

Метод проективного сопоставления для овалов с двумя отмеченными точками¹

А.В. Савчик, П.П. Николаев

Аннотация. В работе исследуется проективно инвариантное построение для конфигурации общего вида, состоящей из овала и двух отмеченных точек на его контуре. Доказывается возможность не менее чем двумя способами дополнить такую конфигурацию до тройки точек контура, обладающей проективно инвариантным свойством пересечения чевиан. Доказательство основано на построении эллипсов, касающихся овала в трёх точках: вписанного в овал и описанного вокруг него. Представлен алгоритм проективного сравнения двух овалов общего вида, с вычислительной сложностью $O(n^2 \log(n))$. Алгоритм основан на переборе отмеченных точек и использует указанное построение в качестве промежуточного шага.

Ключевые слова: проективная плоскость, проективные инварианты, вписанные и описанные эллипсы.

Введение

В приложениях, связанных с областью машинного зрения, возникает задача сопоставления плоских объектов на различных изображениях [1]. Один из используемых для её решения подходов состоит в сопоставлении проективно преобразованных плоских замкнутых контуров. На практике иногда оказывается возможным пренебречь проективной природой преобразования [2]. Однако для преобразований, которые сильно отличаются от аффинных в исследуемой части плоскости, ее следует учитывать. В общем случае контуры можно сопоставлять, используя точки, выбранные проективно инвариантным способом. Например, опирающиеся на те или иные особенности, такие как точки перегиба или точки касания общих касательных [3]. Однако этот метод не работает в случае выпуклого контура, или, иначе, овала, в котором таких точек нет.

В некоторых случаях можно использовать скрытую симметрию какого-либо вида (например, [4]) или же – алгебраичность кривой [5]. Однако для сопоставления овалов общего вида эти методы не работают и приходится упрощать задачу, искусственно добавляя отмеченные точки в конфигурацию [6, 7]. Конкретнее, задача сопоставления овалов общего вида перебором положения отмеченных точек может быть сведена к задаче сопоставления контуров с отмеченными точками. В подобном случае (из-за перебора большого количества вариантов) увеличиваются время работы и вероятность ошибки на выходе алгоритма (из-за ненулевой на практике вероятности ошибки у применяемой много раз подпрограммы сравнения). При таком подходе для овалов общего вида используются методы, вычислительная сложность которых не менее $O(n^3)$, где

¹ Работа выполнена при поддержке РФФИ по проекту №16-07-00836.

n – количество вершин, привлекаемое для аппроксимации овала многоугольником.

В данной статье предлагается способ построения двух дополнительных проективно инвариантных точек по овалу с двумя априорно выделенными точками контура и доказывается его корректность в теоретически идеальном случае, что позволяет заменить перебор n^3 случаев на n^2 . Ниже рассмотрен переборный алгоритм для сопоставления овалов общего вида, основанный на этом построении, и приводятся оценки его вычислительной сложности. Показано, как с помощью замены перебора n^2 случаев на перебор $2n$ случаев удастся получить алгоритм, в теории требующий для сопоставления овалов лишь $O(n^2 \log n)$ действий.

1. Определения, модель вычисления

Под *овалом* будем подразумевать гладкую границу с конечным радиусом кривизны непустого компактного строго выпуклого множества на плоскости \mathbb{R}^2 .

Касательную к овалу, проходящую через его точку A , будем обозначать через l_A . В доказательстве будем также использовать проективную плоскость $\mathbb{R}P^2 \supset \mathbb{R}^2$, задавая точки на ней однородными координатами $(x, y, 1) = (x, y)$.

2. Обоснование выбора третьей и четвертой точек. Теорема о пересечении чевиан

Пусть нам дана конфигурация – овал с двумя выделенными точками контура. Покажем, как в эту конфигурацию можно проективно инвариантно добавить еще две точки. Для этого докажем несколько вспомогательных лемм.

2.1. Лемма о семействе эллипсов

Лемма. Пусть даны две (пересекающиеся) прямые и на каждой выбрано по точке, отличной от точки пересечения. Тогда коники, касающиеся этих прямых в этих точках, образуют пучок кривых. Более того, они образуют два независимых вложенных семейства по одному в каждой части, на которую две прямые делят проективную плоскость.

Доказательство. Проективным преобразованием переведем эти прямые в оси Ox и Oy , а точки касания в точки $(0,1)$ и $(1,0)$. Рассмотрим множество коник, касающихся в этих точках координатных осей. В однородных координатах коника задаётся уравнением $f(x, y, z) = a_{x,x}x^2 + a_{y,y}y^2 + a_{z,z}z^2 + a_{x,y}xy + a_{x,z}xz + a_{y,z}yz = 0$.

Подставляя в условия $f(1,0,1) = f(0,1,1) = \frac{df(1,0,1)}{dx} = \frac{df(0,1,1)}{dy} = 0$,

получим следующую систему:

$$\begin{cases} a_{x,x} + a_{x,z} + a_{z,z} = 0 \\ a_{y,y} + a_{y,z} + a_{z,z} = 0 \\ 2a_{x,x} + a_{x,z} = 0 \\ 2a_{y,y} + a_{y,z} = 0 \end{cases}$$

Решением полученной системы уравнений является семейство

$$\{a_{x,x} = a_{y,y} = a_{z,z} = C_1, a_{x,z} = a_{y,z} = -2C_1, a_{x,y} = C_2\}.$$

Подставляя выражения для коэффициентов в уравнение кривой второго порядка, получим:

$$\begin{aligned} C_1x^2 + C_1y^2 + C_1z^2 - 2C_1xz - 2C_1yz + C_2xy &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow C_1((x-z)^2 + (y-z)^2 - z^2) + C_2(xy) &= 0. \end{aligned}$$

Уравнение $(x-z)^2 + (y-z)^2 - z^2 = 0$ описывает окружность радиуса 1 с центром в точке $(1,1)$. Уравнение $xy = 0$ соответствует объединению осей Ox и Oy . Получаем, что решением исходного уравнения является пучок кривых (Рис. 1). Следовательно, для любой точки на плоскости, кроме точек $(0,1)$ и $(1,0)$, существует единственная проходящая через неё кривая из этого пучка (для её нахождения достаточно подставить координаты точки в уравнение этой кривой и получить требуемое соотношение коэффициентов C_1 и C_2).

Исследуем, в каких случаях данная кривая второго порядка вырождается и оказывается не коникой. Так, уравнение кривой может оказаться произведением двух уравнений прямых $l \cdot m = 0$. Такое возможно только для уравнения $xy = 0$ в случае $l \neq m$ при $C_1 = 0$ и только для уравнения $(x+y-z)^2 = 0$ в случае $l = m$ при $C_2 = 2C_1$. Другие случаи вырождения не реали-

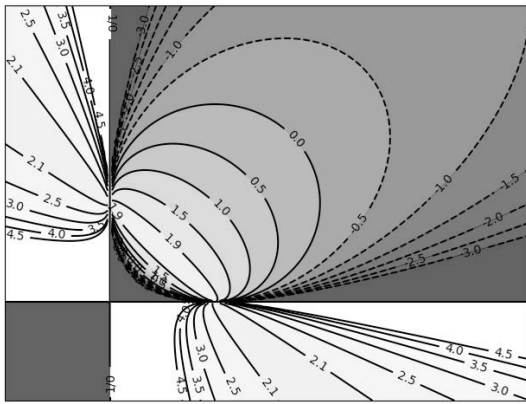


Рис. 1. Семейство коник, касающихся осей в точках (0,1) и (1,0), для разных значений C_2/C_1

зуются, так как кривая содержит хотя бы две (действительные) точки. Из проективной классификации кривых второго порядка следует, что при остальных отношениях параметров C_1 и C_2 кривая является коникой.

2.2. Лемма о тройке точек с пересекающимися чевианами

Пусть дан произвольный овал и тройка точек A, B и C на нём. Назовём тройку A, B, C удовлетворяющей свойству пересечения чевиан, если в треугольнике $A'B'C'$, образованном касательными l_A, l_B, l_C , чевианы $A'A, B'B, C'C$ пересекаются в одной точке.

Лемма. Три точки обладают свойством пересечения чевиан тогда и только тогда, когда существует эллипс, проходящий через точки A, B и C и касающийся в них прямых l_A, l_B и l_C соответственно (Рис. 2).

Доказательство. Для проверки достаточно-сти нужно убедиться, что любые три точки эллипса обладают свойством пересечения чевиан. Действительно, проективным преобразованием можно свести задачу к аналогичной для окружности. В свою очередь для окружности это следует из теоремы Чебы.

$$\frac{A'B \cdot C'A \cdot B'C}{BC' \cdot AB' \cdot CA'} = \frac{A'B \cdot C'A \cdot B'C}{C'A \cdot B'C \cdot A'B} = 1$$

Для доказательства необходимости заметим, что для любого треугольника $A'B'C'$ с точками B и C на сторонах $A'C'$ и $B'A'$, соответ-

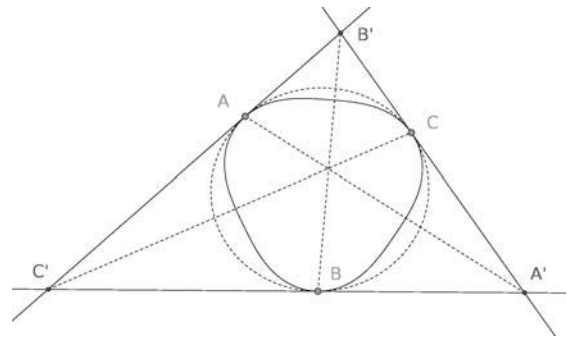


Рис. 2. Тройка точек касания эллипса и овала, обладает свойством пересечения чевиан

ственно, существует эллипс, вписанный во все три стороны треугольника и проходящий через точки B и C . Действительно, по лемме о семействе эллипсов существует семейство вложенных коник в этой части плоскости. Возьмём эллипс, настолько близкий к отрезку BC , чтобы он находился внутри треугольника, и рассмотрим процесс его непрерывного увеличения (формально говоря, непрерывного изменения значения отношения C_1/C_2 в терминах леммы). В некоторый момент эллипс достигнет третьей стороны треугольника. В этот момент эллипс будет пересекать эту сторону лишь в одной точке и, следовательно, касаться в ней стороны треугольника.

Пусть вписанный в треугольник эллипс касается его в точках B, C, A'' . Как доказано выше, точка A'' дополняет точки B и C до тройки, обладающей свойством пересечения чевиан. Однако такая точка на стороне $B'C'$ единственна, т.к. лежит на одной прямой с вершиной A' и точкой пересечения чевиан $B'B$ и $C'C$.

2.3. Теоремы о дополнении до тройки, удовлетворяющей свойству пересечения чевиан

В статье [8] была сформулирована гипотеза о существовании для любой пары точек A и B на овале третьей точки C , дополняющей A, B до тройки, удовлетворяющей свойству пересечения чевиан. С помощью лемм, доказанных выше, вопрос о существовании таких троек сводится к вопросу о существовании эллипсов, касающихся овала в трёх точках. Используя ту

же идею увеличения эллипсов, что и в доказательстве леммы 2, можно было бы предположить возможность всегда дополнить две точки на овале до тройки, в которой какой-либо эллипс касается овала. Однако, строго говоря, это неверно, как показывает следующая теорема.

Теорема 1. Существует овал ν и такие две точки A и B на нём, что не существует ни одной отличной от A и B точки C овала, дополняющей A и B до тройки, обладающей свойством пересечения чевиан.

Доказательство. Пусть $A = (-1, 0)$, $B = (1, 0)$. Рассмотрим семейство эллипсов, у которых в точках A и B вертикальные касательные. Такое семейство задаётся уравнениями $x^2 + Cy^2 = 1$. Пусть овал удовлетворяет уравнению $x^2 + C(x)y^2 = 1$ при $C(x)$ линейно увеличивающемся от 1 до 4 при $x \in [-1, 1]$. Тогда вписанный и описанный эллипсы, проходящие через точки A и B , будут соответственно эллипсами $x^2 + 4y^2 = 1$ и $x^2 + y^2 = 1$ (Рис. 3). Из них каждый пересекает исходный эллипс только в точках A и B .

Любой промежуточный эллипс не касается овала ни в какой точке, отличной от A и B . Действительно, предположим он пересекает овал в точке $P = (x_0, y_0)$, $P \neq A, B$. Продифференцируем уравнения эллипса и овала, чтобы рассмотреть нормали к овалу и эллипсу в этой точке.

$$\begin{aligned} d(x^2 + C(x_0)y^2 - 1) &= 2xdx + 2C(x_0)ydy \\ d(x^2 + C(x)y^2 - 1) &= \\ &= \left(2x + \frac{dC(x)}{dx}y^2 \right) dx + 2C(x)ydy \end{aligned}$$

Так как $C(x_0)$, $\frac{dC(x)}{dx}$, y не равны нулю в точках, отличных от A и B , нормали не сонаправлены, и, следовательно, точка P не является точкой касания.

Тем не менее, если ограничиться только общим случаем (а именно исключить вырожденные случаи равенства нулю пары действительных коэффициентов), такая точка C существует и даже не единственна.

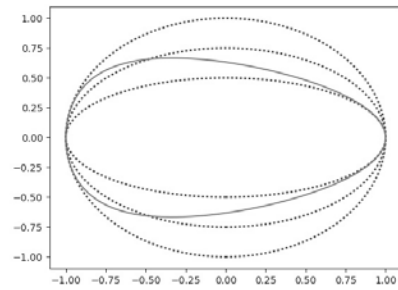


Рис. 3. Овал $x^2 + (1 + 1.5(x+1))y^2 = 1$ и вписанный/описанный эллипсы

Теорема 2. Для овала ν и двух точек A и B на нём существует, в общем (невыврожденном) случае, не менее двух точек C овала, дополняющих A и B до тройки, обладающей свойством пересечения чевиан.

Доказательство. Рассмотрим семейство эллипсов, проходящих через точки A и B и имеющих в них общие касательные l_A и l_B с овалом ν . Среди этого семейства можно выбрать конику, столь близкую к отрезку AB , что она полностью расположена внутри овала ν , не считая точек A и B . С другой стороны, можно выбрать конику столь близкую к объединению прямых l_A и l_B , что овал ν полностью расположен внутри неё (с тем же исключением точек A и B).

Тогда рассмотрим процесс непрерывного увеличения первой коники, продолжающийся до тех пор, пока она не окажется тождественной второй. Найдем моменты времени $t = t_0$ в который коника f_t перестаёт лежать полностью внутри, и $t = t_1$ в который коника оказывается полностью снаружи. Для ν , не являющегося эллипсом, $t_0 \neq t_1$.

Покажем, что в момент t_i существует третья точка касания для точек A и B общего положения. Действительно, найденная граничная коника f_{t_i} локально разделяет случаи двух точек пересечения с эллипсом (для полностью лежащей внутри либо снаружи) и не менее чем трёх.

Рассмотрим предел положения третьей точки пересечения при $t \rightarrow t_i$. Если предел отличен от точек A и B , то он соответствует третьей точке касания. Рассмотрим, в каких случаях эта точка может совпасть с A (или, аналогично, с B). Во-первых, это означает, что при $t \rightarrow t_i$ в окрестности точки A существует еще одна точка пересечения v с f_i . Следовательно, f_i не только имеет общую касательную с v в точке A , но и имеет такую же кривизну. Во-вторых, для того, чтобы коника f_i оказалась граничной, требуется, чтобы овал в окрестности точки A проходил по одну сторону от эллипса f_i .

Покажем, что овал, в общем случае, проходит по разные стороны от такого эллипса. Действительно, переведем A в точку $(0,0)$, l_A в Ox , а B в точку $(0,1)$. В таком случае локально в окрестности образа точки A эллипс задается четной функцией $y = 0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \dots$, а овал функцией $y = 0 + 0 \cdot x + v_2x^2 + v_3x^3 + \dots$. Кривизна (в исходной системе координат) у них одинакова, $v_2 = a_2$. Однако в общем случае, коэффициент $v_3 \neq 0$. Значит, овал v в окрестности точки A проходит по разные стороны от эллипса f_i .

Следовательно, коники f_1, f_2 касаются овала не менее, чем в трех точках.

3. Алгоритм сопоставления

В этом разделе предлагается алгоритм сопоставления овалов, основанный на вышеизложенном методе получения третьей точки. В алгоритме используется модель, в рамках которой овалы заданы идеальным положением n точек и направлениями касательных в них. Причем точки на овалах выбраны соответствующим образом, т.е. каждая выбранная точка второго овала является образом некоторой точки первого при проективном преобразовании, переводящем один овал в другой. Оценка вычисли-

тельной сложности алгоритма также проводится в модели идеальных вычислений, не учитывая погрешностей, возникающих при работе с вещественными числами.

При практическом применении алгоритма могут возникнуть сложности, связанные с ошибками оценки положения на контуре выбранных n точек, с ошибками оценки направления касательных в этих точках, вычислительные ошибки и, как следствие, ошибки при сопоставлении дескрипторов, однако эти вопросы не рассматриваются в данной статье.

3.1. Переборный поиск общей пары точек

Пусть даны два овала v_1 и v_2 . Алгоритм начинается с выбора общей пары точек на овалах. Вместо прямого перебора всех возможных пар (требующего перебора n^2 вариантов), будем использовать перебор, требующий $2n$ вариантов.

Возьмем произвольную точку A_1 на овале v_1 и произвольную точку B_2 на овале v_2 . После чего будем перебирать все возможные положения точек $B_1 \in v_1$ и $A_2 \in v_2$. Если овалы проективно соответствуют друг другу $v_2 = f(v_1)$, то среди вариантов положений точек A_2 и B_1 будут соответствующие точкам на другом овале $A_2 = f(A_1)$, $B_1 = f^{-1}(B_2)$.

Таким образом, задача свелась к построению $2n$ дескрипторов по конфигурациям вида овал и две точки на нём и сравнению n дескрипторов, соответствующих v_1 , с n дескрипторами, соответствующими v_2 .

3.2. Нахождение третьей и четвертой точки

Пусть дан овал v и две точки A, B на нём. Воспользуемся аппаратом из раздела 2, чтобы построить еще две точки, а именно точки касания вписанного и описанного эллипса, проходящих через точки A, B и имеющих в них общие касательные l_A, l_B с v .

Для нахождения этих точек рассмотрим систему координат, в которой A, l_A, B, l_B имеют удобный вид, рассмотренный в лемме о семействе эллипсов. В такой системе координат

эллипс этого семейства, проходящий через некоторую точку $P = (x, y, z), z = 1$, задается уравнением $C_1((x-z)^2 + (y-z)^2 - z^2) + C_2(xy) = 0$.

Таким образом, соотношение C_2/C_1 может быть выражено как $\frac{C_2}{C_1} = \frac{-xy}{(x-z)^2 + (y-z)^2 - z^2}$.

Отличные от A и B точки с наибольшим и наименьшим отношением являются искомыми. Перевод в другую систему координат и поиск минимума и максимума значения алгебраического выражения могут быть выполнены за $O(n)$ действий.

3.3. Построение дескриптора по четырём точкам

При данных четырех точках на овале можно предложить большое количество различных дескрипторов. Например, построим касательные к овалу в каждой из этих точек и их пересечения. Тогда на каждой из этих прямых будут отмечены четыре точки: точка, в которой взята эта касательная, и три точки пересечения с другими. Что даёт четыре вурфа (двойных отношения), независимых для общего случая положения четырех точек на овале (так как существует другой овал, в котором касательные такие же, а произвольная из точек касания отличается). Такое построение требует фиксированного количества действий. Таким образом, мы получим дескриптор, состоящий из четырех чисел.

Иной дескриптор можно построить, если рассмотреть диагонали четырехугольника, полученного из точек пересечения соседних касательных. Диагонали этого описанного вокруг овала четырехугольника пересекаются и пересекают овал ровно в двух точках каждая. Таким образом, на каждой диагонали оказывается пять точек, по которым можно построить два независимых вурфа. Таким образом, мы получили другой дескриптор, состоящий из четырех чисел. Вычислительная сложность его построения $O(\log(n))$, т.к. единственные точки пересечения дуг и прямых могут быть найдены бинарным поиском.

3.4. Поиск совпадающих дескрипторов

Если овалы проективно совпадают, то какой-то из дескрипторов, построенных по пер-

вому овалу, совпадёт с каким-либо из построенных по второму. Попробуем найти эту пару. Можно ожидать, что она единственна, т.к. наборы дескрипторов соответствуют некоторым кривым в четырехмерном пространстве.

Сравнение двух дескрипторов проводится за константное количество действий. Для нахождения всех соответствующих пар и минимального из них достаточно $O(n * n)$ действий.

3.5. Сравнение овалов

Найдя соответствующие дескрипторы, сопоставим кривые друг другу, переведя проективным преобразованием в общую систему координат. Так как сопоставление некоторых точек фиксировано, для сравнения можно использовать какую-либо метрику расстояния между незамкнутыми кривыми, например, расстояние Фреше. Оно может быть посчитано с помощью $O(n^2 \log(n))$ действий [9].

3.6. Общая сложность алгоритма

- Построение дескрипторов требует $O(n^2)$ действий в случае дескрипторов первого вида и $O(n^2 \log(n))$ во втором случае.
- Сравнение дескрипторов требует $O(n^2)$ действий.
- Сравнение кривых для найденной пары соответствующих дескрипторов требует $O(n^2 \log(n))$ действий для нахождения расстояния Фреше.

Суммируя, получаем общую сложность алгоритма $O(n^2 \log(n))$.

Заключение

В работе предложено проективно инвариантное свойство трех точек на овале удовлетворять свойству пересечения чевиан. Построен искусственный пример, в котором конфигурацию из двух точек на овале нельзя дополнить до тройки, обладающей этим свойством. Конструктивно доказано, что в общем (невырожденном) случае достроить до тройки, обладающей этим свойством, возможно не менее чем двумя способами.

Предложен переборный алгоритм для сопоставления овалов общего вида вычислительной

сложности $O(n^2 \log(n))$ в отличие от ранее предложенных алгоритмов сложности $O(n^3)$.

Литература

1. Шемякина Ю.А. Использование точек и прямых для вычисления проективного преобразования по двум изображениям плоского объекта // Информационные технологии и вычислительные системы. 2017. № 3. С. 79-91.
2. A.I. Novikov, V.A. Sablina, M.B. Nikiforov, A.A. Loginov. The contour analysis and image-superimposition problem in computer vision systems // Pattern recognition and image analysis // Т. 25, № 1, С. 73-80.
3. Николаев П.П. Распознавание проективно преобразованных плоских фигур. I. Анализ и инвариантное отображение составных овалов // Сенсорные системы. 2011. Т. 25, № 2. С. 99–118.
4. Николаев П.П. Распознавание проективно преобразованных плоских фигур. VIII. О вычислении ансамбля ротационной корреспонденции овалов с симметрией вращения // Сенсорные системы. 2015. Т. 29, № 1. С. 28–55.
5. Селиверстов А.В. О симметрии проективных кривых // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2016. № 3. С. 28–55.
6. Николаев П.П. Распознавание проективно преобразованных плоских фигур. IX. Методы описания овалов с фиксированной точкой на контуре // Сенсорные системы. 2015. Т. 29, № 3. С. 213–244.
7. Савчик А.В., Николаев П.П. Теорема о пересечении Т- и Н-поля // Информационные процессы. 2016. Т. 16, № 4. С. 430–443. URL: <http://www.jip.ru/2016/430-443-2016.pdf>.
8. Николаев П.П. Распознавание проективно преобразованных плоских фигур. X. Методы поиска октета инвариантных точек контура овала - итог включения развитой теории в схемы его описания // Сенсорные системы. 2017. Т. 31, № 3. С. 202–226.
9. Anil Maheshwari, Jörg-Rüdiger Sack, Kaveh Shahbaz, Hamid Zarrabi-Zadeh. Improved Algorithms for Partial Curve Matching // Algorithms – ESA 2011: 19th Annual European Symposium, Saarbrücken, Germany, September 5-9, 2011. Proceedings / Ed. By Camil Demetrescu, Magnus M. Halldorsson. - Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2011. P. 518–529. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-642-23719-5_44.

Савчик Алексей Владимирович. Стажер-исследователь, аспирант Института проблем передачи информации им. А.А. Харкевича (ИППИ РАН). Окончил МГУ в 2014 году. Количество печатных работ: 2. Область научных интересов: проективные геометрические инварианты, машинное обучение. E-mail: savsmail@gmail.com

Николаев Петр Петрович. Главный научный сотрудник Института проблем передачи информации им. А.А. Харкевича (ИППИ РАН). Окончил МГУ в 1966 году. Доктор физико-математических наук. Количество печатных работ: 96. Область научных интересов: моделирование распознавания формы, сенсорная физиология, психофизика зрительного восприятия, математическое моделирование процессов зрения. E-mail: nikol@iitp.ru

Projective correspondence method for an oval with two fixed points

A. V. Savchik P. P. Nikolaev

In this paper, we study projective invariants for general configuration of an oval and two fixed points on its contour. We prove that there are at least two ways to extend such a configuration to an oval with three fixed points, which has a projectively invariant property of Cevians intersection. The proof is based on the construction of ellipses tangent to the oval at three points: inscribed and outscribed. An algorithm for the projective comparison of two ovals of a general type with computational complexity $O(n^2 \log(n))$ is presented. The algorithm is based on the full search of the fixed points. The specified construction is used as an intermediate step.

Keywords: projective geometry, projective invariants, inellipse, inscribed and outscribed ellipses.

References

1. Shemiakina J.A. 2017. Ispol'zovanie tochek i prjamyh dlja vychislenija proektivnogo preobrazovaniya po dvum izobrazhenijam ploskogo ob'ekta [The Usage of Points and Lines for the Calculation of Projective Transformation by Two Images of One Plane Object] Informacionnye tehnologii i vychislitel'nye sistemy [Information Technologies and Computing Systems]. (3) P. 79-91.
2. Novikov A.I., Sablina V.A., Nikiforov M.B., Loginov A.A. 2015. The contour analysis and image-superimposition problem in computer vision systems. Pattern recognition and image analysis. 25(1): 73–80.
3. Nikolaev P.P. 2015. Raspoznavanie proektivno preobrazovannyh ploskih figur. I. Analiz i invriantnoe otobrazhenie

- sostavnyh ovalov [Recognition of Projectively Transformed Planar Figures. I: Analysis and Invariant Mapping of Segmented Ovals]. *Sensornye sistemy* [Sensory Systems]. 25(2): 118–137.
4. Nikolaev P.P. 2015. Raspoznavanie proektivno preobrazovannyh ploskih figur. VIII. O vychislenii ansamblya rotacionnoj korrespondencii ovalov s simmetriей vrashcheniya [Recognition of projectively transformed planar figures. VIII. On computation of the ensemble of correspondence for “rotationally symmetric” ovals]. *Sensornye sistemy* [Sensory Systems]. 29(1): 28–55.
 5. Seliverstov A.V. 2016. O simmetrii proektivnyh krivyh [On symmetry of projective curves] *Vestnik TVGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]. (3): 59–66.
 6. Nikolaev P.P. 2015. Raspoznavanie proektivno preobrazovannyh ploskih figur. IX. Metody opisaniya ovalov s fiksirovannoj tochkoy na konture [Recognition of projectively transformed planar figures. IX. Methods for description of ovals with a fixed point on the contour]. *Sensornye sistemy* [Sensory Systems] 29(3): 213–244.
 7. Savchik A.V., Nikolaev P.P. 2016. Teorema o peresechenii T- i H-polyar [The Theorem of T- and H- Polars Intersections Count]. *Informacionnye processy* [Information Processes]. 2016. 16(4): 430–443. Available at: <http://www.jip.ru/2016/430-443-2016.pdf> (accessed August 31, 2017).
 8. Nikolaev P.P. 2017. Raspoznavanie proektivno preobrazovannyh ploskih figur. X. Metody poiska okteta invariantnyh toчек kontura ovala - itog vklyucheniya razvitoj teorii v skhemy ego opisaniya [Recognition of projectively transformed planar figures. X. Methods for finding an octet of invariant points of an oval contour - the result of introducing a developed theory into the schemes of oval description]. *Sensornye sistemy* [Sensory Systems]. 31(3): 202–226.
 9. Anil Maheshwari, Jörg-Rüdiger Sack, Kaveh Shahbaz, Hamid Zarrabi-Zadeh. 2011. Improved Algorithms for Partial Curve Matching. *Algorithms – ESA 2011: 19th Annual European Symposium, Saarbrücken, Germany, September 5-9, 2011. Proceedings* Ed. By Camil Demetrescu, Magnus M. Halldorsson. Springer Berlin Heidelberg. 518–529. Available at: https://doi.org/10.1007/978-3-642-23719-5_44

Savchik A.V., Visual Systems Lab (#11), Institute for Information Transmission Problems of the Russian Academy of Sciences (Kharkevich Institute), Moscow, Russia. E-mail: savsmail@gmail.com

Nikolaev P.P., Visual Systems Lab (#11), Institute for Information Transmission Problems of the Russian Academy of Sciences (Kharkevich Institute), Moscow, Russia. E-mail: nikol@iitp.ru