Информационная модель решения несовместной задачи оптимального планирования производства

Ю.М. Цодиков

Федеральное государственное учреждение "Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова" Российской академии наук", г. Москва, Россия

Аннотация. В статье рассматривается проблема интерпретации несовместного решения при большой размерности задачи оптимального планирования производства. Эта проблема связана с информационной сложностью модели. Приведена математическая постановка задачи. Предложен способ последовательного выбора вариантов для анализа несовместных ограничений. Этот способ выбора вариантов проверен на моделях заводов. Приведено объяснение целесообразности данного способа выбора вариантов, основанное на геометрии пространства несовместных ограничений.

Ключевые слова: оптимальное производственное планирование, несовместная задача, противоречивые модели, последовательное линейное программирование (ПЛП).

DOI 10.14357/20718632180406

Введение

При оптимальном планировании производства обычно выдвигаются требования достижения высокой эффективности и получения определенного количества продуктов при ограниченных ресурсах, что зачастую приводит к противоречивой модели и несовместной задаче. Модели оптимального планирования производства имеют, как правило, большую размерность. В этом случае трудности содержательной интерпретации несовместного решения являются одним из основных факторов, ограничивающих применение моделей большой размерности. Опыт применения систем оптимального планирования показывает, что эта проблема вынуждает специалистов плановых служб заводов и компаний в сложных случаях упрощать задачу для получения результатов расчетов в требуемые сроки. Модель оптимального планирования производства может быть несовместной в результате недостаточного количества ресурсов для выполнения поставленных задач в плановом периоде, ошибок в структуре и параметрах модели, а также совместного действия этих двух факторов. При планировании производства специалисты плановой службы завода часто вносят изменения в модель, что может приводить к противоречивым ограничениям.

При получении несовместного решения специалист должен: анализируя результаты, найти ограничения, которые являются причиной несовместного решения, а затем определить ресурсы, которые возможно дополнительно выделить в данных условиях работы завода. Это две сложные интеллектуальные задачи. Первая задача является интерпретацией несовместного решения. Когда определены ограничения, являющиеся причиной несовместного решения, то можно рассчитать варианты с изменением этих ограничений так, чтоб получить допустимое решение. Однако ограниченные ресурсы, являющиеся причиной несовместного решения, могут быть такие, что их невозможно изменить в сложившихся условиях. Например, поступившее на завод сырье необходимо переработать в плановом периоде, остановленные на ремонт установки нельзя ввести в эксплуатацию до окончания ремонта, действующие договоры необходимо выполнять. В таком случае нужно найти другие ограниченные ресурсы, которые можно изменить так, чтобы получить допустимое решение, либо установить, что это невозможно. Для этого рассчитывают разные варианты и анализируют результаты, что требует значительного времени и может помешать получить результаты расчета плана в требуемые сроки, что, в свою очередь, ограничивает применение моделей планирования большой размерности.

Существуют также другие факторы, которые ограничивают размерность задач оптимального планирования: производственная структура компании, организация транспорта продукции и сырья, организационная структура служб, принимающих решения по вопросам планирования. Все эти факторы учитываются при разработке модели и работе специалистов плановой службы, применяющих модели планирования.

При применении линейного программирования (ЛП) для решения задачи оптимального планирования в случае несовместных ограничений симплекс метод дает список найденных несовместных ограничений, который, как правило, не позволяет однозначно определить, какие ограниченные ресурсы являются причиной несовместности. Список несовместных ограничений получается на первом этапе симплекс метода при одинаковых штрафах за нарушение любых ограничений. Аналогичный список получается при применении других методов решения задачи ЛП.

В системах оптимального планирования производства для анализа несовместных ограничений предусматривают возможность избирательно задавать различные штрафы за нарушение ограничений по разным типам ресурсов, например, для количества сырья, количества производимых продуктов, величины запасов и других ресурсов. При большой размерности задачи планирования анализ полученных вариантов для интерпретации несовместного решения является достаточно сложной задачей.

Несовместные задачи оптимального планирования рассматривались в работах по линейному программированию [1-4]. Возможность анализа несовместных задач предусматривается в различных системах оптимального планирования производства [5-7]. В ряде работ рассматривается задача корректировки любых несовместных ограничений так, чтобы получить допустимое решение [8, 9]. Аналогичный подход для производственного планирования не рассматривается, так как большую часть ограничений нельзя изменять. В том числе нельзя изменить ограничения на качество продуктов (они определены стандартами), условия материального баланса, максимальную производительность установок и другие. Вопрос о сложности интерпретации решения несовместной задачи актуален при применении моделей большой размерности в производственных условиях и при обучении специалистов плановых служб.

Проблема интерпретации несовместных ограничений рассматривается далее для задачи планирования производства нефтеперерабатывающего завода (НПЗ). Сложность этой задачи определяется информационной сложностью модели, в которой различные параметры взаимосвязаны (качество сырья, режимы установок, количество и качество нефтепродуктов). В статье предложен метод упорядоченного выбора вариантов для анализа несовместных ограничений.

1. Модель оптимального планирования

Модель оптимального планирования НПЗ на один период имеет следующий вид [6]:

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_{jr} \quad \mathrm{F} \to \max \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ijr} x_{jr} = b_i \,, \; i = 1,..m \,, \; x_{jr} \geq 0 \quad x_{jr} \qquad (2)$$

$$a_{ijr} = f_{ij}(q_{ijr-1}), \quad (3)$$

$$q_{ijr-1} = \varphi_{ij}(x_{1r-1}, x_{2r-1}, \dots x_{nr-1}). \quad (4)$$

Здесь F - прибыль, x_{jr} - переменные задачи, потоки сырья, продукта или энергоносителя;

r – шаг вычислительного процесса (рекурсии), состоящий в решении задачи (1-2),

a_{ijr} - коэффициенты матрицы $A^r\{a_{ijr}\}$; c_j - цены, b_i - коэффициенты ограничений.

Часть коэффициентов матрицы a_{ijr} являются постоянными величинами, а другие определены соотношениями (3, 4). Задача ЛП (1-2) решается при заданных начальных значениях величин q_{ij0} и коэффициентов матрицы. После решения задачи ЛП (1-2) те коэффициенты матрицы a_{ijr}, которые определены зависимостями (3-4), пересчитываются на каждом шаге r вычислительного процесса. При первом решении задачи (1-2) r=1 начальные значения показателей q_{ij0} заданы. Задача (1-4) по существу является нелинейной со значительным числом переменных, которые входят в нелинейные зависимости (3-4).

Форма записи задачи (1-4) предполагает решение методом последовательного моделирования и оптимизации, который рассматривается как вариант метода последовательного линейного программирования (ПЛП) [5-7, 10, 11]. В результате моделирования (3-4) определяются параметры линеаризованной модели, а затем решается задача линейного программирования (1-2). Если нет допустимого решения задачи (1-2), то процесс завершается и затем нужно анализировать несовместное решение. Если есть допустимое решение, то после получения решения задачи ЛП проверяется точность моделирования путем сравнения значений параметров: q_{ijr-1} и q_{ijr}, а также коэффициентов матрицы a_{ijr}, которые пересчитываются. Этот процесс рекурсивно повторяется до получения заданной точности моделирования и линеаризации:

$$\left| q_{ijr} - q_{ijr-1} \right| \le \varepsilon_k . \quad (5)$$

Табл. 1. Параметры модели

Переменных задачи ЛП	2843
Ограничений задачи ЛП	4323
Ненулевых элементов матрицы	26273

Величины q_{ijr} имеют разную физическую природу и для каждого показателя качества k возможна разная точность определения ε_k.

Данные модели одного НПЗ в России приведены в Табл. 1, где показаны данные при расчете на один период планирования. Модель применялась для планирования производства, а также для расчета вариантов развития завода. Сложность модели планирования характеризуется числом переменных, ограничений и ненулевых элементов матрицы.

При такой размерности модели, которая представлена в Табл. 1, при отсутствии допустимого решения проявляются трудности интерпретации несовместных ограничений. Сложность модели характеризуется также нелинейными зависимостями (3-4), по которым пересчитывается около 10% ненулевых элементов матрицы.

2. Метод выбора вариантов для анализа несовместных ограничений

Несовместное решение задачи ЛП (1-2) может быть получено при первом шаге решения r=1 или при следующих рекурсиях на шаге r>1. Для содержательной интерпретации несовместного решения в модель вводят штрафы u_i>0, v_i>0 с разными коэффициентами d_i за нарушение некоторых типов ограничений. После введения штрафных переменных вместо (1-2) получим следующие ограничения и критерий:

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_{jr} - \sum_{i=1}^{m} d_i (u_i + v_i) \quad F \to \max \quad (6)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ijr} x_{jr} - u_i + v_i = b_i, \; i = 1,..m, \; x_{jr} \ge 0, \quad (7)$$

$$u_i \ge 0, \; v_i \ge 0 .$$

После введения штрафных переменных система (6-7) становится совместной. В полученном решении анализируются величины штрафных переменных. Введение штрафов является инструментом исследования модели. Такая возможность исследования модели предусматривается в различных системах оптимального планирования [5, 10, 12]. В системе моделирования НПЗ [7] можно ввести штрафы избирательно с разными коэффициентами d_i за нарушение различных типов ограничений: показателей качества нефтепродуктов, производительности установок, условий материального баланса, запасов нефтепродуктов, энергозатрат и других. С целью исследования вводят штрафные переменные и по тем ограничениям, которые невозможно изменить по технологическим условиям производства.

Специалист по планированию вводит штрафные переменные в соответствии со своими представлениями о возможных причинах несовместности, основанных на его знаниях модели, системы моделирования, технологии производства и текущих условий работы завода. Необходимая информация получается путем совместной работы группы специалистов по планированию с технологами, производственным отделом, лабораторией и другими службами. Для определения причин несовместности рассчитываются и анализируются несколько вариантов с различными коэффициентами d_i для штрафных переменных. Сформированные варианты отражают данные модели и человеческий фактор - знания специалистов. На выбор этих вариантов и их анализ затрачивается много времени специалистов плановой службы НПЗ. В результате часто возникают трудности в расчете плана к нужному сроку.

Логично предположить, что для варианта с меньшим числом штрафных переменных u_i>0 , v_i>0 проще анализировать несовместные ограничения и дать интерпретацию этим ограничениям. Эта гипотеза о сложности интерпретации может быть объяснена геометрией пространства несовместных ограничений для задачи ЛП специальной структуры.

Примем следующий метод выбора вариантов со штрафными переменными для анализа несовместных задач с целью сократить перебор вариантов. Метод выбора основан на предположении, что полученное решение со штрафами будет проще содержательно интерпретировать при меньшем числе несовместных ограничений. Из нескольких решений с разными штрафами (обычно 2-4) выбираем один вариант с минимальным числом ограничений, которые нарушаются на величину штрафной переменной. В выбранном варианте, прежде всего, анализируем те ограничения со штрафами, которые повторяются и в других вариантах. В процессе анализа выбранного варианта решаются задачи с изменением некоторых ограничений, и специалист определяет, какие ресурсы можно изменить для получения допустимого решения.

Такая методика выбора вариантов для анализа несовместных задач применялась при разработке моделей НПЗ. При разработке модели часто выявляются ошибки, вызванные тем, что не учитываются направления потоков в специальных условиях: при ремонтах, при снижении количества сырья, изменении качества сырья и в других ситуациях. Описанный метод выбора вариантов позволял быстрее находить ограничения, которые стали причиной несовместного решения. При тестировании модели некоторые ошибки модели выявляются только при недостаточных или избыточных ресурсах. В этом случае задача без штрафных переменных является несовместной. В процессе обучения специалистов НПЗ анализу несовместных задач описанный метод выбора варианта оказался более успешным по сравнению с случайным выбором варианта, так как позволял быстрее найти те ограничения, которые являлись причиной несовместного решения.

3. Геометрия пространства несовместных ограничений

Можно дать объяснение описанного подхода к интерпретации несовместного решения на основе геометрии пространства несовместных ограничений. На основе примеров рассмотрим разные типы несовместных ограничений задачи ЛП. Выпишем задачу ЛП в удобном для дальнейшего виде:

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad \mathrm{F} \to \max \qquad (8)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \,,\; i = 1,...m \,,\; x_j \geq 0 \qquad (9)$$

Для задачи (8-9) обозначим допустимое множество задачи M и допустимое множество двойственной задачи M*. Будем рассматривать несовместные задачи 1-го рода, когда нет допустимого решения прямой задачи (M пусто) и есть решение двойственной задачи на множестве M* [2]. Такие задачи 1-го рода имеют экономический смысл. Для несовместных задач 1-го рода рассмотрим примеры 3-х типов ограничений неравенств разной структуры.

1. Система несовместных ограничений такая, что при исключении любого одного неравенства система имеет допустимое решение. Пример приведен на Рис. 1, все ограничения *B, C, D* нарушаются в треугольнике 1.

2. Система несовместных ограничений такая, что при исключении определенного одного неравенства или нескольких система имеет допустимое решение. Пример приведен на Рис. 2, в 1 нарушается одно ограничение *C*, в 3 нарушаются два ограничения *B, D*, в 2 нарушаются все ограничения *B, C, D*.

3. В системе несовместных ограничений присутствуют ограничения 1-го и 2-го типа, перечисленные выше.

Ниже приведены неравенства 1-го и 2-го примера, а затем графики этих двух примеров на Рис. 1 и Рис. 2. Примеры 1 и 2 описывают специальные случаи несовместной задачи.

Неравенства 1-го примера:

(B) $-x_1 + x_2 + 1 \geq 0$

(C) $-x_1 - x_2 + 7 \geq 0$

(D) $5x_1 + x_2 - 12 \geq 0$

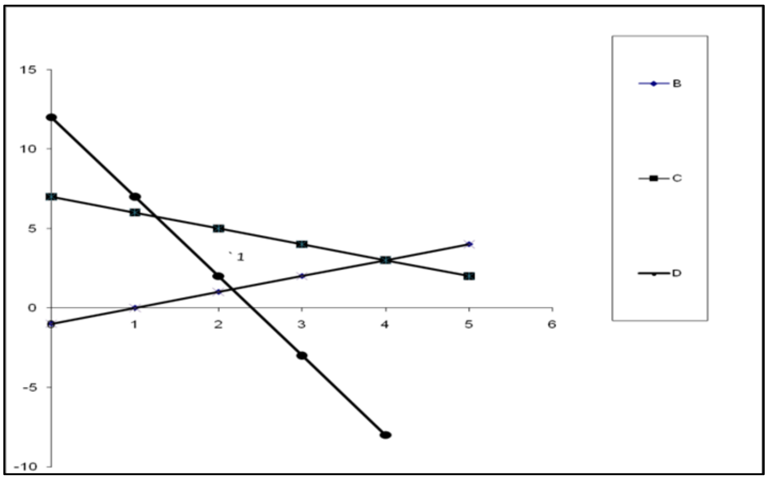

Рис. 1. Пример несовместных ограничений: в треугольнике 1 все неравенства не выполняются

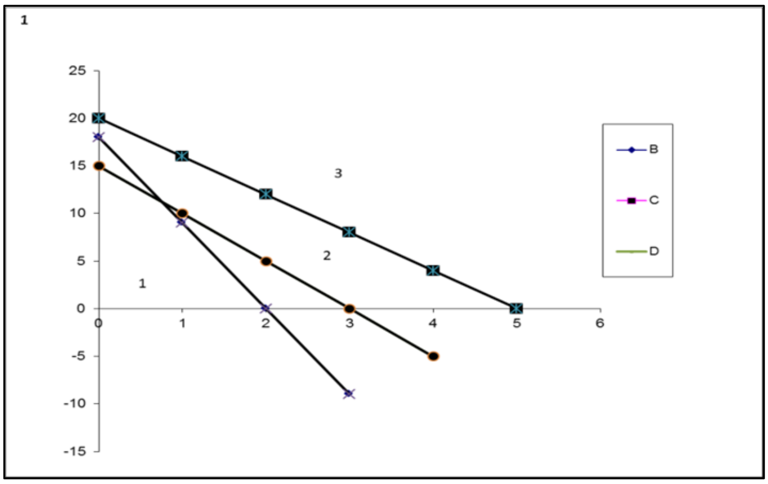

Рис. 2. Второй пример несовместных ограничений

Неравенства 2-го примера:

(B) $-9x_1 - x_2 + 18 \geq 0$

(C) $-4x_1 - x_2 + 20 \geq 0$

(D) $-5x_1 - x_2 + 15 \geq 0$

Симплекс метод на этапе поиска допустимого решения определяет дополнительные переменные u_i из условия:

$$\varphi = \min \sum_{i=1}^{m} u_i \tag{10}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + u_i \geq b_i, \ i = 1,...m, \ x_j \geq 0, \ u_i \geq 0.$$

В 1-м примере на Рис. 1 для 2-х переменных симплекс метод на этапе поиска допустимого решения (10) даст список несовместных ограничений, включающий все ограничения с переменными u_i>0, для i=1, 2, 3. Хотя для получения допустимого решения достаточно исключить только одно ограничение, любое из этих трех. Пример 1-го типа на Рис. 1 дает геметрическую интерпретацию и объясняет, почему симплекс метод на этапе поиска допустимого решения может выдавать значительное число несовместных ограничений, в том случае, когда отсутствие допустимого решения может быть вызвано только одним ограничением. Этот факт известен из опыта решения задач ЛП большой размерности.

В аналогичном примере при n переменных все $n+1$ ограничения образуют n-мерный симплекс, в котором эти ограничения не выполняются. На этапе поиска допустимого решения задачи (10) получим u_i>0 для $i=1,\dots, n+1$. Хотя при n переменных также достаточно исключить только одно ограничение, чтобы получить допустимое решение. В подобном примере при 3-х переменных 4 ограничения образуют тетраэдр, в котором эти ограничения не выполняются. Если бы для этого примера получать решение с одним несовместным ограничением, то тогда просто было бы определить причину нарушения ограничений.

В примере на Рис. 2 симплекс метод на этапе поиска допустимого решения (10) даст решение на границе области 1, когда только одно ограничение не выполняется. В этом случае интерпретация несовместной задачи очевидна. Этот пример показывает, что при такой геометрии пространства несовместных ограничений результаты симплекс метода на этапе поиска допустимого решения просто интерпретировать. При ограничениях 1-го и 2-го типа в примере 3 для двух переменных можно получить результат, аналогичный результату для первого примера.

Из этих примеров структуры несовместных задач видно, что полученное решение будет проще для содержательной интерпретации при меньшем числе несовместных ограничений в решении. Приняв эту гипотезу о сложности интерпретации, сформулируем задачу поиска минимального числа несовместных ограничений системы (9) по критерию минимума числа дополнительных переменных u_i>0. Такая задача имеет вид:

$$Z = \min \sum_{i=1}^{m} Sign\,(u_i), \tag{11}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + u_i \geq b_i, \ i = 1,...m, \ x_j \geq 0, \ u_i \geq 0, \tag{12}$$

где $Sign(u_i) = \begin{cases} 1, \text{если } u_i > 0 \\ 0, \text{если } u_i = 0 \end{cases}$

Задача (11-12) является существенно более сложной, чем поиск допустимого решения (8-9). В приведенном выше 1-м примере Z=1, для 2-го примера также Z=1.

Формулировка задачи (11-12) демонстрирует сложность проблемы интерпретации несовместных ограничений. Для (11-12) может быть получено приближенное решение. В качестве приближенного решения этой задачи рассматриваем решение, которое получено выбором одного варианта с минимальным числом переменных u_i>0 из нескольких вариантов, удовлетворяющих условиям (12). Аналогично для системы (6-7) можно объяснить метод выбора одного варианта решения задачи для анализа и интерпретации несовместных ограничений. Когда из нескольких вариантов выбираем один вариант с минимальным числом переменных u_i>0, то по существу решаем приближенно задачу, аналогичную (11).

Заключение

В работе исследована проблема интерпретации решения несовместной задачи оптимального планирования. Приведена математическая формулировка и показана сложность этой задачи. Описан алгоритм выбора вариантов для анализа несовместных ограничений, который применялся для интерпретации решения несовместных задач оптимального планирования производства. Приведено обоснование алгоритма на основе геометрии пространства несовместных ограничений задачи ЛП.

Литература

1. Dantzig G.B. Linear programming and extensions. Princeton University Press. 1998.
2. Еремин И.И. Противоречивые модели оптимального планирования. М.: Наука, 1988. 305с.
3. Orchard-Hays W. Advanced Linear-Programming Computing Techniques. McGraw-Hill, 1968, 355 p.
4. Orchard-Hays W. Some additional views on the simplex method and the geometry of constraint space. IIASA, 1976. 76 p.
5. Coxhead R.E. Integrated Planning and Scheduling Systems for the Refining Industry // Optimization in industry. Mathematical Programming and Modeling Techniques in Practice. Ed. Ciriani T.A., Leachman R.C. J. - Wiley&Sons, 1994. - P. 185-199.
6. Цодиков Ю.М., Хохлов А.С. Нелинейные модели оптимального планирования работы нефтеперерабатывающего завода // Тр. VII Московская международная конференция по исследованию операций (ORM2013) Т.2 / М: ВЦ РАН, 2013. –С. 54–56.
7. Refinery and Petrochemical Modeling System (RPMS). WWW.Honeywell.com. (дата обращения 10.12.2017).
8. Попов Л.Д. Применение барьерных функций для оптимальной коррекции несобственных задач линейного программирования 1-го рода // Автоматика и телемеханика. –2012, №3, –С.3–11.
9. Скарин В.Д. О некоторых универсальных методах коррекции несобственных задач выпуклого программирования // Автоматика и телемеханика. –2012, №3, –С. 99–110.
10. Дудников Е.Е., Цодиков Ю.М. Типовые задачи оперативного управления непрерывным производством. – М.: Энергия, 1979.
11. Lasdon L.S. An improved successive linear programming algorithm // Management Science. – 1985, –Vol. 31, №10, –P.1312–1331.
12. Хоботов Е.Н. Модели планирования и управления по смешению масел // Автоматика и телемеханика. 2008, №11, С. 178–189.

Цодиков Юлий Моисеевич. Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук г. Москва, Россия. Старший научный сотрудник, кандидат технических наук. Количество печатных работ: более 30 (в т.ч. 1 монография). Область научных интересов: системы управления технологическими процессами и предприятиями, информационные технологии. E-mail: tsodikov_y@mail.ru

Information model for solving the infeasible problem of optimal production planning

Y.M. Tsodikov

Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

The article deals with the problem of interpretation of an infeasible solution for a large-scale of the problem of optimal production planning. The formulation of the problem of optimal planning refinery is given. This formulation of the problem provides a solution by the method of successive linear programming (SLP). The complexity of the interpretation of infeasible constraints for large-scale planning problems is shown. A method of sequential choice of variants for the analysis of infeasible constraints is proposed. This way of selecting options has been tested on plant models. This tool was used in training specialists and in developing models of plants. The justification of the proposed method for selecting the variant for the analysis of infeasible constraints is given, based on the geometry of constraint space. An example of infeasible constraints is the increase in the complexity of interpreting the causes of the infeasible solution with the increase in the dimension of the problem. This is well matched with the solution experience and known data for a large-scale of the optimization problems.

Keywords: optimal production planning, successive linear programming (SLP), infeasible problem.

DOI 10.14357/20718632180406

References

1. Dantzig G.B. 1998. Linear programming and extensions. Princeton University Press.
2. Eremin I.I. 1988. Protivorechivye modeli optimal'nogo planirovaniya [Contradictory models of optimal planning]. Moscow: Nauka. 305 p.

3. Orchard-Hays W. 1968. Advanced Linear-Programming Computing Techniques. McGraw-Hill. 355 p.
4. Orchard-Hays W. Some additional views on the simplex method and the geometry of constraint space. IIASA, 1976. 76 p.
5. Coxhead R.E. Integrated Planning and Scheduling Systems for the Refining Industry // Optimization in industry. Mathematical Programming and Modeling Techniques in Practice. Ed. Ciriani T.A., Leachman R.C. J. - Wiley&Sons, 1994. - P. 185-199.
6. Tsodikov Y.M., Hohlov A.S. 2013. Nelineinye modeli optimalnogo planirovaniya neftepererabatyvayschego zavoda. ["Non-linear Model for Optimal Planning of Refinery"] Trudy "VII Moscow mezhdunarodnaiya konferentsii po issledovaniyu operatsii" ["VII Moscow International Conference on Operation Research (ORM2013)" Proceedings]. Moscow 54–56.
7. Refinery and Petrochemical Modeling System (RPMS). WWW.Honeywell.com. (accessed December 10, 2017).
8. Popov L.D. 2012. Primeneniye bar'yernykh funktsiy dlya optimal'noy korrektsii nesobstvennykh zadach lineynogo programmirovaniya 1-go roda [Application of barrier functions for optimal correction of improper linear programming problems of the first kind]. // Avtomatika i telemekhanika [Automation and telemechanics] 3:3–11.
9. Skarin V.D. 2012. O nekotorykh universal'nykh metodakh korrektsii nesobstvennykh zadach vypuklogo programmirovaniya [On some universal methods for correcting improper convex programming problems]. Avtomatika i telemekhanika [Automation and telemechanics] 3:99-110.
10. Dudnikov E.E., Tsodikov Y.M.1979. Tipovye zadachi operativnogo upravleniya nepreryvnym proizvodstvom [Typical problems of operational management of continuous production]. Moscow: Energy 272 p.
11. Lasdon L.S. An improved successive linear programming algorithm // Management Science. – 1985, –Vol. 31, N10, – P.1312–1331.
12. Hobotov E.N. 2008. Modeli planirovaniya i upravleniya po smesheniyu masel [Models of planning and management of oil mixing]. Avtomatika i telemekhanika [Automation and telemechanics] 11:178-189.

Y.M. Tsodikov. PhD, Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, 65 Profsoyznaia str., Moscow, 117997, Russia, e-mail: tsodikov_y@mail.ru