

# Моделирование пружин в системах виртуального окружения с помощью метода мягких ограничений<sup>1</sup>

Е.В. Страшнов, М.А. Торгашев, П.Ю. Тимохин

**Аннотация.** В работе рассматривается задача моделирования динамики систем тел, соединенных пружинами поступательного и вращательного типа. Предлагается подход, в рамках которого силовая модель пружины произвольного типа описывается в виде мягкого ограничения относительно скоростей тел и импульса. Данное ограничение формулируется на основе неявной схемы Эйлера для численного интегрирования дифференциальных уравнений движения тел. Моделирование динамики системы тел осуществляется в реальном времени с помощью метода последовательных импульсов, позволяющего моделировать пружины с любыми значениями их параметров. Апробация предложенных алгоритмов и методов была проведена в подсистеме динамики имитационно-тренажерного комплекса, разработанного в ФГУ ФНИЦ НИИСИ РАН, и показала их применимость в системах виртуального окружения.

**Ключевые слова:** система тел, жесткие системы дифференциальных уравнений, метод последовательных импульсов, мягкие ограничения, реальное время, имитационно-тренажерный комплекс.

## Введение

В системах виртуальной реальности, в частности в имитационно-тренажерных комплексах, часто требуется моделировать динамику систем тел, часть из которых связаны между собой с помощью силовых элементов. В данной статье в качестве таких силовых элементов рассматриваются пружины и подпружиненные соединения. Примерами механизмов, содержащих пружины или подпружиненные соединения, являются: ресора подвески колесного робота, смягчающая удар и толчки при перемещении по неровной поверхности; схват промышленного робота с пружиной, позволяющий брать хрупкие предметы; автоматически закрывающаяся дверь с пружиной и т.д. Поэтому моделирование динамики пружин и подпружиненных соединений является актуальной задачей для имитационно-тренажерных

комплексов и систем виртуального окружения, в частности, при моделировании движения виртуальных роботов, содержащих такие соединения.

Для моделирования динамики шарнирно связанных тел существуют два подхода [1]: первый основывается на использовании обобщенных координат (например, относительных углов или перемещений) для описания движения тел, а второй подход задействует полный набор координат (абсолютные координаты положения и ориентации каждого тела). В рамках первого подхода динамика многих тел задается в виде дифференциальных уравнений относительно обобщенных ускорений и обобщенных сил. С помощью метода Физерстоуна [2] решение задачи прямой динамики (вычисление ускорений под действием внешних сил) выполняется за линейное время относительно количества степеней свободы системы. При исполь-

<sup>1</sup> Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-07-01104

зовании второго подхода динамика систем тел формулируется в виде дифференциально-алгебраических уравнений [3] с ограничениями, которые задают различные механические связи. В [4-6] был разработан итеративный метод последовательных импульсов, который позволяет моделировать в реальном времени динамику шарнирно связанных тел для шарниров различного типа с трением, а также с учетом динамики электропривода. В данной статье будет рассмотрен второй подход по причине его большей гибкости и универсальности по сравнению с первым подходом.

Динамика пружин и подпружиненных соединений описывается с помощью так называемых жестких систем дифференциальных уравнений [7]. Если система уравнений является жесткой, то это накладывает ряд ограничений на использование для этой системы численных методов интегрирования. Численное решение данной системы явными методами является неудовлетворительным по причине резкого возрастания погрешности при недостаточно малом шаге интегрирования. В [8] для моделирования динамики многих тел с контактом и трением используется неявная схема интегрирования дифференциальных уравнений. Однако применение неявных методов приводит к необходимости решать на каждом шаге моделирования систему нелинейных уравнений, что является вычислительно затратной задачей и усложняет обеспечение реального времени моделирования. При применении других методов интегрирования, таких как полуявная схема Эйлера [9], которая является условно устойчивой, требуется либо уменьшать шаг моделирования, либо уменьшать параметры пружины (жесткость и коэффициент демпфирования). Для сложных виртуальных сцен с роботами, содержащих много объектов, требуется достаточно большой шаг моделирования, чтобы успеть выполнить все расчеты в реальном времени. Это накладывает серьезные ограничения, согласно которым для данных сцен возможно смоделировать только пружины с малыми параметрами жесткости. В данной работе рассматривается задача разработки быстрых и абсолютно устойчивых методов моделирования динамики систем тел при наличии пружин

и подпружиненных соединений между некоторыми из них.

Для решения рассматриваемой задачи применяется разработанный в [4] метод последовательных импульсов для моделирования динамики многих тел с пружинами и подпружиненными соединениями. В статье предлагается подход, в рамках которого динамика пружины описывается с помощью *мягкого* ограничения. Согласно [10], мягкие ограничения – это такие ограничения, посредством которых возможно моделировать мягкие и деформируемые тела. Для пружин данное ограничение выводится путем аналитического представления взаимосвязи между импульсом и предполагаемых скоростей тел с применением неявной схемы Эйлера для численного решения дифференциальных уравнений динамики. Предлагаемые методы и алгоритмы моделирования динамики пружин и подпружиненных соединений реализованы в программных модулях и апробированы в подсистеме динамики имитационно-тренажерного комплекса, созданного в ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН.

## 1. Модели силовых элементов пружин с демпфером

Действие пружины на соединяемые ею тела определяется силой или моментом, развиваемым пружиной в зависимости от ее типа. Рассмотрим наиболее распространенные силовые модели поступательной и вращательной пружины с демпфером [1].

**Модель поступательной пружины с демпфером.** Такая пружина работает на сжатие и растяжение. Рассмотрим два тела  $i$  и  $j$ , соединенные в точках  $P_i$  и  $P_j$  пружиной с демпфером (Рис. 1). Параметрами поступательной пружины являются: жесткость пружины  $k$  (в Н/м), коэффициент демпфирования  $c$  (в Н\*с/м) и длина пружины в недеформированном состоянии  $l_0$  (в м). Поступательная пружина формирует силу, посредством которой соединяемые тела влияют друг на друга. Эта сила состоит из двух составляющих. Первая составляющая образуется на основе деформации пружины (сжатия или растяжения) относительно своего

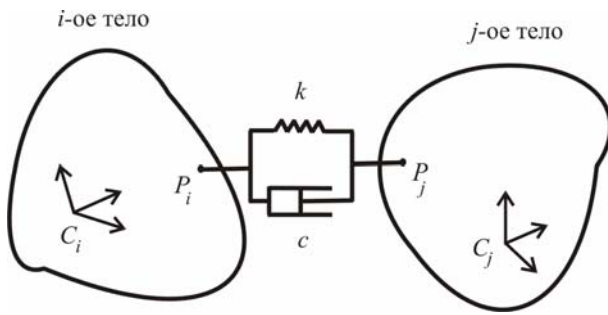


Рис.1. Пружина с демпфером

положения равновесия  $l_0$ . Согласно закону Гука о деформациях в упругом теле пружина будет создавать силу, пропорциональную отклонению от положения равновесия:

$$f_1 = k\Delta l = k(l - l_0),$$

где  $l$  – текущая длина пружины.

Вторая составляющая силы пружины формируется на основе модели вязкого трения. Согласно данной модели сила вязкого трения пропорциональна скорости деформации пружины:

$$f_2 = c \frac{dl}{dt}.$$

Таким образом, результирующая сила упругости пружины будет равна

$$f_s = f_1 + f_2 = k(l - l_0) + c \frac{dl}{dt}. \quad (1)$$

Поступательная пружина будет создавать в точках  $P_i$  и  $P_j$  силы с противоположным знаком, направленные вдоль линии соединения пружины  $\overline{P_i P_j}$ : в точке  $P_i$  на  $i$ -ое тело будет действовать сила  $\vec{f}_i = f_s \vec{n}$ , в точке  $P_j$  на  $j$ -ое тело будет действовать сила  $\vec{f}_j = -f_s \vec{n}$ , где  $\vec{n} = \frac{\overline{P_i P_j}}{\|\overline{P_i P_j}\|}$  – вектор направления действия силы пружины.

Величины  $l$  и  $\frac{dl}{dt}$  в (1) определяются через абсолютные координаты и скорости рассматриваемых тел (т.е. координаты и скорости в мировой системе координат). Положение и ориентация  $i$ -го тела задается с помощью

координат центра масс  $C_i$  в мировой системе координат и матрицы перехода  $R_i$  из локальной системы координат тела в мировую систему координат. Аналогично, с помощью  $C_j$  и матрицы  $R_j$  задается положение и ориентация  $j$ -го тела. Тогда, выражая точки  $P_i$  и  $P_j$  через абсолютные координаты, получим соотношение для длины пружины:

$$l = \|\overline{P_i P_j}\| = \|C_j + R_j P'_j - C_i - R_i P'_i\|,$$

где  $P'_i$  и  $P'_j$  – координаты точек крепления пружины в локальных системах координат тел.

Дифференцируя  $l$  по времени  $t$ , получим выражение для изменения длины пружины:

$$\begin{aligned} \frac{dl}{dt} &= \frac{d}{dt} \|\overline{P_i P_j}\| = (\vec{v}_{P_j} - \vec{v}_{P_i}) \cdot \frac{\overline{P_i P_j}}{\|\overline{P_i P_j}\|} = (\vec{v}_{P_j} - \vec{v}_{P_i}) \cdot \vec{n} = \\ &= (\vec{v}_j + \vec{\omega}_j \times \overline{C_j P_j} - \vec{v}_i - \vec{\omega}_i \times \overline{C_i P_i}) \cdot \vec{n}, \end{aligned}$$

где  $\vec{v}_i$  и  $\vec{v}_j$  – линейные скорости центров масс тел,  $\vec{\omega}_i$  и  $\vec{\omega}_j$  – угловые скорости тел.

Сила поступательной пружины (1) в абсолютных координатах имеет вид

$$\begin{aligned} f_s &= k(\|\overline{P_i P_j}\| - l_0) + \\ &+ c(\vec{v}_j + \vec{\omega}_j \times \overline{C_j P_j} - \vec{v}_i - \vec{\omega}_i \times \overline{C_i P_i}) \cdot \vec{n}. \end{aligned} \quad (2)$$

Соотношение (2) определяет силовую модель поступательной пружины с демпфером, выраженную через абсолютные координаты тел.

**Модель вращательной пружины с демпфером, установленной в осевом шарнире.** Рассмотрим два тела  $i$  и  $j$ , соединенные в точке  $P$  осевым шарниром с торсионной пружиной (Рис. 2). Параметрами вращательной пружины являются: жесткость пружины  $k_r$  (в Н\*м/рад), коэффициент демпфирования  $c_r$  (в Н\*м\*с/рад) и угол шарнира для пружины в недеформированном состоянии  $\theta_0$  (в рад).

Вращательная пружина работает на кручение и создает момент, с помощью которого два соединяемых тела влияют друг на друга. Аналогично поступательной пружине этот момент складывается из двух составляющих: момента упругости при кручении, пропорционального отклонению угла шарнира от положения равно-

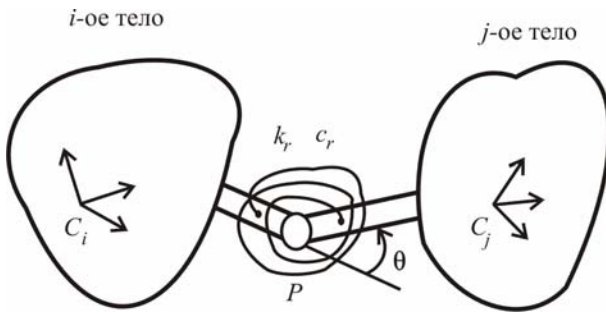


Рис. 2. Торсионная пружина с демпфером

весия, и момента вязкого трения. Результирующий момент такой пружины будет равен

$$\tau_s = k_r(\theta - \theta_0) + c_r\dot{\theta}, \quad (3)$$

где  $\theta$  – угол поворота  $j$ -го тела относительно  $i$ -го тела (угол считается положительным, если поворот производится против часовой стрелки).

Вращательная пружина создает момент, который прикладывается к двум телам с разным знаком и направленный вдоль оси осевого шарнира: на  $i$ -ое тело будет действовать момент  $\bar{\tau}_i = \tau_s \bar{n}_s$ , на  $j$ -ое тело будет действовать момент  $\bar{\tau}_j = -\tau_s \bar{n}_s$ , где  $\bar{n}_s$  – вектор оси шарнира.

Выразим  $\theta$  через относительный кватернион  $\bar{q}$ , задающий ориентацию  $j$ -го тела относительно  $i$ -го тела, а  $\dot{\theta}$  – через угловые скорости тел. Кватернион  $\bar{q}$  определяется из относительной матрицы  $R_j R_i^{-1}$ . Способ вычисления угла  $\theta$  осевого шарнира по кватерниону  $\bar{q}$  описан в [11, с. 132]. Изменение угла  $\dot{\theta}$  вычисляется через относительную угловую скорость в шарнире:

$$\dot{\theta} = (\bar{\omega}_j - \bar{\omega}_i) \cdot \bar{n}_s.$$

Момент вращательной пружины (3) в абсолютных координатах имеет вид

$$\tau_s = k_r(\theta(\bar{q}) - \theta_0) + c_r(\bar{\omega}_j - \bar{\omega}_i) \cdot \bar{n}_s. \quad (4)$$

Соотношение (4) определяет силовую модель вращательной пружины, выраженную через абсолютные координаты тел.

## 2. Метод мягких ограничений для моделирования пружины

Основная задача, решаемая в данной статье, состоит в разработке абсолютно устойчивого

метода моделирования динамики системы тел при наличии связывающих их пружин. Для этого предлагается представить силовые модели пружин вида (2) и (4) в формулировке мягкого ограничения. Сначала поясним идею данного подхода на примере модели затухающего осциллятора. Рассмотрим груз массой  $m$  (Рис. 3), закрепленный на пружине жесткостью  $k$  и коэффициентом затухания  $c$ . Пусть  $x$  – смещение груза относительно положения равновесия  $x = 0$ . Тогда, согласно второму закону Ньютона, уравнение движения груза под действием силы упругости с вязким трением примет вид

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x}.$$

Осуществляя замену  $v = \dot{x}$ , преобразуем данное дифференциальное уравнение к системе дифференциальных уравнений первого порядка:

$$m\dot{v} = -kx - cv;$$

$$\dot{x} = v.$$

Применим к полученной системе неявную схему Эйлера [7] для интегрирования дифференциальных уравнений с шагом  $\Delta t$ :

$$\begin{aligned} m \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} &= -kx(t + \Delta t) - cv(t + \Delta t); \\ \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} &= v(t + \Delta t). \end{aligned} \quad (5)$$

Полученная система преобразуется к линейной системе уравнений относительно неизвестных  $x(t + \Delta t)$  и  $v(t + \Delta t)$ :

$$\begin{aligned} mv(t + \Delta t) &= mv(t) + \Delta t(-kx(t + \Delta t) - cv(t + \Delta t)), \\ x(t + \Delta t) &= x(t) + \Delta tv(t + \Delta t). \end{aligned}$$

Обозначим через  $\lambda$  импульс  $\Delta t(-kx(t + \Delta t) - cv(t + \Delta t))$  и заменим в выражении  $\Delta t(kx(t + \Delta t) + cv(t + \Delta t)) + \lambda = 0$  величину  $x(t + \Delta t)$  на правую часть второго уравнения.

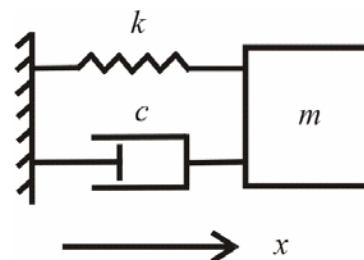


Рис. 3. Система груз-пружина с затуханием

Тогда получим

$$\Delta t(k\Delta t + c)v(t + \Delta t) + k\Delta tx(t) + \lambda = 0.$$

Поделим данное выражение на величину  $\Delta t(k\Delta t + c)$  и сделаем замены:

$$\gamma = \frac{1}{\Delta t(k\Delta t + c)}; \beta = \frac{k\Delta t}{k\Delta t + c}. \quad (6)$$

В результате получим

$$v(t + \Delta t) + \frac{\beta}{\Delta t}x(t) + \gamma\lambda = 0. \quad (7)$$

Данное ограничение называется *мягким* и определяет динамику пружины затухающего осциллятора. Если  $k \rightarrow \infty$  и  $c \rightarrow \infty$ , получим  $\gamma \rightarrow 0$  и  $\beta \rightarrow 0$ , а ограничение (7) станет *жестким* и в пределе примет вид  $v(t + \Delta t) = 0$ , что соответствует жестко закрепленному грузу. В терминах работы [10] безразмерный параметр  $\beta$  называется ERP (Error Reduction Parameter – параметр уменьшения ошибки), а параметр  $\gamma$  называется CFM (Constraint Force Mixing – параметр силы, ограничивающей смешивание, от которого зависит «мягкость» ограничения) и для ограничения (7) имеет размерность 1/кг.

Задача моделирования динамики затухающего осциллятора теперь сводится к вычислению импульса  $\lambda$ , удовлетворяющему ограничению (7), выполнение которого соответствует неявной схеме Эйлера для интегрирования дифференциальных уравнений вида (5). В силу того, что неявная схема является абсолютно устойчивой, данный метод позволяет моделировать пружины с любыми параметрами  $k$  и  $c$ , а также с любым шагом интегрирования  $\Delta t$ .

Теперь рассмотрим общий случай, когда два тела  $i$  и  $j$  соединены пружиной произвольного типа (поступательная или вращательная пружина).

Пусть  $\bar{X}_i$  и  $\bar{X}_j$  – векторы координат двух соединяемых пружиной тел (например, положения центров масс тел и кватернионы). Пусть пружина имеет жесткость  $k$  и коэффициент демпфирования  $c$ . Положение равновесия данной пружины можно задать с помощью ограничения следующего вида:

$$G(\bar{X}_i, \bar{X}_j) = 0. \quad (8)$$

Скорости рассматриваемых тел связаны с их координатами с помощью кинематических соотношений общего вида:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{X}}_i &= H(\bar{X}_i)\bar{V}_i; \\ \dot{\bar{X}}_j &= H(\bar{X}_j)\bar{V}_j, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\bar{V}_i = \begin{pmatrix} \bar{v}_i \\ \bar{\omega}_i \end{pmatrix}$  и  $\bar{V}_j = \begin{pmatrix} \bar{v}_j \\ \bar{\omega}_j \end{pmatrix}$  – векторы линейных и угловых скоростей  $i$ -го и  $j$ -го тела,  $H$  – матрица, связывающая координаты тел и их скорости (при использовании координат центра масс тела и кватерниона  $\bar{q} = (q_w, q_x, q_y, q_z)$  она

имеет вид  $H = \begin{bmatrix} E_3 & 0 \\ 0 & H_q \end{bmatrix}$ , где  $E_3$  – единичная

матрица размерности 3 на 3 и

$$H_q = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -q_x & -q_y & -q_z \\ q_w & q_z & -q_y \\ -q_z & q_w & q_x \\ q_y & -q_x & q_w \end{bmatrix}.$$

Дифференцируя ограничение (8) по времени, получим

$$\dot{G} = J_i\bar{V}_i + J_j\bar{V}_j = 0,$$

где  $J_i = \frac{\partial G}{\partial \bar{X}_i} H(\bar{X}_i)$  и  $J_j = \frac{\partial G}{\partial \bar{X}_j} H(\bar{X}_j)$  – якобианы ограничений размерностью 1 на 6.

Из классической механики известно [1], что силы пружины, соединяющей  $i$ -ое и  $j$ -ое тело, будут иметь вид

$$\begin{aligned} \bar{F}_i &= J_i^T (-kG - c(J_i\bar{V}_i + J_j\bar{V}_j)), \\ \bar{F}_j &= J_j^T (-kG - c(J_i\bar{V}_i + J_j\bar{V}_j)). \end{aligned}$$

Тогда уравнения динамики  $i$ -го и  $j$ -го тела с учетом сил пружины можно записать в форме второго закона Ньютона в следующем виде:

$$\begin{aligned} M_i\dot{\bar{V}}_i &= J_i^T (-kG - c(J_i\bar{V}_i + J_j\bar{V}_j)); \\ M_j\dot{\bar{V}}_j &= J_j^T (-kG - c(J_i\bar{V}_i + J_j\bar{V}_j)), \end{aligned} \quad (10)$$

где  $M_i = \text{diag}(m_i E_3, I_i)$  и  $M_j = \text{diag}(m_j E_3, I_j)$  – блочно-диагональные матрицы масс размерности 6 на 6,  $m_i$  и  $m_j$  – массы тел,  $E_3$  – единич-

ная матрица размерности 3 на 3,  $I_i$  и  $I_j$  – тензоры инерции тел.

Запишем неявную схему Эйлера с шагом  $\Delta t$  для уравнений (9) и (10):

$$\begin{aligned} M_i \bar{V}_i(t + \Delta t) &= M_i \bar{V}_i(t) + \\ &+ J_i^T \Delta t (-kG(t + \Delta t) - c(J_i \bar{V}_i(t + \Delta t) + J_j \bar{V}_j(t + \Delta t))); \\ M_j \bar{V}_j(t + \Delta t) &= M_j \bar{V}_j(t) + \\ &+ J_j^T \Delta t (-kG(t + \Delta t) - c(J_i \bar{V}_i(t + \Delta t) + J_j \bar{V}_j(t + \Delta t))); \\ \bar{X}_i(t + \Delta t) &= \bar{X}_i(t) + \Delta t H(\bar{X}_i) \bar{V}_i(t + \Delta t); \\ \bar{X}_j(t + \Delta t) &= \bar{X}_j(t) + \Delta t H(\bar{X}_j) \bar{V}_j(t + \Delta t). \end{aligned} \quad (11)$$

Воспользуемся двумя последними уравнениями из (11) и применим формулу Тейлора по координатам  $\bar{X}_i$  и  $\bar{X}_j$  для ограничения  $G(t + \Delta t)$ . Отбрасывая малые члены в формуле Тейлора, получим:

$$\begin{aligned} G(t + \Delta t) &= G(\bar{X}_i(t + \Delta t), \bar{X}_j(t + \Delta t)) = \\ &G(\bar{X}_i(t) + \Delta t H(\bar{X}_i) \bar{V}_i(t + \Delta t), \bar{X}_j(t) + \Delta t H(\bar{X}_j) \bar{V}_j(t + \Delta t)) \approx \\ &G(\bar{X}_i(t), \bar{X}_j(t)) + \Delta t \frac{\partial G}{\partial \bar{X}_i} H(\bar{X}_i) \bar{V}_i(t + \Delta t) + \Delta t \frac{\partial G}{\partial \bar{X}_j} H(\bar{X}_j) \bar{V}_j(t + \Delta t) = \\ &G(\bar{X}_i(t), \bar{X}_j(t)) + \Delta t J_i \bar{V}_i(t + \Delta t) + \Delta t J_j \bar{V}_j(t + \Delta t). \end{aligned} \quad (12)$$

Обозначим через  $\lambda$  импульс  $\Delta t(-kG(t + \Delta t) - c(J_i \bar{V}_i(t + \Delta t) + J_j \bar{V}_j(t + \Delta t)))$  и заменим в выражении  $\Delta t(kG(t + \Delta t) + c(J_i \bar{V}_i(t + \Delta t) + J_j \bar{V}_j(t + \Delta t))) + \lambda = 0$  величину  $G(t + \Delta t)$  на правую часть (12). Тогда получим следующее выражение:

$$(k\Delta t^2 + c\Delta t)(J_i \bar{V}_i(t + \Delta t) + J_j \bar{V}_j(t + \Delta t)) + k\Delta t G(t) + \lambda = 0.$$

Поделим данное уравнение на выражение  $k\Delta t^2 + c\Delta t$  и сделаем замены вида (6). Тогда получим мягкое ограничение для произвольной пружины с демпфером:

$$J_i \bar{V}_i(t + \Delta t) + J_j \bar{V}_j(t + \Delta t) + \frac{\beta}{\Delta t} G(t) + \gamma \lambda = 0. \quad (13)$$

Для вывода ограничений вида (13) для пружин общего вида потребуется задать положение равновесия (8) и вычислить якобианы  $J_i$  и  $J_j$  в зависимости от силовой модели пружины.

Ограничение (8) для модели (2) поступательной пружины (рис. 1) примет вид

$$G = l - l_0 = \left\| \overline{P_i P_j} \right\| - l_0 = 0.$$

Дифференцируя данное ограничение, получим

$$\dot{G} = \frac{d}{dt} \left\| \overline{P_i P_j} \right\| = (\bar{v}_j + \bar{\omega}_j \times \overline{C_j P_j} - \bar{v}_i - \bar{\omega}_i \times \overline{C_i P_i}) \cdot \bar{n},$$

где  $\bar{n} = \frac{\overline{P_i P_j}}{\left\| \overline{P_i P_j} \right\|}$ ,  $J_i = \begin{pmatrix} -\bar{n}^T & -(\overline{C_i P_i} \times \bar{n})^T \end{pmatrix}$  и

$$J_j = \begin{pmatrix} \bar{n}^T & (\overline{C_j P_j} \times \bar{n})^T \end{pmatrix}.$$

Ограничение (8) для модели (4) вращательной пружины (Рис. 2) в осевом шарнире примет вид

$$G = \theta(\bar{q}) - \theta_0 = 0.$$

Дифференцируя данное ограничение, получим

$$\dot{G} = \dot{\theta} = (\bar{\omega}_j - \bar{\omega}_i) \cdot \bar{n}_s,$$

где  $J_i = \begin{pmatrix} \bar{0}^T & -\bar{n}_s^T \end{pmatrix}$ ,  $J_j = \begin{pmatrix} \bar{0}^T & \bar{n}_s^T \end{pmatrix}$ ,  $\bar{n}_s$  – вектор оси шарнира.

Коэффициенты  $\gamma$  и  $\beta$  из уравнения (13) определяются по формулам (6) через жесткость  $k_r$  и коэффициент демпфирования  $c_r$  модели вращательной пружины (4).

Подставляя якобианы поступательной и вращательной модели пружин в ограничение (13), получим описание динамики пружины в виде мягкого ограничения. Преимущество метода мягких ограничений состоит в том, что не требуется решать систему нелинейных уравнений в отличие от формулировки задачи моделирования динамики многих тел в виде неявной схемы Эйлера, то он является абсолютно устойчивым, и в дальнейшем задача моделирования динамики тел при наличии пружин состоит в том, чтобы обеспечить выполнение мягкого ограничения вида (13).

### 3. Моделирование динамики системы тел с учетом мягких ограничений

В данной работе моделирование динамики системы тел предлагается осуществлять с применением метода последовательных импульсов [4]. Данный метод является итерационным, на каждом шаге итерации последовательно обрабатывается каждое ограничение с вычислением соответствующего импульса, который корректирует скорости тел. В публикациях [4-6] метод последовательных импульсов достаточно подробно описан для моделирования шарниров различного типа, трения в шарнирах и электропривода. Здесь покажем, как его использовать для обработки ограничений вида (13).

В методе последовательных импульсов рассматривается подход, в котором на каждом шаге расчета динамики используется полуневяная схема Эйлера [9] для интегрирования уравнений движения. Согласно данной схеме сначала определяются скорости тел, а по найденным скоростям вычисляются координаты тел. При вычислении скоростей сначала учитываются все известные внешние силы, а затем, последовательно обрабатывая ограничения, скорости корректируются на основе вычисленных импульсов. Покажем процедуру вычисления импульса и скоростей тел для ограничения (13) на  $k$ -ой итерации метода последовательных импульсов. Пусть  $\lambda^{k-1}$  – импульс ограничения (13) с предыдущей ( $k-1$ -ой) итерации метода, а  $\bar{V}_i'(t+\Delta t)$  и  $\bar{V}_j'(t+\Delta t)$  – текущие скорости тел. Требуется вычислить корректирующий импульс  $\Delta\lambda^k$  так, чтобы ограничение (13) было выполнено для новых скоростей. Для этого применим полуневяную схему Эйлера для уравнений (10) и запишем их через импульс  $\Delta\lambda^k$  и текущие скорости тел:

$$\begin{aligned}\bar{V}_i(t+\Delta t) &= \bar{V}_i'(t+\Delta t) + M_i^{-1} J_i^T \Delta\lambda^k; \\ \bar{V}_j(t+\Delta t) &= \bar{V}_j'(t+\Delta t) + M_j^{-1} J_j^T \Delta\lambda^k.\end{aligned}$$

Учитывая, что  $\lambda^k = \lambda^{k-1} + \Delta\lambda^k$ , объединим данные уравнения с ограничением (13) относительно введенных импульсов. Тогда получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}\bar{V}_i(t+\Delta t) &= \bar{V}_i'(t+\Delta t) + M_i^{-1} J_i^T \Delta\lambda^k; \\ \bar{V}_j(t+\Delta t) &= \bar{V}_j'(t+\Delta t) + M_j^{-1} J_j^T \Delta\lambda^k; \\ J_i \bar{V}_i(t+\Delta t) + J_j \bar{V}_j(t+\Delta t) + \frac{\beta}{\Delta t} G(t) + \\ &+ \gamma(\lambda^{k-1} + \Delta\lambda^k) = 0.\end{aligned}\tag{14}$$

Подставим первые два уравнения в третье, сгруппируем слагаемые с  $\Delta\lambda^k$  и получим уравнение относительно импульса  $\Delta\lambda^k$ :

$$\begin{aligned}(J_i M_i^{-1} J_i^T + J_j M_j^{-1} J_j^T + \gamma) \Delta\lambda^k = \\ = -J_i \bar{V}_i'(t+\Delta t) - J_j \bar{V}_j'(t+\Delta t) - \frac{\beta}{\Delta t} G(t) - \gamma \lambda^{k-1}.\end{aligned}\tag{15}$$

Из уравнения (15) сначала вычисляется корректирующий импульс  $\Delta\lambda^k$ , а затем – импульс на  $k$ -ой итерации по формуле  $\lambda^k = \lambda^{k-1} + \Delta\lambda^k$ . Новые скорости тел вычисляются согласно первым двум уравнениям в (14). Итерации метода последовательных импульсов продолжаются до тех пор, пока не будет выполнено  $|\Delta\lambda^k| < \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – малое число. Метод последовательных импульсов сходится вследствие его эквивалентности методу Гаусса-Зейделя [4], предназначенного для решения системы линейных уравнений.

### 4. Результаты

Предложенные в данной статье методы и алгоритмы были внедрены в имитационно-тренажерный комплекс, разработанный в ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН и предназначенный для компьютерной симуляции динамики виртуальных роботов в виртуальном окружении. Виртуальные 3D модели роботов и окружающей обстановки создаются в системе трехмерного моделирования Autodesk 3ds Max. Подготовленные модели загружаются в систему динамики и систему визуализации. Управление роботом осуществляется с помощью специального виртуального пульта, и управляющее воздействие передается в систему динамики, которая определяет новые скорости и координаты объектов. Координаты объектов передаются по специальному информационному протоколу в систему визуализации, которая синтезирует изображение виртуальной сцены с новыми по-

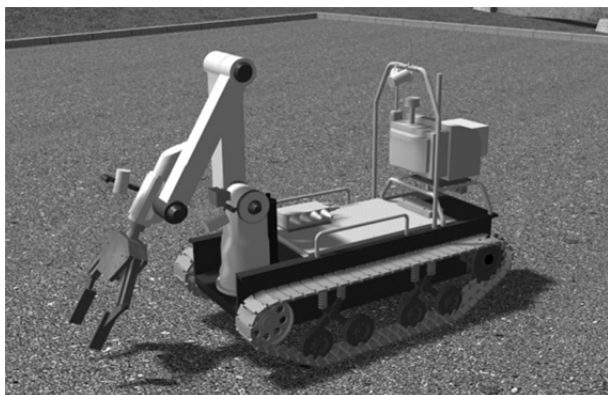


Рис. 4. Робот-разведчик

ложениями и ориентациями объектов. Один шаг моделирования и визуализации занимает не более 40 мс, что обеспечивает режим реального времени (не менее 25 кадров в секунду) и позволяет получить непрерывное и гладкое движение виртуальных объектов.

На основе предложенных в работе методов были созданы программные модули, которые обеспечивают моделирование динамики связанных тел с пружинами поступательного и вращательного типа, в том числе и моделирование подпружиненных шарниров. Апробация предложенных методов и алгоритмов была проведена на моделях роботов с различными типами подвесок, содержащих рессоры с поступательной и вращательной силовой моделью пружины.

На Рис. 4 представлена виртуальная модель робота разведчика, в котором используются подвески осевого типа с пружинными рессорами. Результаты апробации показали, что разработанные в статье методы являются быстрыми и обеспечивают высокую визуальную реалистичность поведения роботов.

## Заключение

В работе была рассмотрена задача моделирования динамики многих тел при наличии пружин и подпружиненных соединений. Разработанный метод мягких ограничений для моде-

лирования пружин имеет преимущество по сравнению с другими существующими методами, так как не требует сложных вычислений для обеспечения абсолютной устойчивости моделирования пружин любых параметров. Применение метода последовательных импульсов для реализации мягких ограничений позволяет осуществлять расчет динамики в режиме реального времени. Апробация разработанных методов показала их применимость для моделирования пружин и подпружиненных элементов в системах виртуального окружения.

## Литература

1. Shabana Ahmed A. Computational Dynamics, Third edition, John Wiley & Sons Inc., 2010.
2. Featherstone Roy. Rigid Body Dynamics Algorithms. Springer-Verlag New York, Inc., Secaucus, NJ, USA, 2007.
3. Bender J., Erleben K., Trinkle J., Coumans E. Interactive Simulation of Rigid Body Dynamics in Computer Graphics // In EG 2012 – State of the Art Reports (Cagliari, Sardinia, Italy, 2012). – 2012. – pp. 95-134.
4. Михайлюк М.В., Страшнов Е.В. Моделирование системы связанных тел методом последовательных импульсов // Труды НИИСИ РАН. – 2014. – Т. 4 № 2. – С. 52-60.
5. Михайлюк М.В., Страшнов Е.В. Моделирование динамики системы связанных тел с учетом трения в шарнирах. // Наука и Образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. – 2016. – № 1. – С. 108-124.
6. Страшнов Е.В., Торгашев М.А. Моделирование динамики электроприводов виртуальных роботов в имитационно-тренажерных комплексах // Издательство “Новые технологии”, Мехатроника, автоматизация, управление. – 2016. – Т. 17 № 11. – С. 762-768.
7. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М.: Наука, 1989. – 432 с.
8. Anitescu A., Potra F.A. A time-stepping method for stiff multibody dynamics with contact and friction // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 2002. – pp. 753-784.
9. Catto E. Iterative Dynamics with Temporal Coherence // In Game Developer Conference. – 2005. – pp. 1-24.
10. Smith R. How to make new joints in ODE. 24.02.02. URL: <http://www.ode.org/joints.pdf> (дата обращения 31.01.2017).
11. Михайлюк М.В., Страшнов Е.В. Ограничения на параметры относительного движения для основных видов шарниров // Труды НИИСИ РАН. – 2015. Т. 5 № 1. – С. 130-133.

**Страшнов Евгений Владимирович.** Ведущий программист ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН. Окончил в МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2012 году. Количество печатных работ: 8. Область научных интересов: вычислительная динамика, системы виртуальной реальности, компьютерная графика. E-mail: strashnov\_evq@mail.ru



**Торгашев Михаил Александрович.** Заведующий сектором ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН. Окончил Самарский государственный аэрокосмический университет им. С. П. Королёва в 1997 году. Кандидат физико-математических наук. Количество печатных работ: 45. Область научных интересов: распределенные вычисления, компьютерная графика, распознавание образов, обработка сигналов, системы виртуального окружения. E-mail: mtorg@mail.ru

**Тимохин Петр Юрьевич.** Старший научный сотрудник ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН. Окончил МАТИ им. К.Э. Циолковского в 2008 году. Количество печатных работ: 30. Область научных интересов: системы визуализации, компьютерная графика. E-mail: webpismo@yahoo.com

## Simulation of springs with soft constraints method in virtual environment systems

E.V. Strashnov, M.A. Torgashev, P.Yu. Timokhin

**Abstract.** This paper considers a problem of multibody dynamics systems simulation, linked with springs of translational and rotational types. We propose approach in which an arbitrary type spring force model is described in the form of soft constraint relative to body velocities and impulse. This constraint is based on implicit Euler scheme for numerical integration of differential equations of bodies' motion. Multibody dynamics systems simulation is implemented in real-time using sequential impulses method which allows simulating springs with any values of their parameters. Approbation of proposed algorithms and methods was carried out in training complex dynamic subsystem, developed in SRISA RAS and showed their applicability in virtual environment systems.

**Keywords:** multibody system, stiff systems of differential equations, sequential impulses method, soft constraints, real time, training complex.

### References

1. Shabana Ahmed A. Computational Dynamics, Third edition, John Wiley & Sons Inc., 2010.
2. Featherstone Roy. Rigid Body Dynamics Algorithms. Springer-Verlag New York, Inc., Secaucus, NJ, USA, 2007.
3. Bender J., Erleben K., Trinkle J., Coumans E. Interactive Simulation of Rigid Body Dynamics in Computer Graphics // In EG 2012 – State of the Art Reports (Cagliari, Sardinia, Italy, 2012). – 2012. – pp. 95-134.
4. Mihajljuk M.V., Strashnov E.V. Simulation of Articulated Multibody System Using Sequential Impulses Method// SRISA RAS Proceedings. 2014; 4(2): 52-60.
5. Mihajljuk M.V., Strashnov E.V. Simulating Dynamics of the System of Articulated Rigid Bodies with Joint Friction//Science and Education: Scientific Publication of BMSTU. 2016; (1): 108-124. doi:10.7463/0116.0830582.
6. Strashnov E.V., Torgashev M.A. Simulation of the Actuator Dynamics of the Virtual Robots in the Training Complexes//Publishing "New Technologies", Mechatronics, Automation, Control. 2016; 17(11): 762-768. doi:10.17587/mau.17.762-768.
7. Samarskij A.A., Gulín A.V. Numerical Methods. Moscow: Science Publs. 432 p.
8. Anitescu A., Potra F.A. A time-stepping method for stiff multibody dynamics with contact and friction // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 2002. – pp. 753-784.
9. Catto E. Iterative Dynamics with Temporal Coherence // In Game Developer Conference. – 2005. – pp. 1-24.
10. Smith R. How to make new joints in ODE. 24.02.02. Available at: <http://www.ode.org/joints.pdf> (accessed January 31, 2017).
11. Mihajljuk M.V., Strashnov E.V. Restrictions on the Parameters of Relative Motion for Main Types of Joints//SRISA RAS Proceedings. 2015; 5(1): 130-133.

**E.V. Strashnov.** Lead Programmer at Scientific Research Institute of System Analysis (Russian Academy of Sciences). Number of publications: 8. Research interests: computational dynamics, virtual reality systems and computer graphics.

**M.A. Torgashev.** Head of Sector at Scientific Research Institute of System Analysis (Russian Academy of Sciences). Candidate of Physico-Mathematical Sciences. Number of publications: 45. Research interests: distributed computing, computer graphics, pattern recognition, signal processing, virtual environment systems.

**P.Yu. Timokhin.** Senior Research Officer at Scientific Research Institute of System Analysis (Russian Academy of Sciences). Number of publications: 30. Research interests: visualization systems, computer graphics.