

# Использование точек и прямых для вычисления проективного преобразования по двум изображениям плоского объекта<sup>1</sup>

Ю.А. Шемякина

**Аннотация.** В работе рассматривается задача оценки преобразования, связывающего два изображения одного плоского объекта. Предложен метод вычисления параметров проективного преобразования по комбинированному данным, состоящим из точек и прямых. Представлены результаты экспериментов на синтезированных данных, в которых исследовалась скорость сходимости алгоритма в зависимости от соотношения примитивов в исходном наборе данных. Экспериментально показано преимущество использования непосредственно прямых линий, а не точек их пересечения.

**Ключевые слова:** Ключевые слова: проективное преобразование, RANSAC.

## Введение

Во многих прикладных задачах компьютерного зрения требуется сопоставить два изображения одного плоского объекта (например, водительского удостоверения, паспорта и т.д.), снятого с разных ракурсов, и определить связывающее их преобразование. Изображения, полученные с камеры, как правило, зашумлены, что обуславливает дополнительную сложность решаемой задачи. Такая постановка может встречаться при составлении географических карт по фото- и видео-данным, при наведении документов, при построении дополненной реальности и т.д.

В большинстве случаев для решения этой задачи используются особые точки. Особая точка - это точка изображения, обладающая ха-

рактерной окрестностью, позволяющей выделить ее среди всех других точек изображения. Особые точки должны обладать повторяемостью (т.е. находиться в одном месте на объекте, несмотря на изменение ракурса, масштаба, освещения и т.д.), локальностью (характерные окрестности должны занимать малую часть изображения) и значимостью (т.е. иметь уникальное описание). Кроме того, их количество должно быть значительно меньше числа пикселей на изображении. Для работы с особыми точками, в частности для установления их соответствий, вычисляются дескрипторы – вектора признаков окрестностей точек. С примерами алгоритмов выделения и описания особых точек можно ознакомиться в [1-4]. Основную идею сопоставления изображений с использованием особых точек можно представить сле-

<sup>1</sup> Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов №15-29-06079 офи\_м, № 15-29-06086 офи\_м, № 16-07-00616 А.

дующим образом: между выделенными на сравниваемых изображениях точками с помощью их дескрипторов устанавливаются соответствия, и на основе полученной корреспонденции оценивается связывающее их преобразование. Заметим, что соответствия не всегда устанавливаются правильно. Характерные окрестности разных особых точек могут определять похожие дескрипторы, что приводит к установлению ложных соответствий точек (выбросов).

Существуют различные алгоритмы оценки параметров геометрического преобразования по избыточным данным. Самым известным является метод наименьших квадратов [4], однако этот метод может использоваться только при отсутствии в данных ложных соответствий. Существуют алгоритмы, устойчивые к определенной доле выбросов [6-9].

В 1981 году Фишлером и Боллесом была опубликована работа [10], описывающая алгоритм RANSAC (RANDOM SAMPLE CONSENSUS), основанный на случайных выборках и устойчивый к любой доле выбросов. Метод RANSAC является одним из самых часто используемых устойчивых методов оценки параметров преобразования по избыточным данным. Он включает в себя два основных этапа. Вначале проводится случайный выбор минимально необходимых поднаборов данных и построение по ним гипотез, т.е. вычисление параметров возможных проективных преобразований. Затем выбирается гипотеза, с которой согласуется наибольшее количество элементов из имеющегося набора данных. Использование для построения гипотезы минимального поднабора вместо всех данных позволяет устранить влияние выбросов на конечный результат. Существует много работ, улучшающих классическую схему, например [11, 12]. В рамках данной работы будет использоваться классический RANSAC, однако многие модифицирующие его алгоритмы также могут быть успешно применены для решения поставленной задачи.

В некоторых задачах использование соответствий особых точек может быть сопряжено с большими вычислительными затратами. Например, на изображениях документов особые точки часто детектируются на фрагментах

символов. Поскольку одинаковые символы могут встречаться в документе многократно, процент выбросов в соответствиях особых точек будет очень высок. Тогда для нахождения преобразования с достаточной вероятностью количество итераций алгоритма RANSAC также должно быть значительным. Кроме того, часто особые точки распределены на документе очень неравномерно, что приводит к искажениям в отдельных частях проекции документа.

В таких случаях в качестве локальных особенностей могут быть использованы прямые линии, а также комбинации точек и прямых. Так, на документах зачастую встречаются места заполнения бланка, таблицы, рамки и т.д., то есть набор прямых, имеющих фиксированную локализацию и взаимное расположение. Задача детектирования прямых и отрезков разработана достаточно подробно. В качестве примера можно привести преобразование Хафа [133] и его быструю версию [14], а также алгоритмы LSD (Line Segment Detector)[15] и ED-Lines (Edge Drawing Lines)[16].

Данная работа посвящена алгоритму оценки параметров проективного преобразования по точкам, прямым и их комбинациям. В статье приводится необходимая информация о проективном преобразовании в пространстве точек плоскости (раздел 1). Предложен вывод формул вычисления проективного преобразования по заданному множеству соответствий точек и прямых (раздел 2). В разделе 3 описан предлагаемый алгоритм вычисления проективного преобразования по комбинированным данным. Наконец, приведено описание экспериментов на синтезированных данных, исследующих зависимость вероятности получения правильной оценки преобразования предлагаемым алгоритмом от числа итераций (сходимость алгоритма), и дан анализ полученных результатов (раздел 4). Проведенные эксперименты показывают, что скорость сходимости слабо зависит от соотношения количества точек и прямых в исходных данных и от степени зашумления, если оно достаточно велико. Также в разделе 4 сравнивается вероятность получения правильного результата в случаях использования прямых или точек их пересечения.

## 1. Проективное преобразование и его свойства

Известно, что проективное преобразование плоскости наилучшим образом подходит для описания связи между кадрами (проекциями) одного объекта [17]. Рассмотрим способ задания и некоторые свойства этого преобразования.

Будем использовать однородные координаты [17], задающие объект с точностью до множителя. Точку на евклидовой плоскости  $(x, y)$  в однородных координатах можно представить как  $(x, y, 1)$ . Обратное, точка в однородных координатах  $(x, y, z)$  соответствует точке в декартовой системе координат  $(x/z, y/z)$ .

Проективное преобразование плоскости отображает прямые в прямые [17]. Оно линейно в однородных координатах и задается матрицей  $H_p$ :

$$p' = H_p p \text{ или } \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где  $p, p'$  – точки в однородных координатах,  $h_{ij}$  – параметры проективного преобразования.

Известно, что матрица проективного преобразования имеет восемь степеней свободы [17], так как определяется с точностью до множителя. Поскольку параметров проективного преобразования девять, для однозначного задания преобразования необходимо ввести нормировку, например  $h_{33} = 1$  или  $\|H_p\| = 1$ . невырожденное проективное преобразование может быть однозначно определено по двум упорядоченным четверкам точек общего вида (никакие три точки из четверки не коллинеарны) [19], которые называются проективным базисом.

Основополагающим свойством проективного преобразования является сохранение инцидентности точек и прямых [18]. Отсюда непосредственно следует, что пересечение двух прямых и прохождение прямой через пару точек являются инвариантами проективного преобразования.

## 2. Определение матрицы проективного преобразования по соответствиям примитивов (точек и прямых)

Поскольку в данной работе параметры проективного преобразования оцениваются по набору соответствий примитивов разной природы, необходимо определить формулы, позволяющие вычислять матрицу преобразования в случаях, когда данные содержат только соответствия точек, только соответствия прямых, а также в случае данных, содержащих комбинацию точек и прямых. Пусть  $n_p$  – количество соответствий точек, а  $n_L$  – количество соответствий прямых в исходных данных.

### 2.1. Определение по соответствиям точек

Как было показано выше, пары точек, удовлетворяющие проективному преобразованию, будут связаны соотношением (1). Уравнение задано в однородных координатах, и, следовательно, равенство подразумевает только одинаковое направление векторов  $p'$  и  $H_p p$ , их модули могут быть различны. Тогда составим систему из уравнений, эквивалентных (1):

$$p'_i \times H_p p_i = \mathbb{O}, i = 1..n_p, n_p \geq 4 \quad (2)$$

Раскрыв векторное произведение, получим систему уравнений, позволяющую определить параметры проективного преобразования по соответствиям точек:

$$\begin{pmatrix} \mathbb{O}^T & -z'_i p_i^T & y'_i p_i^T \\ z'_i p_i^T & \mathbb{O}^T & -x'_i p_i^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h^1 \\ h^2 \\ h^3 \end{pmatrix} = \mathbb{O}, i = 1..n_p, n_p \geq 4,$$

где  $h^j, j = 1, 2, 3$  –  $j$ -ая строка проективной матрицы  $H_p$ . Эта система уравнений линейна относительно параметров проективного преобразования.

Точность и быстродействие различных алгоритмов вычисления проективного преобразования в случаях четырех соответствий точек и их большего количества (случай переопределенной системы) исследованы в работе [20].

## 2.2. Определение по соответствиям прямых линий

Существуют задачи, где в качестве локальных особенностей изображения удобнее использовать прямые. В таком случае необходим новый метод вычисления проективного преобразования в пространстве точек по соответствиям прямых линий. Во-первых, в качестве исходных данных можно использовать точки пересечения прямых. Кроме того, используя принцип двойственности [8], можно определить проективный базис в пространстве прямых и связать полученное проективное преобразование с искомым преобразованием в пространстве точек. Теоретическое и экспериментальное сравнение двух этих подходов будет представлено в разделах 3 и 4.4, соответственно.

Зададим корреляцию [21], отображающую прямую  $ax + by + cz = 0$  в точку  $l = (a, b, c)$ . Исходя из линейности такого отображения, существование проективного преобразования  $H_p$  в пространстве точек влечет за собой существование и проективного преобразования  $H_L$  в двойственном пространстве, связывающего прямую  $l$  и ее образ  $l'$ :

$$l' = H_L l. \quad (3)$$

Поскольку корреляция линейна, коллинеарные точки будут соответствовать прямым, пересекающимся в одной точке [21]. Следовательно, для того, чтобы в двойственном пространстве был определен проективный базис, четверки прямых должны быть такими, чтобы никакие три из них не имели общую точку.

Рассмотрим, каким образом связаны матрицы проективных преобразований в исходном и двойственном пространствах. Пусть точка  $p$  принадлежит прямой  $l$ :

$$l^T p = 0.$$

Поскольку при проективном преобразовании отношение инцидентности прямых и точек сохраняется, образ точки  $p'$  будет принадлежать образу прямой  $l'$ :

$$l'^T p' = 0.$$

Учитывая равенства (1) и (2), получим:

$$(H_L l)^T (H_p p) = 0, \text{ или} \\ l'^T (H_L^T H_p) p = 0. \quad (4)$$

Пусть теперь точка  $p$  является точкой пересечения двух прямых  $l_1$  и  $l_2$ . Тогда образ точки  $p'$  будет принадлежать образам прямых  $l'_1$  и  $l'_2$ . Используя равенство (4), получим:

$$\begin{cases} l_1^T (H_L^T H_p) p = 0 \\ l_2^T (H_L^T H_p) p = 0 \end{cases}$$

То есть точка  $(H_L^T H_p) p$  также является точкой пересечения прямых  $l_1$  и  $l_2$ . Это возможно только в том случае, если  $H_L^T H_p = E$ . Таким образом, матрицы проективных преобразования в двойственных пространствах связаны следующим образом:

$$H_p = (H_L^{-1})^T.$$

Используя этот результат, представим уравнение (3) в виде, позволяющем определить параметры проективного преобразования в исходном пространстве точек:

$$l^T = l'^T H_p.$$

Отсюда получим эквивалентную систему уравнений:

$$l_i^T \times l_i'^T H_p = 0, i = 1..n_L, n_L \geq 4 \quad (5)$$

Раскрыв векторное произведение, как и в предыдущем подразделе, получим линейную систему уравнений, позволяющую определить параметры проективного преобразования в пространстве точек по соответствиям прямым.

## 2.3. Определение по комбинированным данным

Рассмотрим случай, когда проективное преобразование задается четверкой, содержащей и соответствия точек, и соответствия прямых. Существует три возможных варианта: наличие одной, двух или трех прямых в четверке.

Случаи одной и трех прямых двойственны и могут быть сведены к случаям четырех прямых или четырех точек. Отсюда несложно получить ограничения, необходимые для задания проективного базиса. Две соответствующие четверки, включающие три точки и прямую, имеют общий вид, если в каждой из четверок три точки не коллинеарны и прямая не инцидентна ни одной из

этих трех точек. По принципу двойственности, в случае трех прямых и одной точки, для задания проективного преобразования три прямые в каждой четверке не должны иметь общую точку, а точка каждой четверки не должна быть инцидента ни одной из прямых.

Перейдем теперь к случаю четверок, содержащих две точки и две прямые. Попробуем свести его к уже разобранным случаям, проведя через каждую пару точек прямую и рассматривая точки пересечения каждых двух прямых. Тогда из исходного набора получим набор из пяти точек и пяти прямых.

Из Рис. 1 видно, что из этого набора нельзя выбрать четверку точек или прямых общего вида. Следовательно, однозначно задать проективное преобразование по соответствиям двух точек и двух прямых невозможно.

Для вычисления параметров проективного преобразования по комбинированным данным в общем случае необходимо составить систему из уравнений, использующихся в (2) и (5). Количество уравнений каждого типа в системе будет равно количеству соответствий точек или прямых линий.

$$\begin{cases} p'_i \times H_p p_i = 0 \\ l'_j \times l_j^T H_p = 0 \end{cases}, i = 1..n_p, j = 1..n_l \quad (6)$$

Эта формула позволяет вычислить параметры искомого преобразования по набору соответствий точек и прямых в тех случаях, когда это возможно. Таким образом, рассмотрены все варианты сочетаний точек и прямых в базисе, и продемонстрировано, что каждая комбинация, кроме двух точек и двух прямых, позволяет найти необходимое преобразование.

### 3. Алгоритм оценки параметров проективного преобразования по наборам, состоящим из комбинированных данных

В этом разделе опишем применение упомянутого выше алгоритма RANSAC для решения задачи оценки параметров проективного преобразования, связывающего два набора примитивов, по избыточным данным.

Пусть исходный набор соответствий состоит из  $n$  пар примитивов: прообразов  $e_i$  и их обра-

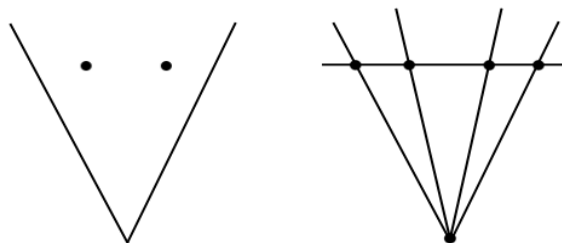


Рис. 1. Невозможность выбора проективного базиса в случае двух точек и двух прямых

зов  $e'_i, i = 1..n$ . Внешними параметрами алгоритма являются  $N$  – количество итераций и  $T$  – максимальное расстояние между образом  $e'_i$  и результатом  $He_i$  применения преобразования  $H$  к прообразу  $e_i$ , при котором  $i$ -ое соответствие считается правильным.

Алгоритм:

1. Повторять  $N$  итераций ( $k$  – номер текущей итерации):

- выбрать случайным образом проективный базис: четверку соответствий примитивов (точек или прямых) из исходных данных с индексами  $s_k = \{i_1, i_2, i_3, i_4\}$ , избегая случая двух точек и двух прямых;
- на основе полученного проективного базиса  $s_k$  вычислить параметры проективного преобразования – гипотезу  $H_k$ , используя формулу (6);
- оценить  $R_k$ , количество соответствий из исходных данных, удовлетворяющих гипотезе  $H_k$  с заданной точностью  $T$ .

2. Выбрать гипотезу с наибольшим значением  $R_k, k = 1..N$ , то есть с наибольшим количеством соответствий, удовлетворяющих ей.

3. Вычислить параметры результирующего преобразования на основе всех соответствий примитивов, согласованных с ней (например, с помощью метода наименьших квадратов).

Здесь становится понятным преимущество использования прямых, а не точек их пересечения, для определения проективного преобразования. Кроме того, что в случае использования точек пересечения увеличивается количество данных, увеличивается также процент выбросов, а значит, и необходимое количество итера-

ций. Действительно, пусть  $n$  – общее количество прямых,  $n_o$  – количество выбросов. Тогда процент выбросов в наборе прямых будет равен  $\frac{n_o}{n}$ , а в наборе пересечений  $\frac{n_o(2n-n_o-1)}{n(n-1)}$ .

#### 4. Исследование скорости сходимости алгоритма на основе экспериментальных данных

Для проверки предлагаемого алгоритма, а также для его сравнения с версией, использующей точки пересечения прямых, была проведена серия экспериментов. В них рассматривалась зависимость вероятности получения правильной оценки преобразования от количества проводимых итераций. Теоретическое значение этой вероятности может быть получено по формуле [10]:

$$Pr = 1 - (1 - w^4)^N, \quad (7)$$

где  $Pr$  – вероятность выбора 4 элементов, не являющихся выбросами, по крайней мере на одной из проведенных итераций;  $w$  – вероятность выбора из исходных данных элемента, удовлетворяющего преобразованию;  $N$  – количество проводимых итераций.

Рассмотрим получение экспериментальной оценки скорости сходимости алгоритма. Каждый эксперимент имеет ряд фиксируемых параметров, характеризующих исходные данные и работу алгоритма RANSAC:

- 1) соотношение количества соответствий точек и прямых в исходных данных  $\frac{n_P}{n_L}$ ;
- 2) стандартное отклонение шума, накладываемого на точки  $\sigma_P$ ;
- 3) стандартное отклонение шума, накладываемого на прямые линии  $\sigma_L$ ;
- 4) доля выбросов в исходных данных  $w_o$ ;
- 5) количество итераций алгоритма RANSAC  $N$ ;
- 6) параметр, определяющий согласованность соответствия и преобразования  $T$ .

Кроме того, для проведения всех экспериментов вручную задается одно исходное проективное преобразование  $H_o$ :

$$H_o = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 100 \\ 0 & 2 & -200 \\ 0.1 & 0.1 & 1 \end{pmatrix}.$$

В рамках эксперимента алгоритм запускается 10000 раз, причем каждый раз генерируются новые данные. При этом подсчитывается доля запусков, при которых были правильно оценены параметры заданного проективного преобразования.

Для определения правильности полученного преобразования  $H_e$  на изображении-образе строится регулярная сетка с шагом в 100 пикселей. Точки сетки проецируются на изображение-образ с помощью двух преобразований:  $H_o^{-1}$  и  $H_e^{-1}$ . Если две полученные проекции каждой точки сетки располагаются друг от друга не далее, чем на расстоянии  $5T$ , то преобразование  $H_e$  считается правильным.

При проведении экспериментов необходимо использовать примитивы и их соответствия, удовлетворяющие заранее заданным параметрам, таким как доля выбросов в исходных данных, стандартное отклонение накладываемого на примитивы шума и т.д. Обеспечение этого требования при использовании особых точек, выделенных на реальных изображениях, достаточно трудоемко. Поэтому для экспериментов используются искусственно синтезированные данные. В следующем разделе опишем схему их формирования.

##### 4.1. Синтез экспериментальных исходных данных

Экспериментальные данные включают в себя 100 случайных точек и прямых. Точки равномерно распределены в области  $[0,1000] \times [0,1000]$ . Также в этой области генерируются пары равномерно распределенных точек, задающих прямые. Таким образом, пересечение всех полученных прямых с этой областью не пусто.

На полученные примитивы накладывается нормально распределенный шум, после чего применением проективного преобразования  $H_o$  вычисляются образы этих примитивов. Для моделирования выбросов заданная доля полу-

ченных образов подменяется на случайные элементы.

Подробнее опишем способ наложения шума на прямые линии. Как было указано выше, прямая может быть представлена как трехмерная точка в однородных координатах. Координаты прямой нормализуются. Затем на каждую из координат накладывается нормально распределенный шум, причем дисперсии распределений для разных координат могут не совпадать.

Для сравнения результатов дальнейших экспериментов необходимо, чтобы среднеквадратичные отклонения шумов точек и прямых были сравнимы. Получим формулу, связывающую их. Рассмотрим прямую  $l$ , проходящую через начало координат  $p_0 = (0, 0)$ , и наиболее удаленную от него точку  $p_1 = (w, h)$ , где  $w$  и  $h$  – ширина и высота изображения. На эти точки наложим шум с амплитудой  $d$ :

$$\bar{p}_i = p_i + d \begin{pmatrix} \cos(t_i) \\ \sin(t_i) \end{pmatrix},$$

$i = \{0, 1\}$ ,  $t_i$  – равномерно распределена на промежутке  $[0, 2\pi)$ .

Далее через полученные зашумленные точки  $\bar{p}_0$  и  $\bar{p}_1$  проведем зашумленную прямую  $\bar{l}$  и вычислим разность между прямыми  $l$  и  $\bar{l}$ :

$$\begin{aligned} d_1 &= l - \bar{l} \approx \\ &\approx \frac{d}{\sqrt{h^2 + w^2}} \begin{pmatrix} \sin(t_2) - \sin(t_1) \\ \cos(t_1) - \cos(t_2) \\ w \sin(t_1) - h \cos(t_1) + d \sin(t_1 - t_2) \end{pmatrix} \approx \\ &\approx \frac{d\sqrt{2}}{\sqrt{h^2 + w^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{w+h}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что при наложении шума на прямую описанным выше образом координаты прямой изменяются не одинаково. Соотношение координатного шума прямых линий можно считать равным  $1:1:(w+h)/2$ . Тогда примем те же соотношения и для среднеквадратичных отклонений нормально распределенных шумов,

накладываемых на координаты прямой. Кроме того, полученную формулу будем использовать для связи среднеквадратичного отклонения шума точек  $\sigma_p$  и шума прямых  $\sigma_L$ . Это позволит генерировать точки и прямые с «одинаковым» шумом (среднеквадратичные отклонения таких шумов связаны полученной формулой) и сравнивать скорость сходимости алгоритма при различном соотношении количества точек и линий.

После того, как определен метод формирования исходных данных, перейдем к рассмотрению результатов проведенных экспериментов.

#### 4.2. Сравнение теоретических оценок параметров метода RANSAC с экспериментальными результатами

Как было показано в пункте 4, метод RANSAC имеет два внешних параметра: количество итераций  $N$  и порог  $T$ , который определяет, удовлетворяет ли соответствие примитивов гипотезе. Существуют теоретически обоснованные формулы выбора этих параметров. Количество необходимых итераций может быть вычислено по формуле, полученной из (7):

$$N = \frac{\log(1 - \text{Pr})}{\log(1 - w^4)}.$$

Для определения значения порога  $T$  введем параметр  $\alpha$  – вероятность того, что зашумленная точка будет лежать в окрестности исходной точки радиуса  $T$ . Если координатный шум имеет нормальное распределение с дисперсией  $\sigma$ , то квадрат расстояния между идеальной и зашумленной точками будет подчиняться распределению  $\chi^2$  с двумя степенями свободы [17]. Тогда значение порога  $T$ , при котором будет достигаться вероятность  $\alpha$ , вычисляется по формуле  $T = \sqrt{F_2^{-1}(\alpha)\sigma^2}$ , где  $F_2^{-1}(\alpha)$  – обратная функция распределения  $\chi^2$ . Так, например, при  $\sigma = 1$  и  $\alpha = 0.99999$  рассматриваемый параметр принимает значение  $T = 4.7985$ . Если же принять  $\alpha = 0.95$ , то значение порога изменяется на  $T = 2.4477$ .

При проведении экспериментов необходимо сравнить теоретическую оценку скорости сходимости с реальными результатами, получен-

ными по соответствиям точек, то есть на данных, которые обычно используются для решения поставленной задачи. Кроме того, необходимо проанализировать скорость сходимости при различных параметрах проведения эксперимента и выделить те из них, которые можно зафиксировать в дальнейшем.

Рассмотрим первый из проведенных экспериментов. В нем использовались данные, состоящие только из соответствий точек. Будем сравнивать теоретическую оценку вероятности получения правильной оценки преобразования с эмпирическими вероятностями, полученными по незашумленным данным и данным, на которые накладывается шум со стандартным отклонением, варьирующимся от 1 до 5. Эксперимент проводился для различных долей выбросов в данных. Поскольку соотношение полученных вероятностей не сильно изменяется в зависимости от этого параметра, здесь и далее будем приводить результаты экспериментов для доли выбросов, равной 0,6 (Рис. 2).

Первым важным результатом является то, что экспериментально полученная скорость сходимости алгоритма ниже предсказанной. Заметим, что при использовании незашумленных данных незначительное снижение скорости сходимости может быть объяснено неточ-

ностью вычислений. Так, на некоторых итерациях будут выбраны четверки соответствий, не являющихся ложными. Гипотезы, построенные на таких четверках, должны давать «правильную» оценку преобразования. Однако 3 точки на одном из изображений могут лежать почти на одной прямой, что делает матрицу решаемой системы уравнений плохо обусловленной. Это, в свою очередь, приводит к значительному искажению получаемой гипотезы.

В случае, когда эксперимент проводится на зашумленных данных, эмпирическая скорость сходимости заметно ниже теоретически предсказанной. Кроме описанной выше причины, это можно объяснить тем, что четверки соответствий, не являющихся ложными, могут быть сильно зашумлены. Тогда вычисленная гипотеза будет заметно отличаться от преобразования  $H_0$ . Значение  $R_k$  для этой гипотезы будет значительно меньше, чем количество верных сопоставлений в исходных данных.

На Рис. 2 видно, что при различных, не равных нулю, среднеквадратичных отклонениях накладываемого шума скорость сходимости алгоритма практически не меняется, поэтому в последующих экспериментах используется среднеквадратичное отклонение, равное единице.

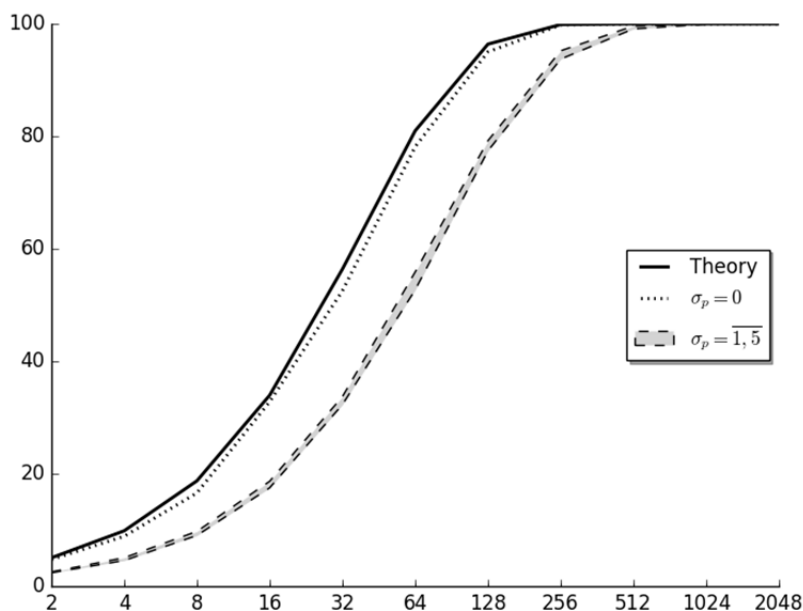


Рис. 2. Скорость сходимости алгоритма при использовании соответствий точек с различными стандартными отклонениями шума



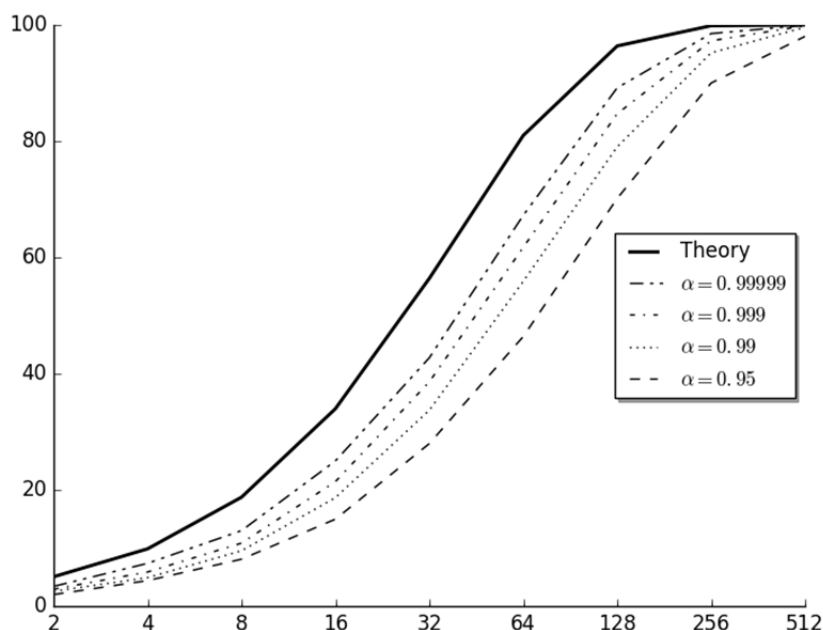


Рис. 3. Скорость сходимости алгоритма при использовании соответствий точек при различных значениях порога  $T$ , определяемого значением вероятности  $\alpha$

Далее исследуем зависимость скорости сходимости алгоритма от параметра  $\alpha$ , определяющего порог  $T$  согласованности примитива и преобразования (Рис. 3). В качестве исходных данных используем соответствие точек, на которые наложен нормально распределенный шум со стандартным отклонением, равным 1. Доля выбросов в данных равна 60%. Параметр  $\alpha$  в данном эксперименте принимает значения 0.95, 0.99, 0.999 и 0.99999.

На Рис. 3 можно видеть, что увеличение значения параметра  $\alpha$ , а значит и увеличение порога  $T$ , приводит к повышению вероятности получения правильной оценки. Заметим, что результат сохраняется при различных долях выбросов и среднеквадратичных отклонениях шума. Однако в реальных данных выбросы могут быть распределены неравномерно. Тогда при достаточно больших значениях порога  $T$  некоторые из них ошибочно могут быть приняты за правильные соответствия. Поэтому для дальнейших экспериментов будем использовать значение параметра  $\alpha$ , равное 0.999.

Определив условия проведения экспериментов, перейдем к обсуждению вероятностей получения правильной оценки преобразования на

данных, состоящих из соответствий точек и прямых.

#### 4.3. Оценка работы алгоритма по точкам, прямым и их комбинациям

В данном разделе сравним эффективность классического подхода, использующего в качестве исходных данных соответствия точек, с описанным в статье подходом, в рамках которого проективное преобразование оценивается на основе наборов, состоящих из соответствий прямых или из комбинированных данных. В эксперименте рассмотрим комбинации соответствий точек и прямых в следующих соотношениях: 100% прямых; точек 25%, прямых 75%; точек 50%, прямых 50%; точек 75%, прямых 25% и 100% точек. Будем использовать два набора данных: незашумленный и с наложенным шумом со стандартным отклонением, равным 1. Результаты эксперимента приведены на Рис. 4.

В рамках данного эксперимента сохраняется выявленная ранее тенденция: вероятность получения правильной оценки преобразования на зашумленных данных значительно ниже предсказанной теоретически.

Важно отметить, что эта вероятность мало зависит от соотношения примитивов в

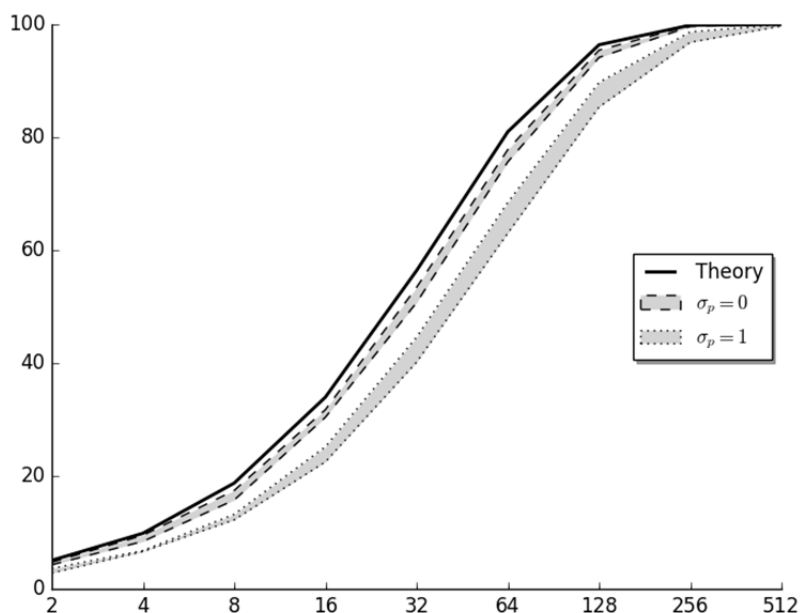


Рис. 4. Скорость сходимости при использовании соответствий точек и прямых

исходных данных. Таким образом, без существенных потерь в качестве можно использовать не только стандартные соответствия точек, но и добавлять в исходные данные произвольное количество соответствий прямым.

В заключение сравним экспериментально различные подходы к использованию прямых для получения оценки проективного преобразования.

#### 4.4. Сравнение работы алгоритма на прямых и на точках их пересечений

При оценке параметров проективного преобразования по соответствиям прямых в качестве исходных данных могут быть использованы как сами прямые, так и точки их пересечения. В разделе 3 приводится теоретическое обоснование того факта, что вероятность получения правильной оценки преобразования при равном количестве итераций в первом случае выше. Проверим данное утверждение эмпирически.

При проведении эксперимента используются наборы из 100 соответствий прямых, как незашумленных, так и с наложенным на них шумом со стандартным отклонением 1. Приведем результаты для сопоставлений прямых, содержащих 30% и 60% выбросов.

Из графиков (Рис. 5 и Рис. 6) видно, что теоретическая оценка верна. Скорость сходимости при использовании прямых значительно выше. Кроме того, стоит отметить, что такая тенденция сохраняется при наличии и при отсутствии наложенного на прямые шума.

## Заключение

В работе предложен алгоритм оценки параметров геометрического преобразования, предполагающий использование прямых и их комбинации с особыми точками. Результаты экспериментов показывают, что он применим на практике без снижения средней скорости сходимости в сравнении с классическим алгоритмом, где исходными данными являются только соответствия точек.

Эксперименты также подтверждают предположение, что использование точек пересечения прямых для оценки параметров проективного преобразования значительно ухудшает сходимость алгоритма. То есть рассматриваемый в статье подход более эффективен, чем наивный подход, основанный на пересечениях прямых.

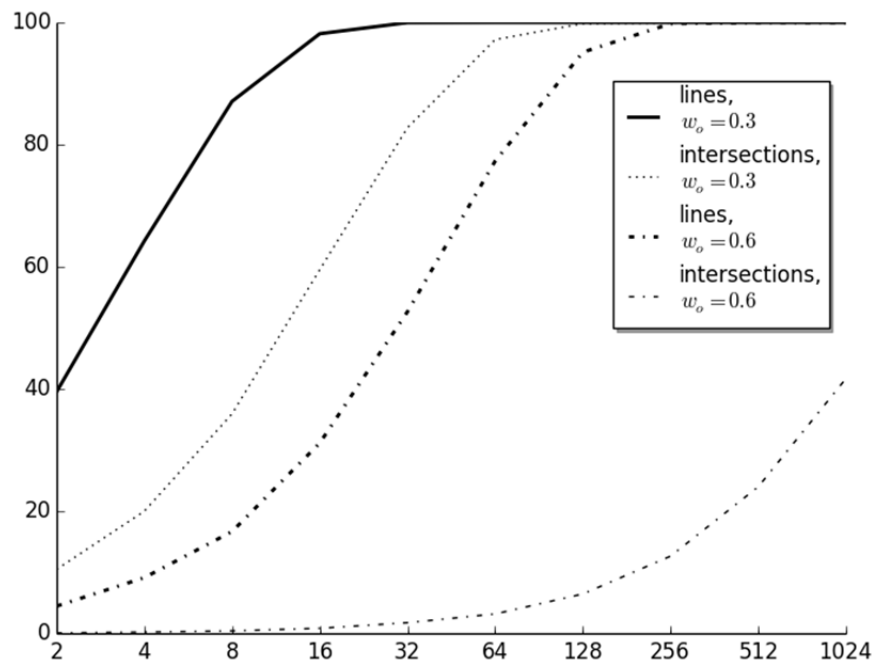


Рис. 5. Скорость сходимости алгоритма при использовании соответствий прямых и точек их пересечения, прямые не зашумлены

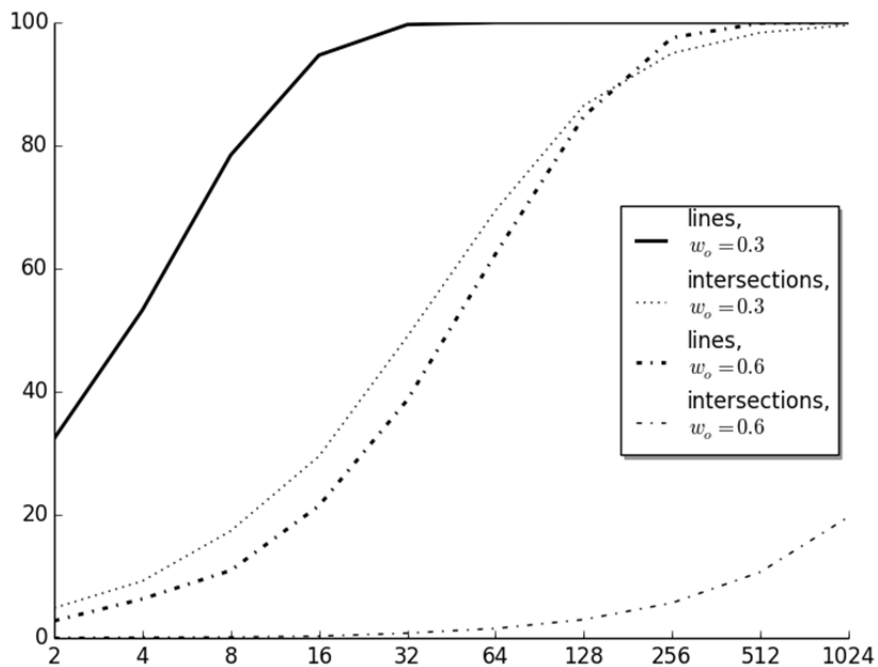


Рис. 6. Скорость сходимости алгоритма при использовании соответствий прямых и точек их пересечения; на прямые наложен шум со стандартным отклонением равным 1

В ходе экспериментов было отмечено, что на синтетических данных скорость сходимости алгоритма RANSAC в случае оценки проективного преобразования ниже теоретической оценки, приведенной авторами алгоритма в статье [10].

Автор выражает благодарность Д. Николаеву, И. Фараджеву и А. Жуковскому за помощь в работе.

## Литература

1. Lowe D. G. Distinctive Image Features from Scale-Invariant Keypoints // *International Journal of Computer Vision archive*, 2004. Vol. 60, Issue 2, pp. 91-110.
2. Bay H., Ess A., Tuytelaars T., Gool L. V. Speeded-Up Robust Features (SURF) // *Computer Vision and Image Understanding archive*, 2008. Vol. 110, Issue 3, pp. 346-359.
3. Lepetit, V., Fua, P. Keypoint recognition using randomized trees // *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2006. 28, pp. 1465-1479.
4. Fan B., Kong Q., Trzcinski T. Receptive Fields Selection for Binary Feature Description // *IEEE Transaction on Image Processing*, 2014. 23(6), pp. 2583-2595.
5. Стренг Г. Линейная алгебра и ее применения. // М.: Мир, 1980. 454 с.
6. Theil H. A rank-invariant method of linear and polynomial regression analysis // *Proceedings of the Royal Netherlands Academy of Sciences*, 1950. 53, pp. 386-392, 521-525, 1397-1412.
7. Sen P. K., Kumar P. Estimates of the regression coefficient based on Kendall's tau, *Journal of the American Statistical Association*, 1968. 63, pp. 1379-1389.
8. Siegel A. F. Robust Regression Using Repeated Medians // *Biometrika*, 1982. Vol. 69, No. 1 pp. 242-244.
9. Rousseeuw P. J. Least median of squares regression // *Journal of the American Statistical Association*, 1984. Vol. 79, No. 388, pp. 871-880.
10. Fischler M. A., Bolles R. C. Random Sample Consensus: A Paradigm for Model Fitting with Applications to Image Analysis and Automated Cartography // *Comm. Of the ACM*, 1981. Vol. 24, pp. 381-395.
11. Chum O., Matas J. Matching with PROSAC - progressive sample consensus // *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 2005. pp. 220-226.
12. Torr P.H.S., Zisserman A. A MLESAC: A New Robust Estimator with Application to Estimating Image Geometry // *Computer Vision and Image Understanding*, 2000. Vol. 78, pp. 138-156
13. Hough P.V.C. Machine Analysis of Bubble Chamber Pictures // *Proceeding of International Conference on High Energy Accelerators and Instrumentation*, 1959. pp. 554-558.
14. Nikolaev D.P., Karpenko S.M., Nikolaev I.P., Nikolayev P.P. Hough transform: underestimated tool in the computer vision field // *Proceedings of the 22th European Conference on Modelling and Simulation*, 2008. pp. 238-246.
15. Grompone von Gioi R., Jakubowicz J., Morel J.M., Randall G. LSD: a fast line segment detector with a false detection control // *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2010. 32 (4), pp. 722-732.
16. Akinlar C., Topal C. EDLines: A real-time line segment detector with a false detection control // *Pattern Recognition Letters*, 2011. 32(13), pp. 1633-1642.
17. Hartley R., Zisserman A. *Multiple View Geometry in Computer Vision* // New York: Cambridge University Press, 2004. 655 pp.
18. Певзнер С.Л. Проективная геометрия // М: "Просвещение", 1980. 128 с.
19. Понарин Я. П. Аффинная и проективная геометрия // МЦНМО, 2009. 288 с.
20. Шемякина Ю.А., Жуковский А.Е., Фараджев И.А. Исследование алгоритмов вычисления проективного преобразования в задаче наведения на планарный объект по особым точкам // *Искусственный интеллект и принятие решений*, 2017. 1, с. 43-49.
21. Bhattacharya P., Rosenfeld A., Weiss I. Point-to-line mappings as Hough transforms // *Pattern Recognition Letters*, 2002. Vol. 23, pp. 1705-1710.

**Шемякина Юлия Александровна.** Аспирантка ИСА ФИЦ ИУ РАН. Окончила СПбГУ в 2013 году, МФТИ в 2015 году. Количество печатных работ: 2. Область научных интересов: проективная геометрия, распознавание образов. E-mail: jshemiakina@gmail.com.

## The Usage of Points and Lines for the Calculation of Projective Transformation by Two Images of One Plane Object

Julia Shemiakina

**Abstract.** The paper considers the problem of estimating a transformation connecting two images of one plane object. The method is proposed for calculating the parameters of projective transformation by data consisting of points and lines. The results of the experiments on synthetic data are presented, in which the rate of the algorithm convergence was studied depending on the ratio of primitives in the original dataset. Also the advantage of using directly straight lines, rather than points of their intersection is experimentally shown.

**Keywords:** projective transformation, RANSAC.

## References

1. Lowe D. G. Distinctive Image Features from Scale-Invariant Keypoints // International Journal of Computer Vision archive, 2004. Vol. 60, Issue 2, pp. 91-110.
2. Bay H., Ess A., Tuytelaars T., Gool L. V. Speeded-Up Robust Features (SURF) // Computer Vision and Image Understanding archive, 2008. Vol. 110, Issue 3, pp. 346-359.
3. Lepetit, V., Fua, P. Keypoint recognition using randomized trees // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2006. 28, pp. 1465-1479
4. Fan B., Kong Q., Trzcinski T. Receptive Fields Selection for Binary Feature Description // IEEE Transaction on Image Processing, 2014. 23(6), pp. 2583-2595.
5. Strang G. Lineynaya algebra i ee primeneniya // M.: Mir, 1980. 454 p.
6. Theil H. A rank-invariant method of linear and polynomial regression analysis // Proceedings of the Royal Netherlands Academy of Sciences, 1950. 53, pp. 386–392, 521–525, 1397–1412.
7. Sen P. K., Kumar P. Estimates of the regression coefficient based on Kendall's tau, Journal of the American Statistical Association, 1968. 63, pp. 1379–1389.
8. Siegel A. F. Robust Regression Using Repeated Medians // Biometrika, 1982. Vol. 69, No. 1 pp. 242-244.
9. Rousseeuw P. J. Least median of squares regression // Journal of the American Statistical Association, 1984. Vol. 79, No. 388, pp. 871–880.
10. Fischler M. A., Bolles R. C. Random Sample Consensus: A Paradigm for Model Fitting with Applications to Image Analysis and Automated Cartography // Comm. Of the ACM, 1981. Vol. 24, pp. 381–395.
11. Chum O., Matas J. Matching with PROSAC - progressive sample consensus // IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, 2005. pp. 220-226
12. Torr P.H.S., Zisserman A. A MLESAC: A New Robust Estimator with Application to Estimating Image Geometry // Computer Vision and Image Understanding, 2000. Vol. 78, pp. 138--156
13. Hough P.V.C. Machine Analysis of Bubble Chamber Pictures // Proceeding of International Conference on High Energy Accelerators and Instrumentation, 1959. pp. 554-558
14. Nikolaev D.P., Karpenko S.M., Nikolaev I.P., Nikolayev P.P. Hough transform: underestimated tool in the computer vision field // Proceedings of the 22th European Conference on Modelling and Simulation, 2008. pp. 238-246
15. Grompone von Gioi R., Jakubowicz J., Morel J.M., Randall G. LSD: a fast line segment detector with a false detection control // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2010. 32 (4), pp. 722–732
16. Akinlar C., Topal C. EDLines: A real-time line segment detector with a false detection control // Pattern Recognition Letters, 2011. 32(13), pp. 1633-1642
17. Hartley R., Zisserman A. Multiple View Geometry in Computer Vision // New York: Cambridge University Press, 2004. 655 pp.
18. Pevzner S. Proektivnaya geometriya // M: "Prosveshchenie", 1980. 128 p.
19. Ponarin Y. Affinnaya i proektivnaya geometriya // MCNMO, 2009. 288 p.
20. Shemiakina J., Zhukovsky A., Faradjev I. Issledovanie algoritmov vychisleniya proektivnogo preobrazovaniya v zadache navedeniya na planarnyy obekt po osobym tochkam // Iskusstvennyy intellekt i prinyatie resheniy, 2017. 1, pp. 43-49
21. Bhattacharya P., Rosenfeld A., Weiss I. Point-to-line mappings as Hough transforms // Pattern Recognition Letters, 2002. Vol. 23, pp. 1705-1710.

**Julia Shemiakina** is a PhD. candidate ISA FRC CSC RAS. He is the author of 2 papers. Her research interests include projective geometry and pattern recognition. E-mail: [jshemiakina@gmail.com](mailto:jshemiakina@gmail.com)