогда (3.3) можно переписать как

$$\frac{dL}{dt} = -L\tilde{A}_{cl,0} - \tilde{A}_{cl,0}^T L - \Phi(t), \quad L(t_1) = \tilde{F},$$

где $\Phi(t) \equiv C(\tilde{x}(t))$ при известной $x(t)$. Используя матрицу Коши для линейной системы с постоянной матрицей $\tilde{A}_{cl,0}$, легко получить [16] интегральное точное представление для $L(t,\mu)$

$$L(t) = \int_t^{t_1} e^{\tilde{A}_{cl,0}{}^T(t_1-\tau)}\Phi(\tau)e^{\tilde{A}_{cl,0}(t_1-\tau)}d\tau + e^{\tilde{A}_{cl,0}{}^T(t_1-t)}\tilde{F}e^{\tilde{A}_{cl,0}(t_1-t)}.$$

Однако практическое применение полученной формулы затруднено необходимостью знания траектории системы в будущие моменты времени. Возможным выходом из этой ситуации является использование предикторов. Такой подход может привести к большим погрешностям в управлении, особенно в случае действия на систему непредсказуемых возмущений. Поэтому представляется целесообразным воспользоваться следующим приближенным подходом к решению (3.3).

Воспользуется приемом «замораживания» вектора $\tilde{x}$, т.е. будем считать, что в каждый момент времени t он является некоторым фиксированным параметром матрицы $C(\tilde{x})$. Тогда решение уравнения (3.3) при каждом фиксированном $\tilde{x}$ имеет следующий вид

$$\tilde{P}_1(\tilde{x},t) = e^{\tilde{A}_{cl,0}^T(t_1-t)}Ne^{\tilde{A}_{cl,0}(t_1-t)} + \int_0^\infty e^{\tilde{A}_{cl,0}^T\sigma}C(\tilde{x})e^{\tilde{A}_{cl,0}\sigma}d\sigma, \tag{3.4}$$

где $N = \tilde{F} - \int_0^\infty e^{\tilde{A}_{cl,0}^T\sigma}C\left(\tilde{x}(t_1)\right)e^{\tilde{A}_{cl,0}\sigma}d\sigma$ – постоянная матрица.

Отметим, что при таком подходе представление (3.4) является функцией $C(\tilde{x}(t_1))$, т.е. зависит от состояния системы в конечный момент времени, которое неизвестно. Для преодоления этого можно применить две стратегии:

1. Предполагать наличие близости $x(t_1)$ к $x_r(t_1)$ и использовать $C(\tilde{x}(t_1))\big|_{x(t_1)=x_r(t_1)}$ вместо $C(\tilde{x}(t_1))$.

2. Использовать $C(\tilde{x}(t_1))\big|_{x(t_1)=x(t)}$ вместо $C(\tilde{x}(t_1))$, считая, что значения $x(t)$ и $x(t_1)$ слабо отличаются вблизи t_1.

«Жесткость» этих предположений смягчается тем, что первый член в (3.4) в силу $\operatorname{Re}\lambda\left(\tilde{A}_{cl,0}\right) < 0$ существенен лишь в окрестности t_1. Отметим, что мы получили аналитическую формулу для неизвестной матрицы $\tilde{P}_1(x,t)$, зависящей от состояния системы, что существенно снижает вычислительную сложность алгоритма управления. Матрица $\tilde{P}_1(x,t)$ теперь может определяться заранее (например, с помощью пакетов символьных вычислений), а не вычисляться поточечно, в каждый момент времени, как это делается в «классическом» SDRE подходе. Подчеркнем, что в силу симметричности $\tilde{P}_1(\tilde{x},t)$ и положительной определенности $\tilde{P}_0$ условие III всегда выполняется при достаточно малом μ_0.

При выполнении условий I-III можно предложить следующий численно-аналитический метод построения управления в задаче нелинейного слежения.

1. Находим $u_0(\tilde{x})$ с помощью (3.2).
2. Находим $\tilde{P}_1(\tilde{x},t)$ с помощью (3.4), воспользовавшись одной из двух стратегий.
3. Определяем итоговое управление (3.1), в котором $\tilde{P}_{1,x}(\tilde{x},t,\mu)$ полагаем равным 0.

Итак, предложенный подход построения управления в задаче слежения является приближенным. Однако, как показали исследования в задачах стабилизации на полуоси, метод из [5,6] позволяет построить нелинейное управление, которое может быть значительно эффективнее линейных аналогов (см. эксперименты в [18-20]) и даже совпадать с точным оптимальным управлением [6]. В работе [21], полностью посвященной численным экспериментам, показывается, что предложенный подход сопоставим по качеству работы с соответствующим линейным управлением в задаче слежения, а по области устойчивости зачастую превосходит его.

Заключение

Одним из перспективных методов решения задачи слежения для нелинейных систем является SDRE техника, основанная на представлении исходной системы в псевдолинейном виде, в котором состояние и управление входят в правые части систем линейно с коэффициентами, являющимися функциями состояния. Такой способ связан с необходимостью решения соответствующих матричных уравнений Риккати в темпе функционирования объекта (т.е., фактически, в режиме реального времени), что в общем случае может представлять существенные вычислительные проблемы.

В данной работе предложен численно-аналитический алгоритм построения нелинейного управления для частного класса задач слежения с коэффициентами, зависящими от состояния, где правые части систем слабо нелинейные. В следующей части работы демонстрируется, что предложенное нелинейное управление зачастую обладает большей областью устойчивости по сравнению с соответствующим линейным управлением. Существенным достоинством разработанного алгоритма является снижение вычислительных затрат по сравнению с имеющимися алгоритмами управления на основе техники SDRE, поскольку используются также аналитические вычисления, что может позволить применять предлагаемый алгоритм для решения задач слежения в реальном времени.

Эффективность предложенного алгоритма в конкретных задачах связана с величиной параметра μ и принадлежностью к его области корректности $(0,\mu_0]$. Влияние величины параметра μ на результат решения задачи слежения можно оценить с помощью получения соответствующих асимптотических оценок, которым будет посвящено дальнейшее исследование.

Литература

1. Cloutier J. R. State-dependent Riccati equation techniques: an overview // American Control Conference, 1997. Proceedings of the 1997. 1997. №. 2. Pp. 932-936.
2. Çimen T. Survey of state-dependent Riccati equation in nonlinear optimal feedback control synthesis // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2012. Т. 35. №. 4. Pp. 1025-1047.
3. Афанасьев В.Н. Управление нелинейными объектами с параметрами, зависящими от состояния // Автомат.и телемех., 2011. № 4. С. 43–56.
4. Chang I., Bentsman J. Constrained discrete-time state-dependent Riccati equation technique: A model predictive control approach // 52nd IEEE Conference on Decision and Control. December 10-13, 2013, Florence, Italy. 2013. Pp. 5125-5130
5. Дмитриев М.Г., Макаров Д.А.. Гладкий нелинейный регулятор в слабо нелинейной системе управления с коэффициентами, зависящими от состояния. // Труды Института системного анализа РАН. Том 64. №4. 2014. С. 53-58.
6. Dmitriev M.G., Makarov D.A. The near optimality of the stabilizing control in a weakly nonlinear system with state-dependent coefficients // AIP Conference Proceedings. Kazakhstan, Almaty, September 7–10, 2016. Vol. 1759, 20016 (2016). Pp. 020016-1 – 020016-6. DOI: 10.1063/1.4959630
7. Heydari A., Balakrishnan S.N. Path Planning Using a Novel Finite Horizon Suboptimal Controller // Journal of guidance, control, and dynamics. 2013. Vol. 36, No. 4. Pp. 1210-1214.

8. Heydari A., Balakrishnan S.N. Closed-Form Solution to Finite-Horizon Suboptimal Control of Nonlinear Systems // International Journal of Robust and Nonlinear Control. 2015. Vol. 25. №.15. Pp. 2687-2704.
9. Khamis A., Naidu D. Nonlinear optimal tracking using finite horizon state dependent Riccati equation (SDRE) //Proceedings of the 4th International Conference on Circuits, Systems, Control, Signals (WSEAS). 2013. Pp. 37-42.
10. Khamis A., Naidu D.S., Kamel A.M. Nonlinear Finite-Horizon Regulation and Tracking for Systems with Incomplete State Information Using Differential State Dependent Riccati Equation // International Journal of Aerospace Engineering. Vol. 2014 (2014). 12 pages. http://dx.doi.org/10.1155/2014/178628.
11. Khamis A., Naidu D.S., Kamel A.M. Nonlinear Optimal Tracking For Missile Gimbaled Seeker Using Finite-Horizon State Dependent Riccati Equation // Int. Journal Of Electronics And Telecommunications, 2014, Vol. 60, No. 2, Pp. 165–171.
12. Khamis A., Chen C. H., Naidu D. S. Tracking of a robotic hand via SD-DRE and SD-DVE strategies // Control (CONTROL), 2016 UKACC 11th International Conference on. IEEE. 2016. Pp. 1-6.
13. Черноусько Ф.Л., Колмановский В.Б. Вычислительные и приближенные методы оптимального управления // Итоги науки и техники. Серия «Математический анализ». 1977. Т. 14. С. 101-166.
14. Дмитриев М.Г., Курина Г.А. Сингулярные возмущения в задачах управления // АиТ. 2006. № 1. С. 3–51.
15. Методы классической и современной теории автоматического управления: Учебник в 5-и тт.; 2-е изд., перераб. и доп. Т 4. Теория оптимизации систем автоматического управления / Под ред. К.А. Пупкова и Н.Д. Егупова. М.: Издательство МГТУ им. Баумана, 2004. - 744с.; ил.
16. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. М.: Изд-во «Мир», 1977. 650 с.
17. The control handbook / edited by Levine W. S. – CRC press, 1996. ISBN 9780849385704.
18. Даник Ю.Э., Дмитриев М.Г., Макаров Д.А. Один алгоритм построения регуляторов для нелинейных систем с формальным малым параметром // Информационные технологии и вычислительные системы. 2015. №4. С. 35-44.
19. Danik Yu.E. LMI-based robustness analysis of the nonlinear regulator for discrete time nonlinear systems, Fullpapers E-Book 6th. world Congress on Electrical Engineering, Computer Science and Information Technology (WCECIT 2016), Barcelona, Spain, September 8-10, 2016, pp. 96-101.
20. Даник Ю.Э. Робастность слабо нелинейной дискретной системы по отношению к параметрическим возмущениям// Информатика, управление и системный анализ: Труды IV Всероссийской научной конференции молодых ученых с международным участием. Т. I. –Тверь: Тверской государственный технический университет, 2016. С. 27-38.
21. Макаров Д.А. Подход к построению нелинейного управления в задаче слежения с коэффициентами, зависящими от состояния. II. Численные эксперименты // Информационные технологии и вычислительные системы (принято в печать журнала ИТиВС).

Макаров Дмитрий Александрович. Ведущий научный сотрудник общества с ограниченной ответственностью «Технологии системного анализа» (ООО «ТСА»). Окончил Рыбинскую государственную авиационную технологическую академию им. П.А. Соловьева в 2008 году. Кандидат физико-математических наук. Количество печатных работ: 30. Область научных интересов: управление сложными динамическими системами, робастные методы устойчивости и стабилизируемости, искусственный интеллект, экспертные системы. E-mail: makarov@isa.ru

A nonlinear approach to a feedback control design for a tracking state-dependent problem Part I. An algorithm

D.A. Makarov

Abstract. The paper deals with a nonlinear finite-horizon tracking control design for a plant with an additive linear part and state-dependent coefficients. The tracking problem is reduced to an optimal control problem with terminal payoff where exact and approximate solutions are given. The last one is used in an algorithm for a design of a computationally efficient nonlinear control.
Keywords: tracking problem, nonlinear control, small parameter, state-dependent Riccati equation.

References

1. Cloutier J.R. 1997. State-dependent Riccati equation techniques: an overview. Proceedings of American Control Conference. 2: 932-936.
2. Çimen T. 2012. Survey of state-dependent Riccati equation in nonlinear optimal feedback control synthesis. Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 35(4): 1025-1047.
3. Afanas'ev V.N. 2011. Control of nonlinear plants with state-dependent coefficients. Automation and Remote Control. 72: 713-726.
4. Chang I. and Bentsman J. 2013. Constrained discrete-time state-dependent Riccati equation technique: A model predictive control approach. Proceedings of 52nd IEEE Conference on Decision and Control. Florence, Italy. 5125-5130.

5. Dmitriev M.G. and Makarov D.A. 2014. Smooth nonlinear controller in a weakly nonlinear control system with state-dependent coefficients. Proceedings of the Institute for System Analysis of RAS. 64(4): 53-58.
6. Dmitriev M.G. and Makarov D.A. 2016. The near optimality of the stabilizing control in a weakly nonlinear system with state-dependent coefficients. Proceedings of AIP Conference. Kazakhstan, Almaty. 20016(2016): 020016-1 – 020016-6. DOI: 10.1063/1.4959630**.**
7. Heydari A. and Balakrishnan S.N. 2013. Path Planning Using a Novel Finite Horizon Suboptimal Controller. Journal of guidance, control, and dynamics. 36(4): 1210-1214.
8. Heydari A. and Balakrishnan S.N. 2015. Closed-Form Solution to Finite-Horizon Suboptimal Control of Nonlinear Systems // International Journal of Robust and Nonlinear Control. Vol. 25. №.15. Pp. 2687-2704.
9. Khamis A. and Naidu D. 2013. Nonlinear optimal tracking using finite horizon state dependent Riccati equation (SDRE). Proceedings of the 4th International Conference on Circuits, Systems, Control, Signals (WSEAS). 37-42.
10. Khamis A., Naidu D.S. and Kamel A.M. 2014. Nonlinear Finite-Horizon Regulation and Tracking for Systems with Incomplete State Information Using Differential State Dependent Riccati Equation. International Journal of Aerospace Engineering. 2014 (2014). Available at: http://dx.doi.org/10.1155/2014/178628.
11. Khamis A., Naidu D.S. and Kamel A.M. 2014. Nonlinear Optimal Tracking For Missile Gimbaled Seeker Using Finite-Horizon State Dependent Riccati Equation. Int. Journal Of Electronics And Telecommunications. 60(2): 165–171.
12. Khamis A., Chen C. H. and Naidu D. S. 2016. Tracking of a robotic hand via SD-DRE and SD-DVE strategies. UKACC. Proceedings of 11th International Conference on. IEEE. 1-6.
13. Chernousko F.L. and Kolmanovskij V.B. 1977. Computational and approximate methods of optimal control. Journal of Soviet Mathematics. 14: 101-166.
14. Dmitriev M.G. and Kurina G.A. 2006. Singular perturbations in control problems. Automation and Remote Control. 67(1): 1–43.
15. Methods of classical and modern theory of automatic control: A textbook in 5 volumes; 2-nd ed., revised and enlarged. Volume 4. Theory of optimization of automatic control systems, edited by K.A. Pupkov and N.D. Egupov. 2004. Moscow: Publishing house MSTU. Bauman. 744p.
16. Kvakernaak H. and Sivan R. 1977. Linear optimal control systems. Moscow: Mir. 650 p.
17. The control handbook / edited by Levine W. S. 1996. CRC press. ISBN 9780849385704.
18. Danik Yu.E., Dmitriev M.G. and Makarov D.A. 2015. An algorithm for constructing regulators for nonlinear systems with the formal small parameter. Information technology and computer systems. 4:35-44.
19. Danik Yu.E. 2016. LMI-based robustness analysis of the nonlinear regulator for discrete time nonlinear systems. Fullpapers E-Book 6th. world Congress on Electrical Engineering, Computer Science and Information Technology (WCECIT 2016). Barcelona. 96-101.
20. Danik Yu.E. 2016. Robustness of weakly nonlinear discrete system with respect to parametric perturbations. Proceedings of the IV All-Russian Scientific Conference of Young Scientists with international participation on Informatics, Control and Systems Analysis, Tver. I: 27-38.
21. Makarov D.A. A nonlinear approach to a feedback control design for a tracking state-dependent problem. II. The numerical simulations. Information technology and computer systems (accepted by the editors of “Information Technologies And Computer Systems”).

Makarov Dmitry Alexandrovich. “Technologies Of System Analysis” Ltd, leading researcher. Cand. Sci. (Physics and Mathematics). Author of 30 scientific papers. Research interests: nonlinear and robust control, composite control, artificial intelligence.