

Синтез в слабо нелинейной задаче управления на основе SDRE техники на конечном интервале

Д. А. Макаров^{1,II}, М. В. Хачумов^{1,III}

^I Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, г. Москва, Россия

^{II} Московский физико-технический институт, г. Долгопрудный, Россия

^{III} Российский университет дружбы народов, г. Москва, Россия

Аннотация. В работе для одного класса слабо нелинейных систем с зависящими от состояния коэффициентами рассматривается эвристический подход к построению нелинейного управления с помощью динамической обратной связи. Особенностью постановки задачи является выделение двух различных векторов: выхода системы и вектора регулируемых координат. Оценки неизменяемых переменных получаются с помощью наблюдателя состояния полного порядка. Проведены численные эксперименты для задачи управления моделью двухколесной тележки, показывающие работоспособность и эффективность предложенного алгоритма управления.

Ключевые слова: нелинейное управление, наблюдатель состояния, SDRE техника, двухколесный автономный робот.

DOI 10.14357/20718632200402

Введение

Для построения синтезирующего управления в нелинейных задачах применяется множество подходов. Например, линеаризация обратной связью [1], бекстепинг [2], управление с прогнозирующими моделями [3], методы, использующие дифференциальную плоскостность системы [4, 5], и другие. Как правило, их применение ограничено некоторым допустимым классом систем.

Одной из современных техник при построении регуляторов в нелинейных системах является техника SDRE, которая получила в последнее время достаточно большое распространение (об-

зоры [6-8]). Она основана на представлении исходной нелинейной системы в формально линейном виде, в котором матрицы зависят от состояния системы. Для построения управления вводится квадратичный критерий, элементы весовых матриц которого также могут быть функциями состояния системы. Стабилизирующее управление строится с помощью формального применения алгоритма Калмана для линейно-квадратичной задачи оптимального управления. Таким образом, вместо решения соответствующего уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана, которое в общем случае может быть достаточно трудоемким, используется численное решение матричного алгебраического уравнения типа

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 17-29-07053, 17-07-00281 и 17-29-07003).

Риккати с зависящими от состояния коэффициентами (State-Dependent Riccati Equation - SDRE), поэтому данная техника и получила такое название. Конечно, такой подход является эвристическим, однако он был успешно использован для множества практических задач [7, 8], что обусловлено следующими его преимуществами: широким классом допустимых управляемых систем (требуется лишь стабилизируемость и детектируемость соответствующих матриц системы и критерия для каждого допустимого состояния системы), простотой реализации, некоторой субоптимальностью относительно заданного функционала и др. К недостаткам подхода можно отнести необходимость численного решения SDRE в темпе функционирования объекта управления, что в условиях ограниченных вычислительных ресурсов может быть труднореализуемо.

Данная техника была применена и для решения задач управления на конечном интервале времени, где уже используется дифференциальное матричное уравнение типа Риккати с зависящими от состояния коэффициентами [9, 10]. Приближенное решение этого уравнения осуществлялось с помощью вспомогательного линейного матричного уравнения Ляпунова, для которого известна форма решения. Тем не менее, шаги алгоритма выполняются при условии «замораживания» коэффициентов, что обуславливает повторение всех расчетов с некоторым шагом, зависящим от темпа функционирования объекта, и сопровождаются значительным числом операций, выполняемых при нахождении управления. Этот подход использовался в ряде работ, например, [11-13].

В работе [14] на основе подхода SDRE был предложен численно-аналитический алгоритм построения стабилизирующего синтезирующего управления на полуоси. Его суть заключается в нелинейной коррекции линейного управления на основе подбора матриц квадратичного критерия качества. Преимуществом такого способа является снижение вычислительной сложности по сравнению с обычным подходом SDRE благодаря возможности использования аналитических представлений. На основе метода из [14] в работе [15] был предложен новый подход для решения слабо нелинейной задачи слежения за эталонной траекторией на конеч-

ном интервале времени, позволяющий приближенно решать дифференциальное SDRE. Его достоинством, так же как и метода из [14], является существенное снижение вычислительной сложности алгоритма управления по сравнению с подходом из [9, 10]. В [17, 18] результаты из [15] были перенесены на задачу слежения при частичном измерении вектора состояния. Оценки неизмеряемых координат получались с помощью наблюдателя состояния полного порядка.

В настоящей работе рассматривается некоторая слабо нелинейная задача оптимального управления на конечном интервале, приближенное решение которой осуществляется на подхода из [15-18], разработанного для нелинейных задач слежения. Особенностью рассматриваемой постановки по сравнению с [15-18] является отсутствие заданной эталонной траектории движения, а также выделение двух в общем случае различных векторов: вектора регулируемых координат, который входит в минимизируемый критерий качества, и вектора выхода системы, состоящего из измеряемых переменных. Отметим, что, в частности, регулируемые координаты могут совпадать со всем состоянием системы или с ее выходом. Для оценки неизмеряемых координат, как и в [15-18], используется наблюдатель полного порядка. Работоспособность предложенного метода исследуется на примере управления моделью двухколесной тележки.

1. Синтез управления

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления. Требуется минимизировать функционал

$$I(u) = \frac{1}{2} z^T(t_1) F z(t_1) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (z^T Q(z, \mu) z + u^T R u) dt \rightarrow \min_u, \quad (1)$$

где $z = C_2 x$, $Q(z, \mu) = Q_0 + \mu Q_1(z)$, заданные симметрические весовые матрицы $Q(z, \mu) \geq 0$, $Q_0 > 0$, $R > 0$, $F > 0$ при $z \in Z$, $0 < \mu \leq \mu_0$ (здесь и далее знаками >0 (≥ 0) обозначается положительная определенность (полуопределенность) соответствующей мат-

рицы, знак «Т» означает транспонирование), μ_0 – некоторое заданное достаточно малое положительное число, вдоль траекторий системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(x, \mu)x + B(x, \mu)u, \quad y = C_1x, \quad x(t_0) = x^0, \\ A(x, \mu) &= A_0 + \mu A_1(x), \quad B(x, \mu) = B_0 + \mu B_1(x), \\ x &\in X \subset \mathbb{R}^n, \quad y \in Y \subset \mathbb{R}^m, \quad z \in Z \subset \mathbb{R}^l, \\ u &\in \mathbb{R}^r, \quad t \in [t_0, t_1], \quad 0 < \mu \leq \mu_0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь x , y , z и u – векторы состояния, выхода, регулируемых координат и управления соответственно; A_0 , B_0 , C_1 и C_2 – известные постоянные матрицы; $A_1(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_1(x) \in \mathbb{R}^{n \times r}$ – известные матрицы с достаточно гладкими и ограниченными по аргументу x элементами; X , Y , Z – некоторые ограниченные множества, X , Y и Z включают 0; μ – известный постоянный параметр.

Для приближенного решения (1)-(2) применим алгоритм из [15-18], в котором, однако, предполагалось $z \equiv y$. Здесь обобщим этот алгоритм на случай $z \neq y$. При этом сначала изложим процедуру построения управления при условии, что вектор состояния x являются полностью измеряемым (т.е. C_1 – единичная матрица соответствующей размерности), а затем приведем алгоритм построения наблюдателя состояния, оценки которого будут использоваться вместо неизвестного вектора x .

Итак, согласно подходу из [15], синтезирующее управление имеет вид

$$u(x, \mu, t) = -K(x, \mu, t)x = u_0(x) + \mu u_1(x, t, \mu), \quad (3)$$

где $K(x, \mu, t) = R^{-1}(B_0 + \mu B_1(x))^T (P_0 + \mu P_1(x, t))$, $u_0(x) = -R^{-1}B_0^T P_0 x$ – линейная часть, а нелинейная коррекция определяется выражением $\mu u_1(x, t, \mu) = -\mu R^{-1} (B_1^T(x)P_0 + (B_0 + \mu B_1(x))^T P_1(x, \mu, t))x$; матрицы P_0 и $P_1(x, t)$ определяются ниже. Введем условия из [15]:

I. Траектории замкнутой системы (2) существуют, единственны и принадлежат X на $[t_0, t_1]$ для любого непрерывного управления $u(t)$, где X – некоторое ограниченное множество пространства состояний; элементы матриц $A_1(x), B_1(x), Q_1(z)$ ограниченные, непрерывные

и достаточно гладкие при $x \in X, z \in Z, \mu \in (0, \mu_0]$.

II. Тройка матриц $\{A_0, B_0, C_2\}$ стабилизируема и наблюдаема.

III. Матрицы системы $A_0, A_1(x), B_0, B_1(x), C_2$ и симметрические матрицы критерия $R > 0, Q_0 \geq 0, Q_1(z) \geq 0, F > 0$, а также $\mu_0 > 0$ таковы, что $P_0 + \mu P_1(x, t) > 0$ при $x \in X, z \in Z, t \in [t_0, t_1], \mu \in (0, \mu_0]$.

Модифицированный численно-аналитический алгоритм построения управления из [15] при условиях I-III состоит из следующих шагов.

1. Вычисляется P_0 как положительно определенное решение уравнения

$$P_0 A_0 + A_0^T P_0 - P_0 B_0 R_0^{-1} B_0^T P_0 + C_2^T Q_0 C_2 = 0. \quad (4)$$

2. Находится $P_1(x, \mu, t)$ с помощью

$$\begin{aligned} P_1(x, \mu, t) &= e^{A_{Pcl,0}^T(t_1-t)} M_P e^{A_{Pcl,0}(t_1-t)} + \\ &+ \int_0^\infty e^{A_{Pcl,0}^T \sigma} D_P(x) e^{A_{Pcl,0} \sigma} d\sigma, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} D_P(x) &= P_0 (A_1 - B_1 R^{-1} B_0^T P_0) + (A_1 - B_1 R^{-1} B_0^T P_0)^T P_0 + \\ &+ C_2^T Q_1 C_2, \quad A_{Pcl,0} = A_0 - B_0 R^{-1} B_0^T P_0, \quad \text{а матрица} \\ M_P &\text{ находится как} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_P &= \frac{1}{\mu} (C_2^T F C_2 - P_0) - \\ &- \int_0^\infty e^{A_{Pcl,0}^T \sigma} D_P(x(t_1)) \Big|_{x(t_1)=x(t)} e^{A_{Pcl,0} \sigma} d\sigma. \end{aligned}$$

3. Определяется итоговое управление (3).

Замечание 1. Отметим, что сходимость интегралов в (5) следует из условий I и II, а именно: условия II гарантируют существование матрицы P_0 , такой что $\max_i \operatorname{Re} \lambda_i(A_{Pcl,0}) = -\rho < 0, i = \overline{1, n}$ [19], что, в свою очередь, позволяет говорить о стремлении матричной экспоненты $e^{A_{Pcl,0} \sigma}$ к нулевой матрице при $\sigma \rightarrow \infty$ [20]; вместе с тем, ограниченность и непрерывность матриц системы и критерия, определенные в условии I, позволяют говорить об ограниченности элементов матри-

цы D_p , при $x \in X, z \in Z$, а, следовательно, и о сходимости несобственных интегралов в (5)

Замечание 2. Условие III в силу наличия условий I-II всегда может быть выполнено при достаточно малом μ_0 [16].

Замечание 3. По аналогии с [21], здесь с помощью функции Ляпунова $V = x^T P_0 x$ можно доказать, что при достаточно малом μ_0 , дополнительных условиях на ограниченность производных матриц системы (2) и весовой матрицы $Q(z, \mu)$ критерия (1) имеет место асимптотическая устойчивость нулевого положения равновесия системы (2), (3).

В общем случае, т.е. когда C_l не является единичной матрицей, применения приведенного алгоритма необходимо построить наблюдатель состояния системы (2).

2. Синтез наблюдателя

Изложим алгоритм построения наблюдателя состояния полного порядка [18]

$$\begin{aligned} \dot{\chi} &= A(\chi, \mu)\chi + B(\chi, \mu)u + \\ &+ \Gamma(\chi, \mu, t)C_1(x - \chi), \quad \chi(0) = \chi^0, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\chi \in \mathbb{R}^n$ – вектор оценки состояния x , $\chi \in X$, а $\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times m}$ – подлежащая определению матрица коэффициентов наблюдателя. Матрица Γ согласно технике SDRE ищется в виде

$$\Gamma(\chi, \mu, t) = N(\chi, \mu, t)C_1^T R_\chi^{-1}, \quad (7)$$

где $N(\chi, \mu)$ есть решение уравнения

$$\begin{aligned} \dot{N}(\chi, \mu, t) &= A(\chi, \mu)N(\chi, \mu, t) + \\ &N(\chi, \mu, t)A^T(\chi, \mu) - \\ &- N(\chi, \mu, t)C_1^T R_\chi^{-1} C_1 N(\chi, \mu, t) + Q_\chi(\chi, \mu), \quad (8) \\ N(\chi(t_0), \mu, t_0) &= N^0 > 0. \end{aligned}$$

В (8) положительно полуопределённая при $\chi \in X, t \in [t_0, t_1], \mu \in (0, \mu_0]$ весовая матрица $Q_\chi(\chi, \mu)$, постоянные положительно определённые весовая матрица R_χ и начальное состояние N^0 определяют параметры процедуры синтеза наблюдателя.

Уравнение (8) имеет вид схожий с видом уравнения, получаемого для синтеза управле-

ния [17]. Поэтому для его решения применяется тот же подход, что выше использовался для нахождения u . Представим $N(\chi, \mu, t), Q_\chi(\chi, \mu)$ в виде $N(\chi, \mu, t) = N_0 + \mu N_1(\chi, \mu, t), Q_\chi(\chi, \mu) = Q_{\chi,0} + \mu Q_{\chi,1}(\chi)$, где $Q_{\chi,0} \geq 0, Q_{\chi,1}(\chi, \mu) \geq 0$ при $\chi \in X, t \in [t_0, t_1], \mu \in (0, \mu_0]$.

Далее введем условия из [17].

IV. Траектории замкнутой системы (6) на $[t_0, t_1]$ существуют, единственны и $\chi \in X$ для любых непрерывных $u(t)$ и $\Gamma(\chi, \mu, t)C_1$ при $x, \chi \in X, \mu \in (0, \mu_0]$; элементы матриц $A_1(\chi), B_1(\chi)$ ограниченные, непрерывные и достаточно гладкие при $\chi, \chi_r \in X$.

V. Тройка матриц $\{A_0^T, C_1^T, H_N\}$, где $H_N^T H_N = Q_{\chi,0}$, стабилизируема и наблюдаема.

VI. Матрицы системы $A_0^T, A_1^T(\chi), C_1^T$ и симметрические матрицы $R_\chi > 0, Q_{\chi,0} \geq 0, Q_{\chi,1}(\chi) \geq 0, N^0 > 0$, а также $\mu_0 > 0$ таковы, что $N_0 + \mu N_1(\chi, \mu, t) > 0$ при $\chi \in X, t \in [t_0, t_1], \mu \in (0, \mu_0]$.

Тогда при условиях IV-VI приведем следующий численно-аналитический алгоритм синтеза наблюдателя (6), аналогичный тому, что выше используется для построения обратной связи (3).

1. Вычисляется N_0 как положительно определенное решение матричного уравнения $A_0 N_0 + N_0 A_0^T - N_0 C_1^T R_\chi^{-1} C_1 N_0 + Q_{\chi,0} = 0$.
2. Находится $N_1(\chi, \mu, t)$ с помощью

$$\begin{aligned} N_1(\chi, \mu, t) &= e^{A_{Ncl,0}(t_1-t)} M_N e^{A_{Ncl,0}^T(t_1-t)} + \\ &+ \int_0^\infty e^{A_{Ncl,0}\sigma} D_N(\chi) e^{A_{Ncl,0}^T\sigma} d\sigma, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} M_N &= \frac{1}{\mu} (N^0 - N_0) - \\ &- \int_0^\infty e^{A_{Ncl,0}\sigma} D_N(\chi(t_1)) \Big|_{\chi(t_1)=\chi(t)} e^{A_{Ncl,0}^T\sigma} d\sigma. \end{aligned}$$

3. Определяется $\Gamma(\chi, \mu, t)$ с помощью (7), считая $N(\chi, \mu, t) = N_0 + \mu N_1(\chi, \mu, t)$.

4. Задавая произвольное начальное состояние $\chi^0 \in X$, находится наблюдатель (6).

Аналогично замечаниям 1-3, можно сделать следующие утверждения.

Замечание 4. Сходимость интегралов в (9) следует из условий I и V.

Замечание 5. Условие VI силу наличия условий IV-V всегда может быть выполнено при достаточно малом μ_0 [16].

Замечание 6. С помощью функции Ляпунова $V = x^T N_0 x$ можно доказать, что при достаточно малом μ_0 , дополнительных условиях на ограниченность производных матриц системы (2) и весовой матрицы $Q_\chi(\chi, \mu)$ имеет место асимптотическая устойчивость ошибки наблюдения $e = x - \chi$ наблюдателя (6), (7).

Теперь после нахождения $\Gamma(\chi, \mu, t)$ с помощью предложенного алгоритма можно, используя вместо неизвестного состояния x его оценку χ , применить управление (3) для приближенного решения задачи (1)-(2).

3. Управление моделью двухколесной тележки

Рассмотрим нелинейную систему, описывающую динамику тележки с двумя колесами, управляемыми независимо друг от друга [22]

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) &= d\omega(t)^2 + \frac{\tau_1(t)}{m_0 r} + \frac{\tau_2(t)}{m_0 r}, \\ \dot{\omega}(t) &= -\frac{dm_0 v(t)\omega(t)}{d^2 m_0 + I_0} + \frac{b\tau_1(t)}{(d^2 m_0 + I_0)r} - \frac{b\tau_2(t)}{(d^2 m_0 + I_0)r}, \\ \dot{x}(t) &= -\sin(\phi(t))v(t), \\ \dot{y}(t) &= \cos(\phi(t))v(t), \\ \dot{\phi}(t) &= \omega(t), \end{aligned} \tag{10}$$

где v, ω – линейная и угловая скорости тележки, являющиеся управлением; x, y, ϕ – координаты тележки и угол рыскания в земной декартовой системе координат yOx ; τ_1, τ_2 – крутящие моменты на левом и правом колесах (каналы управления); b – половина расстояния между

колесами тележки, d – расстояние от центра масс (CM) тележки до оси ее колес; m_0, I_0, r – масса, момент вращения и радиус колес тележки соответственно. На Рис. 1 представлена соответствующая системе (10) схема тележки, а используемые значения параметров системы представлены в Табл. 1.

Рассмотрим приближенное решение задачи (1)-(2) для (10) с помощью изложенного выше алгоритма на интервале регулирования от 0 до 5 секунд. Представим систему (10) в виде (2) с помощью следующих матриц и значения параметра

$$\begin{aligned} A_0 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.3636 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2.7273 & -2.7273 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0.2000\omega & 0 & 0 & 0 \\ -1.8182\omega & -1.8182v + 0.3636 & 0 & 0 & 0 \\ \cos(\phi) - 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin(\phi) & 0 & 0 & 0 & -0.1000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ B_1 &= 0_{5 \times 2}, C_2 = I_{5 \times 5}, \mu = 1, \end{aligned}$$

где $I_{n \times m}, 0_{n \times m}$ – единичная и нулевая матрицы соответствующих размерностей. Матрицы A_0, B_0 были найдены путем линеаризации (10) в точке ($v = 0.1, \omega = 0, x = 0, y = 0, \phi = 0$). Определим

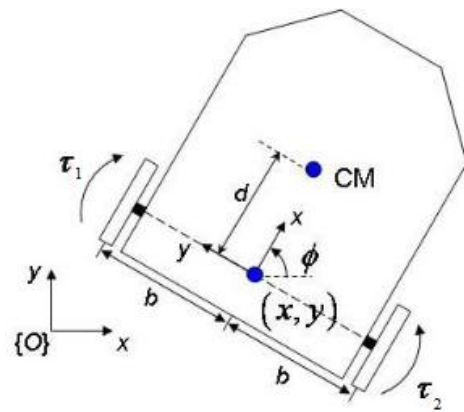


Рис. 1. Схема тележки

Табл. 1. Параметры системы

m_0 , кг	I_0 , кг·м ²	r , м	d , м	b , м
20	0.3	0.05	0.2	0.15

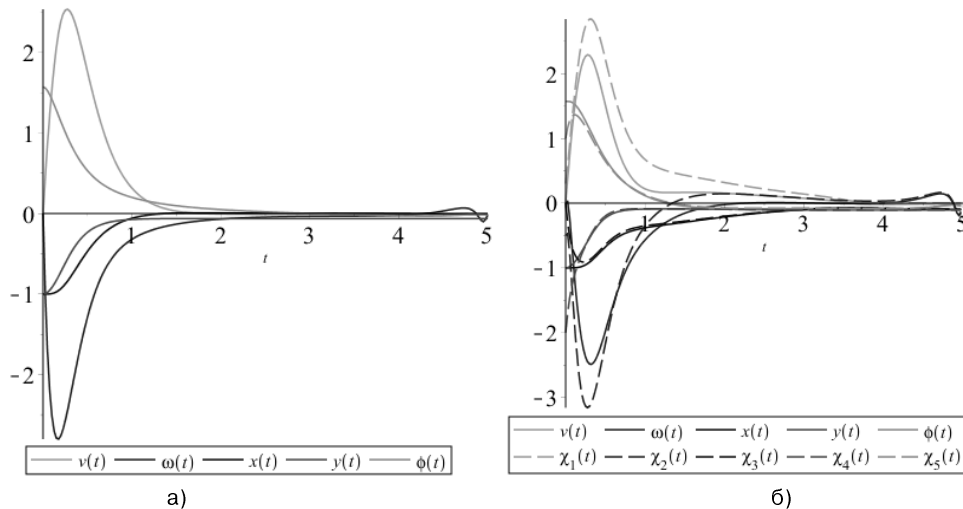


Рис. 2. Графики замкнутой системы для полного и частичного измерения вектора состояния

критерий (1) с помощью матриц $R = I_{2 \times 2}$, $Q_0 = F = \text{diag}\{10, 10, 50, 50, 30\}$, $Q_1 = 0_{5 \times 5}$. Зададим весовые матрицы наблюдателя следующим образом

$$Q_{\chi,1}(\chi) = Q_{\chi,0} = 100I_{5 \times 5}, \quad R_{\chi} = I_{3 \times 3}, \quad N^0 = 100I_{5 \times 5}.$$

На Рис. 2 для начальных условий $v(0) = 0$, $\omega(0) = 0$, $x(0) = -1$, $y(0) = -1$, $\phi(0) = 0.5\pi$ представлены результаты численного моделирования системы (10), замкнутой регулятором (3), на интервале времени от 0 до 5 секунд при условии полного измерения вектора состояния (случай а)), т.е. при $C_1 = I_{5 \times 5}$, и при условии измерения только координат x , y , ϕ (случай б)),

т.е. при $C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. В последнем

случае управление строится на основе переменных χ_i , $i = 1, 2, \dots, 5$, т.е. на оценках координат v , ω , x , y , ϕ , полученных с помощью построенного наблюдателя состояния. Начальные значения вектора состояния наблюдателя были заданы произвольным образом как $\chi_1(0) = 0.3$, $\chi_2(0) = -0.5$, $\chi_3(0) = 0$, $\chi_4(0) = -2$, $\chi_5(0) = 1$.

Видно, что оценки (обозначены пунктирными кривыми) со временем приближаются к настоящим значениям вектора состояния (непрерывные кривые) при заданных произвольных начальных условиях наблюдателя. Как можно видеть, в случае б) качество переходных процессов ухудшилось из-за возросшей ошибки регулирования в конечный момент времени.

На Рис. 3 представлены результаты эксперимента для системы (10), замкнутой линейно-квадратичным регулятором u_0 из (3), т.е. регулятором оптимальным для линеаризованной задачи (1), (10) при полном измерении вектора состояния. В этом случае наблюдатель состояния не строится и в управление подставляется непосредственно вектор состояния системы. Из проведенного эксперимента видно, что качество управления линейного регулятора существенно уступает построенному нелинейному регулятору из-за достаточно большой статической ошибки. Очевидно, достигнутое улучшение обеспечивается нелинейной коррекцией μ_{n1} , которая присутствует в нелинейном управлении (3).

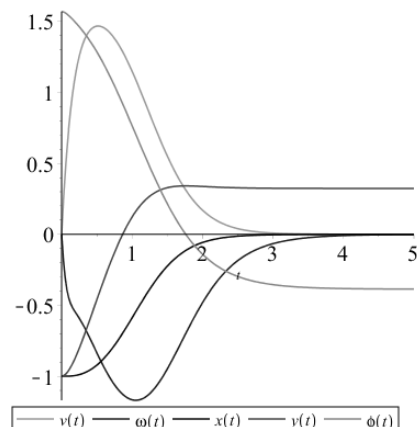


Рис. 3. Графики замкнутой системы с линейным управлением при полном измерении вектора состояния

Теперь рассмотрим задачу управления, когда $z \neq x$. Предположим, нужно перевести в окрестность нулевого положения пространственные координаты тележки и ее угол ориентации. Таким образом, вектор регулируемых координат и матрица C_2 имеют следующие значения

$$z = y = [x, y, \phi]^T, \quad C_2 = C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

На Рис. 4 представлены результаты моделирования замкнутого контура управления при тех же начальных условиях системы и наблюдателя. Как видно, регулируемые координаты переводятся в окрестность начала координат достаточно точно, тогда как оставшиеся координаты, а именно v и ω , имеют относительно большие значения в конечный момент управления. Отметим, что, как и ранее, с течением времени имеется сходимость оценок наблюдателя к истинным значениям вектора состояния системы.

Заключение

В данной работе рассмотрено построение приближенного управления и наблюдателя в слабо нелинейной задаче оптимального управления на конечном интервале времени, в которой матрицы системы и квадратичного критерия представлены в псевдолинейном виде. Особенностью рассмотренной задачи является выделение двух векторов: вектора выхода и вектора регулируемых координат. Достоинством предложенного подхода является получение аналитических выражений, которые существенно снижают вычислительные затраты. Проведенные численные эксперименты для задачи управления нелинейной моделью двухколесной тележки продемонстрировали работоспособность и эффективность предложенного алгоритма.

Литература

1. A. Isidori. Nonlinear Control Systems. Springer-Verlag, Berlin, 1995.
2. Khalil H. K., Grizzle J. W. Nonlinear systems. 3-ed. NJ: Prentice hall, 2002.
3. Camacho E. F., Alba C. B. Model predictive control. Springer Science & Business Media, 2013.

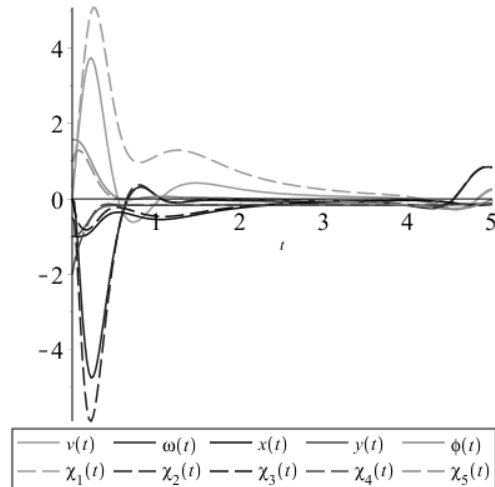


Рис. 4. Графики замкнутой системы при $z = y$

4. Четвериков В.Н. Плоскостность динамически линеаризуемых систем // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40, № 12. С. 1665-1674.
5. Belinskaya Yu. S., Chetverikov V. N. Covering Method for Point-to-Point Control of Constrained Flat System // IFAC-Papers OnLine. 2015. Vol. 48 (11). Pp. 924–929.
6. Nekoo S. R. Tutorial and Review on the State-dependent Riccati Equation // Journal of Applied Nonlinear Dynamics. 2019. Vol. 8(2). Pp. 109-166.
7. Çimen T. Survey of state-dependent Riccati equation in nonlinear optimal feedback control synthesis // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2012. Vol. 35(4). Pp. 1025-1047.
8. Cloutier J.R. State-Dependent Riccati Equation Techniques: An Overview // Proc. American Control Conference. 1997. Vol. 2. Pp. 932-936.
9. Heydari A., Balakrishnan S.N. Path Planning Using a Novel Finite Horizon Suboptimal Controller // Journal of guidance, control, and dynamics. 2013. Vol. 36(4). Pp. 1210-1214.
10. Heydari A., Balakrishnan S.N. Closed-Form Solution to Finite-Horizon Suboptimal Control of Nonlinear Systems // International Journal of Robust and Nonlinear Control. 2015. Vol. 25(15). Pp. 2687-2704.
11. Naidu D. S., Paul S., Rieger C. R. A Simplified SDRE Technique for Regulation in Optimal Control Systems // 2019 IEEE International Conference on Electro Information Technology (EIT). – IEEE, 2019. Pp. 327-332.
12. Khamis A., Naidu D.S., Kamel A.M. Nonlinear Finite-Horizon Regulation and Tracking for Systems with Incomplete State Information Using Differential State Dependent Riccati Equation // International Journal of Aerospace Engineering. Vol. 2014 (2014). 12 pages. <http://dx.doi.org/10.1155/2014/178628>.
13. Khamis A., Chen C. H., Naidu D. S. Tracking of a robotic hand via SD-DRE and SD-DVE strategies // Control (CONTROL), 2016 UKACC 11th International Conference on. IEEE. 2016. Pp. 1-6.

14. Дмитриев М.Г., Макаров Д.А. Гладкий нелинейный регулятор в слабо нелинейной системе управления с коэффициентами, зависящими от состояния. // Труды Института системного анализа РАН. Т. 64. №4. 2014. С. 53-58.
15. Макаров Д.А. Подход к построению нелинейного управления в задаче слежения с коэффициентами, зависящими от состояния Часть I. Алгоритм // Информационные технологии и вычислительные системы. 2017. №3. С. 10-19.
16. Макаров Д.А. Синтез управления и наблюдателя для слабо нелинейных систем на основе техники псевдолинеаризации // Моделирование и анализ информационных систем. 2017. Т. 24, № 6. С. 802–810.
17. Макаров Д.А. Построение управления и наблюдателя в слабо нелинейной задаче слежения с помощью дифференциальных матричных уравнений Риккати // Информационные технологии и вычислительные системы. 2018. № 4. С. 63-71.
18. Макаров Д.А. Численное моделирование следящего управления с наблюдением для модели продольной динамики самолета вертикального взлета и посадки. Математика и математическое моделирование. 2018. № 6. С. 72-87.
19. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. Москва: МИР, 1977. 653 с.
20. Б.Т. Поляк, М.В. Хлебников, Л.Б. Рапопорт. Математическая теория автоматического управления: Учебное пособие. М.: ЛЕНАНД, 2019. 504 с.
21. Dmitriev M. G., Makarov D. A. The stabilizing composite control in a weakly nonlinear singularly perturbed control system // Proceedings of 21st International Conference on System Theory, Control and Computing (ICSTCC), Sinaia. 2017. Pp. 589-594, doi: 10.1109/ICSTCC.2017.8107099.
22. Tang C. P. Differential flatness-based kinematic and dynamic control of a differentially driven wheeled mobile robot //2009 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics (ROBIO). IEEE, 2009. Pp. 2267-2272.

Макаров Дмитрий Александрович. Старший научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук (ФИЦ ИУ РАН), г. Москва, пр-т 60-летия Октября, 9. Старший научный сотрудник Московского физико-технического института (МФТИ), г. Долгопрудный, Институтский пер., 9, Россия. Количество печатных работ: более 50. Область научных интересов: управление сложными динамическими системами, робастные методы устойчивости и стабилизируемости, искусственный интеллект, экспертные системы. E-mail: makarov@isa.ru

Хачумов Михаил Вячеславович. Старший научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук (ФИЦ ИУ РАН), г. Москва, пр-т 60-летия Октября, 9. Старший преподаватель Российского университета дружбы народов (РУДН), г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6. Кандидат физико-математических наук. Количество печатных работ: более 60. Область научных интересов: интеллектуальное управление, беспилотные летательные аппараты, бортовые вычисления, траекторное движение летательных аппаратов, искусственный интеллект. E-mail: khmike@inbox.ru

SDRE-Based Synthesis in a Weakly Nonlinear Control Problem on a Finite Interval

D. A. Makarov^{1,||}, M.V. Khachumov^{1,|||}

¹Federal Research Center "Computer Science and Control" of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

^{||}Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia

^{|||}The Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia

Abstract. In this work, for one class of weakly nonlinear systems with state-dependent coefficients, a heuristic approach to constructing a nonlinear control using dynamic feedback is considered. A feature of the problem statement is the selection of two different vectors: the system output vector and the vector of adjustable coordinates. Estimates of unmeasured variables are obtained using a full-order state observer. Numerical experiments for control of the differentially driven wheeled mobile robot were carried out. The operability and effectiveness of the proposed control algorithm were shown.

Keywords: terminal control problem, nonlinear control, full-order state observer, SDRE technique, differentially driven wheeled mobile robot.

DOI 10.14357/20718632200402

References

1. A. Isidori. *Nonlinear Control Systems*. Springer-Verlag, Berlin, 1995.
2. Khalil H. K., Grizzle J. W. *Nonlinear systems*. 3-ed. NJ: Prentice hall, 2002.
3. Camacho E. F., Alba C. B. *Model predictive control*. Springer Science & Business Media, 2013.
4. Chetverikov V. N. Flatness of dynamically linearizable systems // *Differential equations*. 2004. Vol. 40(12). Pp. 1747-1756.
5. Belinskaya Yu. S., Chetverikov V. N. Covering Method for Point-to-Point Control of Constrained Flat System // *IFAC-Papers OnLine*. 2015. Vol. 48(11). Pp. 924–929.
6. Nekoo S. R. Tutorial and Review on the State-dependent Riccati Equation // *Journal of Applied Nonlinear Dynamics*. 2019. Vol. 8(2). Pp. 109-166.
7. Çimen T. Survey of state-dependent Riccati equation in nonlinear optimal feedback control synthesis // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2012. Vol. 35(4). Pp. 1025-1047.
8. Cloutier J.R. State-Dependent Riccati Equation Techniques: An Overview // *Proc. American Control Conference*. 1997. Vol. 2. Pp. 932-936.
9. Heydari A., Balakrishnan S.N. Path Planning Using a Novel Finite Horizon Suboptimal Controller // *Journal of guidance, control, and dynamics*. 2013. Vol. 36, No. 4. Pp. 1210-1214.
10. Heydari A., Balakrishnan S.N. Closed-Form Solution to Finite-Horizon Suboptimal Control of Nonlinear Systems // *International Journal of Robust and Nonlinear Control*. 2015. Vol. 25. No 15. Pp. 2687-2704.
11. Naidu D. S., Paul S., Rieger C. R. A Simplified SDRE Technique for Regulation in Optimal Control Systems // *2019 IEEE International Conference on Electro Information Technology (EIT)*. IEEE, 2019. Pp. 327-332.
12. Khamis A., Naidu D.S., Kamel A.M. Nonlinear Finite-Horizon Regulation and Tracking for Systems with Incomplete State Information Using Differential State Dependent Riccati Equation // *International Journal of Aerospace Engineering*. Vol. 2014 (2014). 12 pages. <http://dx.doi.org/10.1155/2014/178628>.
13. Khamis A., Chen C. H., Naidu D. S. Tracking of a robotic hand via SD-DRE and SD-DVE strategies // *Control (CONTROL)*, 2016 UKACC 11th International Conference on. IEEE, 2016. Pp. 1-6.
14. Dmitriev M.G., Makarov D.A. Smooth nonlinear controller in a weakly nonlinear control system with state-dependent coefficients [Gladkij nelinejnij reguljator v slabo nelinejnoj sisteme upravleniya s koefficientami, zavisyashchimi ot sostoyaniya]. // *Proceedings of the Institute for System Analysis of RAN [Trudy Instituta sistemnogo analiza RAN]*. 2014. Vol. 64(4). Pp. 53-58. In Russian.
15. Makarov D.A. Podhod k postroeniyu nelinejnogo upravleniya v zadache slezheniya s koefficientami, zavisyashchimi ot sostoyaniya CHast' I. Algoritm [A nonlinear approach to a feedback control design for a tracking state-dependent problem. I. An algorithm]. *Informacionnye tekhnologii i vychislitel'nye sistemy [Information technology and computer systems]*. 2017. No. 3. Pp. 10-19. In Russian.
16. Makarov D.A. Postroenie upravleniya i nablyudatelya v slabo nelinejnoj zadache slezheniya s pomoshch'yu differencial'nyh matrichnyh uravnenij Rikkati [The design of observer based tracking control for weakly nonlinear systems using differential matrix equations Riccati]. *Informacionnye tekhnologii i vychislitel'nye sistemy [Information technology and computer systems]*. 2018. No 4. Pp. 63-71. In Russian.
17. Makarov D.A. The simulation of observer based tracking control for the model of the longitudinal dynamics of a vertical takeoff and landing aircraft [CHislennoe modelirovanie sledyashchego upravleniya s nablyudeniem dlya modeli prodol'noj dinamiki samoleta vertikal'nogo vzleta i posadk]. *Mathematics and Mathematical Modeling [Matematika i matematicheskoe modelirovanie]*. 2018. No 6. Pp. 72-87. In Russian.
18. Dmitriev M. G., Makarov D. A. The stabilizing composite control in a weakly nonlinear singularly perturbed control system // *Proceedings of 21st International Conference on System Theory, Control and Computing (ICSTCC)*, Sinaia. 2017. Pp. 589-594, doi: 10.1109/ICSTCC.2017.8107099.
19. H. Kwakernaak, R. Sivan. *Linear Optimal Control Systems*. New York: Wiley-Interscience. 1972. 600 p.
20. B.T. Polyak, M.V. Khlebnikov, L.B. Rapoport. *Mathematical theory of automatic control: Textbook [Matematicheskaya teoriya avtomaticheskogo upravleniya: Uchebnoe posobie]*. Moscow: LENAND, 2019. 504 p. (in Russian).
21. Dmitriev M. G., Makarov D. A. The stabilizing composite control in a weakly nonlinear singularly perturbed control system // *Proceedings of 21st International Conference on System Theory, Control and Computing (ICSTCC)*, Sinaia. 2017. Pp. 589-594, doi: 10.1109/ICSTCC.2017.8107099.
22. Tang C. P. Differential flatness-based kinematic and dynamic control of a differentially driven wheeled mobile robot // *2009 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics (ROBIO)*. IEEE, 2009. Pp. 2267-2272.

Makarov D. A. Federal Research Center “Computer Science and Control” of Russian Academy of Sciences, senior researcher, Moscow, pr-t 60-letiya Oktyabrya, 9. Moscow Institute of Physics and Technology, senior researcher, Dolgoprudny, Institutskiy per., 9. Russia. Cand. Sci. (Physics and Mathematics). Author of 50 scientific papers. Research interests: nonlinear and robust control, composite control, artificial intelligence. E-mail: makarov@isa.ru

Khachumov M. V. Federal Research Center “Computer Science and Control” of Russian Academy of Sciences, senior researcher, Moscow, pr-t 60-letiya Oktyabrya, 9. The Peoples' Friendship University of Russia, senior researcher, Moscow, st. Miklouho-Maclay, 6. Cand. Sci. (Physics and Mathematics). Research interests: intelligent control, unmanned aerial vehicles, airborne computing, trajectory movement of aircraft, artificial intelligence. Author of 60 scientific papers. E-mail: khmike@inbox.ru