

Об одном применении методики КАБАРЕ для задачи микромасштабной атмосферы¹

В. Г. Кондаков

Аннотация. В работе предложена модель слабо сжимаемой среды в трехмерной области для решения задач течений в условиях городской застройки. На основе методики КАБАРЕ построена консервативная конечно-разностная схема уравнений Навье-Стокса с уравнением состояния слабо сжимаемой среды в изотермическом приближении. Проведена верификация численной схемы на тестовом примере A1-1 из базы тестов проекта CEDVAL Метеорологического Института Университета Гамбурга. Получены статистические данные сравнения по осредненным по скорости в контрольных сечениях с экспериментальными данными.

Ключевые слова: методика КАБАРЕ, слабо сжимаемая среда, модель микромасштабной атмосферы.

Введение

Расчет поля скорости и концентраций пассивных примесей в условиях городской застройки является довольно нетривиальной задачей с точки зрения ее реализации, поскольку для этого нужно решить уравнение Навье-Стокса и уравнение переноса в обширной расчетной области. Размеры микромасштабных метеорологических моделей начинаются от 100 м до 1 км в горизонтальной плоскости от 50 м до 100 м в вертикальном направлении. При шаге сетки 1 м количество ячеек будет варьироваться от 10^5 до 10^8 ячеек. Следовательно, для эффективного решения нужны либо методы с грубыми ячейками (RANS подход), либо методы с возможностью распараллеливания на распределенной памяти (LES, DNS) и сеточным разрешением возле поверхностей элементов застройки.

Для решения тестовых задач вполне подойдут RANS подходы двухпараметрической мо-

дели турбулентности для несжимаемой среды, как например, в работе [1] (программный комплекс TEMPEST). Но для решения валидационных задач, где требуется рассчитывать целый район города, например как в работе [2] не обойтись без распараллеленных кодов на основе LES-подхода (программный комплекс FEM3MP). Вполне логично использовать приближение слабой сжимаемости, для того чтобы схема оставалась явной и, соответственно, допускала распараллеливание путем декомпозиции по подобластям и организации сообщений между процессами для синхронизации. Остается открытым вопрос, насколько качественными при этом будут результаты по сравнению с подходами других авторов в этой тематике. В конце статьи будут приведены численные характеристики, отвечающие на данный вопрос.

Фундаментальная проблема, на которую нацелено решение этой задачи, - расчет распространения примесей в условиях сложной городской

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ грант № 16-31-00250 мол_а

застройки, где важны краткосрочные прогнозы распределения концентрации загрязняющих веществ. Поэтому здесь немаловажным является моделирование развития и эволюции сложного течения между объектами городской застройки. При рассмотрении задач микромасштабной атмосферы при заданной грубой сетке (минимальный линейный размер ≥ 1 м) нужно разрешить зоны рециркуляции возле зданий и построек. На одном и том же полигоне в зависимости от направления набегающего потока воздуха и характера течения может возникнуть огромное количество возможных ситуаций, которое сложно поддается классификации и учету. Следовательно, остается актуальной задача расчета средних полей скоростей в произвольно меняющихся граничных и начальных условиях. При этом важно, чтобы предложенная методика была универсальной и допускала хотя бы минимальное статистическое сравнение с экспериментальными данными.

Понятно, что совпадение с экспериментом не может достигнуть больших показателей ввиду недостатка информации о точном расположении объектов и метеорологических данных в заданной местности. Поэтому для верификации подобных моделей в мировой практике создают базы данных экспериментов проведенных в аэродинамических турбинах с масштабированным макетом исследуемого полигона. Одним из таких проектов является проект CEDVAL Метеорологического Института Университета Гамбурга [3].

Выбор модели состояния среды (слабо сжимаемой) был обусловлен тем, что при характерных скоростях течения ($U_{\max} \sim 5$ м/с на высоте 100 м) при нейтральной стратификации пульсации плотности в среде будут меньше 1% ($\frac{\delta\rho}{\rho_0} \sim M^2 < 0.01$) при выборе параметра

скорости звука ($c > 10U_{\max} \sim 50$ м/с). Таким образом, мы остаемся в допустимых рамках предположения о несжимаемости атмосферы.

Для модели слабой сжимаемости была выведена т.н. характеристическая форма уравнений движения и неразрывности, где получены инварианты Римана в трех пространственных направлениях. Монотонность схемы второго порядка достигается прямым применением принципа максимума в отношении инвариантов Римана в нелинейной коррекции потоков. Порядок схемы падает до первого при наличии в расчетной области ударных волн или волн разряжения. Но в нашем приближении предполагается, что решение выходит на квазистационарный режим.

Внутренние границы зданий и элементов городской застройки задаются на вход программы в виде STL-файла (стереолитографический формат поверхности). Далее расчетный блок делает маркировку области, приближая застройку фиктивными ячейками. На неравномерной структурированной ортогональной сетке производится сквозной счет, где в «воздушных» ячейках решаются уравнения Навье-Стокса по схеме КАБАРЕ [4-8], а в «твердых» ячейках параметры среды остаются равными фоновым значениям. На гранях между «воздушными» ячейками производится расчет потоковых переменных процедурой линейной экстраполяции потоковых переменных с предыдущего слоя по времени через промежуточные значения консервативных переменных таким образом, чтобы на грань приходили характеристики из ячейки, где направление характеристик совпадает с характеристическим числом. На гранях между «твердыми» и «воздушными» ячейками применяется условие прилипания и непротекания. Грани внутри «твердых» ячеек не обрабатываются.

1. Математическая модель

Система уравнений Навье-Стокса в примитивных переменных:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0, \\ \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{v} \vec{v} = -\text{grad} p + \mu \Delta \vec{v}, \\ p = p_0 + c^2(\rho - \rho_0). \end{cases} \quad (1)$$

Матричная форма записи уравнений:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} = \mathbf{Q},$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \end{pmatrix}, \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \end{pmatrix}, \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \end{pmatrix}, \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \Delta u \\ \mu \Delta v \\ \mu \Delta w \end{pmatrix}.$$
(2)

Для поиска выражений для инвариантов Римана используется линейное приближение уравнений. Процедура линеаризации уравнений подразумевает пренебрежение пространственными производными выше первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \rho c^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \end{cases}$$
(3)

Матричная форма системы уравнений:

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} + \mathbf{B} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} + \mathbf{C} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial z} = 0,$$

$$\bar{\psi} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ p \end{pmatrix}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 & 1/\rho \\ 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 \\ \rho c^2 & 0 & 0 & u \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 & 1/\rho \\ 0 & 0 & v & 0 \\ 0 & \rho c^2 & 0 & v \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w & 1/\rho \\ 0 & 0 & \rho c^2 & w \end{pmatrix}.$$
(4)

Далее для каждой из матриц A, B, C находим собственные числа и строим систему левых собственных векторов. Записав собственные вектора в строках матриц $\Omega_A, \Omega_B, \Omega_C$, получим матрицы перехода, с помощью которых линеаризованная система уравнений может быть преобразована к виду:

$$\begin{aligned}
\Omega_A \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} + \left\{ \Omega_A \mathbf{A} \Omega_A^{-1} \right\} \Omega_A \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} &= -\Omega_A \mathbf{B} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} - \Omega_A \mathbf{C} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial z}, \\
\Omega_B \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} + \left\{ \Omega_B \mathbf{B} \Omega_B^{-1} \right\} \Omega_B \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} &= -\Omega_B \mathbf{A} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} - \Omega_B \mathbf{C} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial z}, \\
\Omega_C \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} + \left\{ \Omega_C \mathbf{C} \Omega_C^{-1} \right\} \Omega_C \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial z} &= -\Omega_C \mathbf{A} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} - \Omega_C \mathbf{B} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y},
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\Omega_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho c} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho c} \end{pmatrix}, \Omega_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{\rho c} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\rho c} \end{pmatrix}, \Omega_C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{\rho c} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\rho c} \end{pmatrix}.$$

Произведение матриц в фигурных скобках в силу свойств собственных векторов дает диагональную матрицу с собственными значениями на центральных элементах. Таким образом, мы получим систему характеристических уравнений относительно соотношений вида $\Omega_A \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x}$, $\Omega_B \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y}$, $\Omega_C \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial z}$. Теперь поиск выражений инвариантов сводится к составлению некоторых функций, которые при дифференцировании давали бы эти же соотношения. Или, другими словами, нужно вычислить первообразные от строк векторов $\Omega_A \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x}$, $\Omega_B \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y}$, $\Omega_C \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial z}$.

В нашем случае получим следующие выражения для инвариантов:

$$\mathbf{I}_x = \begin{pmatrix} u - \frac{p}{\rho_0 c} \\ v \\ w \\ u + \frac{p}{\rho_0 c} \end{pmatrix}, \mathbf{I}_y = \begin{pmatrix} v - \frac{p}{\rho_0 c} \\ u \\ w \\ v + \frac{p}{\rho_0 c} \end{pmatrix}, \mathbf{I}_z = \begin{pmatrix} w - \frac{p}{\rho_0 c} \\ u \\ v \\ w + \frac{p}{\rho_0 c} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

2. Разностная схема

Пусть расчетная область Ω представляет собой прямоугольный параллелепипед, лежащий между точками (x_L, y_L, z_L) , (x_R, y_R, z_R) . Зададим в области ортогональную регулярную ИК-сетку с неравномерным шагом по пространству на каждой из осей: $\{(x_i, y_j, z_k) : x_L = x_1 < x_2 < \dots < x_{N_x} = x_R, y_L = y_1 < y_2 < \dots < y_{N_y} = y_R, z_L = z_1 < z_2 < \dots < z_{N_z} = z_R\}$. В центрах ячеек зададим набор консервативных переменных $\{u, v, w, p\}$, а в центрах граней ячеек – набор потоковых переменных $\{u, v, w, p\}$. Для удобства изложения будем их обозначать одинаковыми символами, где отличие между этими переменными будет заключаться в индексах. Переменные в центре ячеек будем обозначать нижними полуцелыми индексами $(i+1/2, j+1/2, k+1/2)$, переменные в центре граней, соответственно, двумя полуцелыми и одним целым индексами, например $(i, j+1/2, k+1/2)$ или $(i+1/2, j, k+1/2)$.

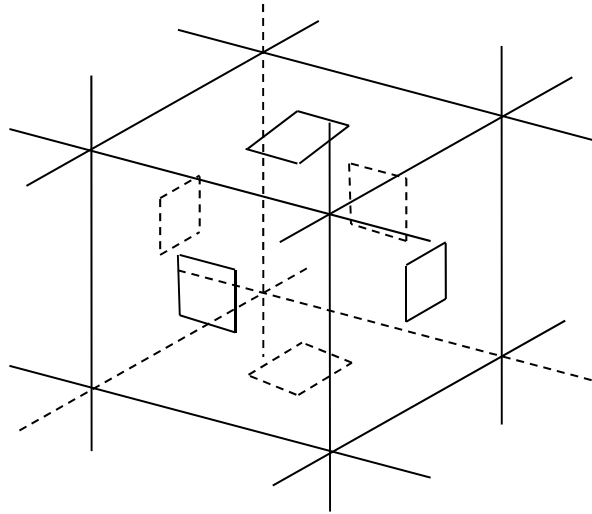


Рис. 1. Расположение переменных в расчетной ячейке

Вышеуказанных переменных мы и приступим к аппроксимации уравнений (2). Разностная схема КАБАРЕ [8] в неявном представлении может быть записана как:

$$\frac{U_C^{n+1} - U_C^n}{\tau} + \frac{F_R^{n+1} + F_R^n - F_L^{n+1} - F_L^n}{2(x_{i+1} - x_i)} + \frac{G_T^{n+1} + G_T^n - G_B^{n+1} - G_B^n}{2(y_{j+1} - y_j)} + \frac{H_F^{n+1} + H_F^n - H_N^{n+1} - H_N^n}{2(z_{k+1} - z_k)} = Q_C^{n+1/2},$$

где нижние индексы векторов означают следующие точки шаблона:

$$\begin{aligned} f_C &= f_{i+1/2, j+1/2, k+1/2}, \\ f_R &= f_{i+1, j+1/2, k+1/2}, f_L = f_{i, j+1/2, k+1/2}, \\ f_T &= f_{i+1/2, j+1, k+1/2}, f_B = f_{i+1/2, j, k+1/2}, \\ f_F &= f_{i+1/2, j+1/2, k+1}, f_N = f_{i+1/2, j+1/2, k}. \end{aligned}$$

Как видно, разностное уравнение является неявным, поэтому для его разрешения здесь применяется метод предиктор-корректор, где первый шаг-предиктор будет вычислять промежуточные значения консервативных $(u, v, w, p)_C^{n+1/2}$, второй шаг-корректор вычисляет консервативные переменные на новом временном слое $(u, v, w, p)_C^{n+1}$. Остается привести вычисление потоковых переменных, участвующих в шаге-корректоре. Будем вычислять с помощью характеристических уравнений (5).

Шаг №1. Предиктор

$$\frac{\tilde{U}_C^{n+1/2} - U_C^n}{0.5\tau} + \frac{F_R^n - F_L^n}{x_{i+1} - x_i} + \frac{G_T^n - G_B^n}{y_{j+1} - y_j} + \frac{H_F^n - H_N^n}{z_{k+1} - z_k} = 0, \quad (7)$$

Шаг №2. Учет вязкости

$$\frac{U_C^{n+1/2} - \tilde{U}_C^{n+1/2}}{\tau} = Q_C^{n+1/2}, \quad (8)$$

Шаг №3 Экстраполяция инвариантов с последующей процедурой нелинейной коррекции

$$\begin{aligned}
 (\tilde{\mathbf{I}}_x)_L^{n+1} &= 2(\mathbf{I}_x)_C^{n+1/2} - (\mathbf{I}_x)_R^n, (\mathbf{I}_x)_R^{n+1} = 2(\mathbf{I}_x)_C^{n+1/2} - (\mathbf{I}_x)_L^n, \\
 (\tilde{\mathbf{I}}_y)_B^{n+1} &= 2(\mathbf{I}_y)_C^{n+1/2} - (\mathbf{I}_y)_T^n, (\mathbf{I}_y)_T^{n+1} = 2(\mathbf{I}_y)_C^{n+1/2} - (\mathbf{I}_y)_B^n, \\
 (\tilde{\mathbf{I}}_z)_N^{n+1} &= 2(\mathbf{I}_z)_C^{n+1/2} - (\mathbf{I}_z)_F^n, (\mathbf{I}_z)_F^{n+1} = 2(\mathbf{I}_z)_C^{n+1/2} - (\mathbf{I}_z)_N^n, \\
 (\mathbf{I}_x)_{\min}^n &= \min\{(\mathbf{I}_x)_L^n, (\mathbf{I}_x)_C^n, (\mathbf{I}_x)_R^n\}, (\mathbf{I}_x)_{\max}^n = \max\{(\mathbf{I}_x)_L^n, (\mathbf{I}_x)_C^n, (\mathbf{I}_x)_R^n\}, \\
 (\mathbf{I}_y)_{\min}^n &= \min\{(\mathbf{I}_y)_B^n, (\mathbf{I}_y)_C^n, (\mathbf{I}_y)_T^n\}, (\mathbf{I}_y)_{\max}^n = \max\{(\mathbf{I}_y)_B^n, (\mathbf{I}_y)_C^n, (\mathbf{I}_y)_T^n\}, \\
 (\mathbf{I}_z)_{\min}^n &= \min\{(\mathbf{I}_z)_N^n, (\mathbf{I}_z)_C^n, (\mathbf{I}_z)_F^n\}, (\mathbf{I}_z)_{\max}^n = \max\{(\mathbf{I}_z)_N^n, (\mathbf{I}_z)_C^n, (\mathbf{I}_z)_F^n\}, \\
 \left. \begin{aligned}
 (\mathbf{I}_x)_{L/R}^{n+1} &= \max\left\{\min\left[(\mathbf{I}_x)_{\max}^n + \tau \mathbf{q}_x^n, (\tilde{\mathbf{I}}_x)_{L/R}^{n+1}\right], (\mathbf{I}_x)_{\min}^n + \tau \mathbf{q}_x^n\right\}, \\
 (\mathbf{I}_y)_{B/T}^{n+1} &= \max\left\{\min\left[(\mathbf{I}_y)_{\max}^n + \tau \mathbf{q}_y^n, (\tilde{\mathbf{I}}_y)_{B/T}^{n+1}\right], (\mathbf{I}_y)_{\min}^n + \tau \mathbf{q}_y^n\right\}, \\
 (\mathbf{I}_z)_{N/F}^{n+1} &= \max\left\{\min\left[(\mathbf{I}_z)_{\max}^n + \tau \mathbf{q}_z^n, (\tilde{\mathbf{I}}_z)_{N/F}^{n+1}\right], (\mathbf{I}_z)_{\min}^n + \tau \mathbf{q}_z^n\right\}
 \end{aligned} \right\} \quad (9)
 \end{aligned}$$

Шаг №4. Корректор

$$\frac{\mathbf{U}_C^{n+1} - \mathbf{U}_C^{n+1/2}}{0.5\tau} + \frac{\mathbf{F}_R^{n+1} - \mathbf{F}_L^{n+1}}{x_{i+1} - x_i} + \frac{\mathbf{G}_T^{n+1} - \mathbf{G}_B^{n+1}}{y_{j+1} - y_j} + \frac{\mathbf{H}_F^{n+1} - \mathbf{H}_N^{n+1}}{z_{k+1} - z_k} = 0. \quad (10)$$

Аппроксимация правой части уравнений $\mathbf{Q}_C^{n+1/2}$ из системы матричных уравнений (2) имеет вид:

$$\mathbf{Q}_C^{n+1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \Delta_h u_C^{n+1/2} \\ \mu \Delta_h v_C^{n+1/2} \\ \mu \Delta_h w_C^{n+1/2} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Для аппроксимации лапласианов используется 7-ми точечный шаблон:

$$\begin{aligned}
 \Delta_h^{n+1/2} f &\equiv \frac{\frac{f_{i+3/2, j+1/2, k+1/2}^{n+1/2} - f_{i+1/2, j+1/2, k+1/2}^{n+1/2}}{0.5 \cdot (x_{i+2} - x_i)} - \frac{f_{i+1/2, j+1/2, k+1/2}^{n+1/2} - f_{i-1/2, j+1/2, k+1/2}^{n+1/2}}{0.5 \cdot (x_{i+1} - x_{i-1})}}{x_{i+1} - x_i} + \\
 &+ \frac{\frac{f_{i+1/2, j+3/2, k+1/2}^{n+1/2} - f_{i+1/2, j+1/2, k+1/2}^{n+1/2}}{0.5 \cdot (y_{j+2} - y_j)} - \frac{f_{i+1/2, j+1/2, k+1/2}^{n+1/2} - f_{i+1/2, j-1/2, k+1/2}^{n+1/2}}{0.5 \cdot (y_{j+1} - y_{j-1})}}{y_{i+1} - y_i} + \\
 &+ \frac{\frac{f_{i+1/2, j+1/2, k+3/2}^{n+1/2} - f_{i+1/2, j+1/2, k+1/2}^{n+1/2}}{0.5 \cdot (z_{k+2} - z_k)} - \frac{f_{i+1/2, j+1/2, k+1/2}^{n+1/2} - f_{i+1/2, j+1/2, k-1/2}^{n+1/2}}{0.5 \cdot (z_{k+1} - z_{k-1})}}{z_{k+1} - z_k} \quad (12)
 \end{aligned}$$

Аппроксимация правых частей характеристических уравнений:

$$\mathbf{q}_x = -\Omega_A \mathbf{B} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} - \Omega_A \mathbf{C} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial z} = \begin{pmatrix} -v & c & 0 & 0 \\ \frac{c}{2} & -v & 0 & -\frac{c}{2} \\ 0 & 0 & -v & 0 \\ 0 & -c & 0 & -v \end{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{I}_x}{\partial y} + \begin{pmatrix} -w & 0 & c & 0 \\ 0 & -w & 0 & 0 \\ \frac{c}{2} & 0 & -w & -\frac{c}{2} \\ 0 & 0 & -c & -w \end{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{I}_x}{\partial z}, \quad (13)$$

$$\mathbf{q}_y = -\Omega_B \mathbf{A} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} - \Omega_B \mathbf{C} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial z} = \begin{pmatrix} -u & c & 0 & 0 \\ \frac{c}{2} & -u & 0 & -\frac{c}{2} \\ 0 & 0 & -u & 0 \\ 0 & -c & 0 & -u \end{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{I}_y}{\partial x} + \begin{pmatrix} -w & 0 & c & 0 \\ 0 & -w & 0 & 0 \\ \frac{c}{2} & 0 & -w & -\frac{c}{2} \\ 0 & 0 & -c & -w \end{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{I}_y}{\partial z}, \quad (14)$$

$$\mathbf{q}_z = -\Omega_C \mathbf{A} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} - \Omega_C \mathbf{B} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} = \begin{pmatrix} -u & c & 0 & 0 \\ \frac{c}{2} & -u & 0 & -\frac{c}{2} \\ 0 & 0 & -u & 0 \\ 0 & -c & 0 & -u \end{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{I}_z}{\partial x} + \begin{pmatrix} -v & 0 & c & 0 \\ 0 & -v & 0 & 0 \\ \frac{c}{2} & 0 & -v & -\frac{c}{2} \\ 0 & 0 & -c & -v \end{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{I}_z}{\partial y}. \quad (15)$$

3. Эксперимент А1-1

Эксперимент серии А, А1 используется для верификации микромасштабных метеорологических моделей, предназначенных для расчета аэродинамики в условиях городской застройки. Препятствие имеет форму параллелепипеда. Размеры препятствия представлены на Рис. 2.

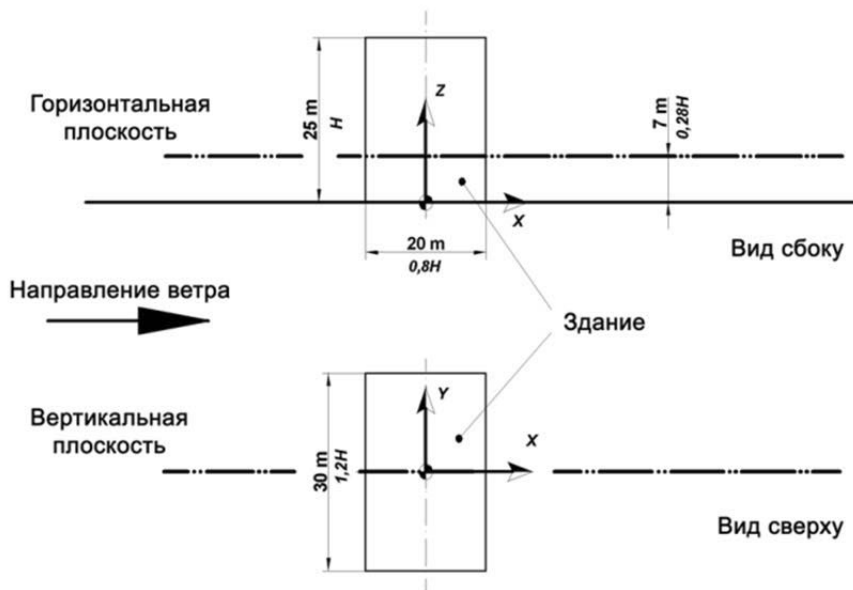


Рис.2. Чертеж препятствия. Эксперимент А1

Измерительная сеть располагалась в двух плоскостях – горизонтальной и вертикальной. На горизонтальной плоскости измерялась продольная и поперечная основному потоку компоненты скорости ветра. На вертикальной плоскости измерялась продольная и вертикальная компоненты скорости ветра. Полная кинетическая энергия турбулентности доступна с датчиков, лежащих в обеих плоскостях, расположенных на вертикальной линии, на высоте 7 метров от земли по центру туннеля. Общее количество точек измерений в этом эксперименте 1246. Скорость ветра на высоте 100 м была равна 6 м/с, параметр шероховатости был равен 0,14 м, входной профиль ветра зада-

вался степенной зависимостью $U(z) = U_{ref} \cdot \left(\frac{z}{H_{ref}} \right)^\alpha$, где $\alpha=0,21$.

4. Результаты

Методология сравнения результатов моделирования с данными измерений, довольно хорошо разработана и широко используется на практике для микромасштабных метеорологических моделей [9]. Разные модели сравниваются между собой с несколькими микромасштабными экспериментами по распространению трассера, используя следующие, приведенные далее, критерии (или части из этих критериев). Здесь собран полный перечень, найденный в литературе.

Часть этих критериев характеризует разброс между парами измеренных и рассчитанных значений.

Коэффициент корреляции Пирсона PCC (Pearson's correlation coefficient), определяемый как:

$$P = \frac{\sum_{i=1}^N (C_{calc}^i - \bar{C}_{calc})(C_{obs}^i - \bar{C}_{obs})}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (C_{calc}^i - \bar{C}_{calc})^2 \sum_{i=1}^N (C_{obs}^i - \bar{C}_{obs})^2}}$$

Значения P находятся в пределах от -1 до +1. Идеальный случай – P=1.

– Критерий, определяемый фактором FA (factor of observation), представляет долю тех значений, для которых выполняется соотношение $FA\alpha = \frac{N}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n N_i$ для

$$N_i = \begin{cases} 1, & \frac{1}{\alpha} \leq \frac{C_{calc}}{C_{obs}} \leq \alpha \\ 1, & C_{obs} \leq W \ \& \ C_{calc} \leq W. \\ 0 \end{cases}$$

Кроме того, используются критерии смещения рассчитанных значений в терминах пере- или недооценки. В этой категории обычно используются два критерия:

– Критерий BIAS оценивает отклонение средних величин рассчитанных значений от измеренных в единицах исследуемой величины (в нашем случае – в единицах концентрации) :

$$BIAS = \bar{C}_{calc} - \bar{C}_{obs} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (C_{calc}^i - C_{obs}^i)$$

Параметр BIAS показывает недооценку или переоценку расчетных значений по отношению к измеренным значениям.

– Характеристика HR (Hit Rate):

$$\text{для } q = \frac{N}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n N_i \quad \text{для } N_i = \begin{cases} 1, & \left| \frac{U_{calc} - U_{obs}}{U_{obs}} \right| \leq D \\ 1, & |U_{calc} - U_{obs}| \leq W \\ 0 \end{cases} .$$

– Характеристика SAA (Scaled Average Angle differences) вычисляется как

$$SAA = \frac{\sum_{i=1}^N |U_i| |\varphi_i|}{\sum_{i=1}^N |U_i|} ,$$

где φ_i - угол между расчетной и измеренной скоростью, и $|U_i|$ – модуль расчетной скорости в точке i .

Табл. 1. Статистические критерии для продольной компоненты скорости. Вертикальное сечение. Эксперимент А1

Критерий	LES-1	LES-2	Эталон
FA-2	81%	71%	100%
HR	72%	64%	100%
BIAS	0,16	-0,35	0
PCC	0,94	0,92	1
SAA	8,05	10,6	0

Табл. 2. Статистические критерии для вертикальной компоненты скорости. Вертикальное сечение. Эксперимент А1

Критерий	LES-1	LES-2	Эталон
FA-2	85%	86%	100%
HR	90%	87%	100%
BIAS	0,115	0,185	0
PCC	0,81	0,82	1
SAA	8,05	10,6	0

Табл. 3. Статистические критерии для продольной компоненты скорости. Горизонтальное сечение. Эксперимент А1

Критерий	LES-1	LES-2	Эталон
FA-2	83%	74%	100%
HR	59%	59%	100%
BIAS	0,20	-0,29	0
PCC	0,93	0,86	1
SAA	28,6	12,4	0

Табл. 4. Статистические критерии для поперечной компоненты скорости. Горизонтальное сечение. Эксперимент А1

Критерий	LES-1	LES-2	Эталон
FA-2	86%	86%	100%
HR	90%	87%	100%
BIAS	-0,012	0,18	0
PCC	0,76	0,82	1
SAA	28,6	12,4	0

В Табл. 1-Табл. 4 сокращения LES-1, LES-2 относятся к двум сеточным множествам, имеющим следующие геометрические и численные параметры:

LES-1 сетка $70 \times 37 \times 33$ с шагом сетки 2м,

LES-2 сетка $280 \times 148 \times 66$ с шагом сетки 1м.

Из анализа статистических параметров решения можно заключить, что есть существенное отличие по величине продольной скорости (U , x -компонента скорости) в обоих сечениях (64% и 59% по параметру HR). Допустимая норма параметров для верификации CFD-кода равняется 65%, что является близким к полученным значениям. По остальным параметрам получены довольно неплохие результаты ($FA-2 > 70\%$; $-0,3 < BIAS < 0,2$; $PCC > 0,76$), за исключением среднего угла отклонения SAA ($\sim 10-20$), что можно объяснить тем, что при хорошем согласии статистики по боковой и вертикальной скоростям есть несоответствие по продольной компоненте скорости. Можно предположить, что такое разительное отличие от эксперимента заключается в недостаточном сеточном разрешении.

Заключение

Численно реализована программа на языке Фортран-90 с использованием MPI технологии. Проведена серия расчетов на последовательности сгущающихся сеток для верификации на тестовом примере. Следующим логически обоснованным шагом в дальнейшем развитии данного подхода является введение невязности или внедрение какой-либо модели турбулентности. Последнее является довольно частым решением в задачах микромасштабных метеорологических моделей.

Литература

1. Y.Q.Zhang, S.P.Arya, W.H.Snyder A comparison of numerical and physical modeling of stable atmospheric flow and dispersion around a cubical building Atmospheric Environment, 1996, Vol.30, No.8, pp.1327-1345.
2. S.T.Chan, M.J.Leach A Validation of FEM3MP with Joint Urban 2003 Data J. of Applied meteorology and climatology, 2007, vol.46, pp.2127-2146.
3. CEDVAL project. Available at: www.mi.zmaw.de/CEDVAL_Validation_Data.427.0.html
4. В.М.Головизнин, А.А.Самарский. Разностная аппроксимация конвективного переноса с пространственным расщеплением временной производной //Математическое Моделирование. 1998г. т.10. №1. С.86-100.
5. В.М.Головизнин, А.А.Самарский. Некоторые свойства разностной схемы "Кабре //Математическое Моделирование. 1998г. т.10. №1. С.101-116.
6. В.М.Головизнин, С.А.Карбасов, И.М.Кобринский. Балансно-характеристические схемы с разделенными консервативными и потоковыми переменными //Математическое Моделирование. 2003г. т.15. №9. С.29-48.
7. В.М.Головизнин. Балансно-характеристический метод численного решения одномерных уравнений газовой динамики в эйлеровых переменных //Математическое Моделирование. 2006г. т.18. №11. С.14-30.
8. G.A. Faranosov, V.M. Goloviznin, S.A. Karabasov, V.G. Kondakov, V.F.Kopiev, M.A. Zaitsev, "CABARET method on unstructured hexahedral grids for jet noise computation", Computer&Fluids, 2013, Vol. 88, pp.165-179.
9. VDI, 2005. Guideline 3783 Part 9, 2005-11. Environmental meteorology – Prognostic micro-scale wind field models – Evaluation for flow around buildings and obstacles. Beuth Verlag, Berlin.

Кондаков Василий Гаврильевич. Научный сотрудник Институт проблем безопасного развития атомной энергетики (ИБРАЭ РАН). Окончил МФТИ (ГУ) в 2006 году. Кандидат физико-математических наук. Количество печатных работ: 5. Область научных интересов: вычислительная математика, информационные технологии. E-mail: kondakov@ibrae.ac.ru

Application of the CABARET scheme for the problem of a microscale meteorology model

Vasilii G. Kondakov

Proposed a new model for flow around buildings and obstacles. On the basis of the CABARET schemes, a conservative finite difference scheme of the Navier-Stokes equations is constructed with the equation of state of a weakly compressible medium in the isothermal approximation. Verification of the numerical scheme in the test case A1-1 from the CEDVAL project of the Meteorological Institute of the University

of Hamburg was carried out. Statistical data are obtained for the comparison with experimental data over the averaged velocity field in control sections.

Keywords: CABARET scheme, weakly compressible medium, microscale meteorology model

References

1. Y.Q.Zhang, S.P.Arya, W.H.Snyder A comparison of numerical and physical modeling of stable atmospheric flow and dispersion around a cubical building *Atmospheric Environment*, 1996, Vol.30, No.8, pp.1327-1345.
2. S.T.Chan, M.J.Leach A Validation of FEM3MP with Joint Urban 2003 Data *J. of Applied meteorology and climatology*, 2007, vol.46, pp.2127-2146.
3. CEDVAL project. Available at: www.mi.zmaw.de/CEDVAL_Validation_Data.427.0.html
4. Goloviznin V. M., Samarskii A. A. Finite difference approximation of convective transport equation with space splitting time derivative // *Matematicheskoe Modelirovanie*. – 1998. – Т. 10. – №. 1. – С. 86-100.
5. Goloviznin V. M., Samarskii A. A. Some characteristics of finite difference scheme “cabaret” // *Matematicheskoe Modelirovanie*. – 1998. – Т. 10. – №. 1. – С. 101-116.
6. Goloviznin V. M., Karabasov S. A., Kobrinskii I. M. Balance-characteristic schemes with separated conservative and flux variables // *Matematicheskoe Modelirovanie*. – 2003. – Т. 15. – №. 9. – С. 29-48.
7. Goloviznin V. M. Balanced characteristic method for 1D systems of hyperbolic conservation laws in Eulerian representation // *Matematicheskoe Modelirovanie*. – 2006. – Т. 18. – №. 11. – С. 14-30.
8. G.A. Faranosov, V.M. Goloviznin, S.A. Karabasov, V.G. Kondakov, V.F.Kopiev, M.A. Zaitsev, “CABARET method on unstructured hexahedral grids for jet noise computation”, *Computer&Fluids*, 2013, Vol. 88, pp.165-179.
9. VDI, 2005. Guideline 3783 Part 9, 2005-11. Environmental meteorology – Prognostic micro-scale wind field models – Evaluation for flow around buildings and obstacles. Beuth Verlag, Berlin.

Kondakov V.G., Lab. of mathematical algorithms and supercomputer technologies for modeling multiphase multicomponent turbulent flows, Nuclear Safety Institute of Russian Academy of Sciences (NSI RAS). E-mail: kondakov@ibrae.ac.ru