Симметрия и регулярность. Как это начиналось и к чему привело

И. А. Фараджев

Федеральное государственное учреждение "Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" Российской академии наук", г. Москва, Россия

Эта работа известного математика, одного из основателей алгебраической комбинаторики, прочитана как лекция на конференции [1] посвященной памяти А. А. Лемана и Б. Ю. Вейсфейлера. В ней не было ссылок, и автор, к сожалению, не успел превратить ее в полноценную статью. Это сделали за него члены редколлегии ИТиВС А. А. Иванов и М. Х. Клин.

DOI 10.14357/20718632200406

В истории, которую я хочу рассказать, я буду ссылаться на события и обстоятельства, в которых либо сам участвовал, либо был непосредственным свидетелем.

Эта история началась в Математической Лаборатории Института Теоретической и Экспериментальной Физики (ИТЭФ). Основная задача этого подразделения заключалась в математической и программистской поддержке физических исследований и разработок (расчет ядерных реакторов и ускорителей элементарных частиц, обработка наблюдений в пузырьковых камерах и т.д.). Однако, широта научных интересов директора Института, академика Абрама Исааковича Алиханова и руководителя Лаборатории профессора Александра Семеновича Кронрода [1], позволяла сотрудникам Лаборатории заниматься перспективными направлениями компьютерной математики, не имеющими прямого отношения к нуждам исследований физического Института. В частности, там занимались распознаванием образов (прототипы современных нейронных сетей), шахматным программированием (впоследствии разработанная в ИТЭФ'е программа, переписанная на более мощные машины, стала первым чемпионом мира среди шахматных программ), компьютерной графикой движущихся объектов (теперь это называется компьютерной анимацией).

Я начал работать в Лаборатории осенью 1966 года. Мне определили рабочее место в комнате с двумя молодыми математиками – Андреем Андреевичем Леманом и Борисом Юльевичем Вейсфейлером. В Лаборатории тогда работали два выдающихся математика – Евгений Михайлович Ландис и Георгий Максимович Адельсон-Вельский. Они первыми в СССР занялись оценкой вычислительной сложности дискретных алгоритмов (знаменитое АВЛ дерево) и привлекли к этому молодых сотрудников Лаборатории. В это время теория сложности алгоритмов делала первые шаги, были введены понятия полиноминально разре-

[1]«I. Faradjev. "Symmetry vs Regularity". How it started and what it led to. Conference in Algebraic Graph Theory "Symmetry vs Regularity". The first 50 years since Weisfeiler-Leman stabilization". July 1 - 7, 2018, Pilsen, Czech Republic. 49 slides https://www.iti.zcu.cz/wl2018/slides.html».

шимых и NP-полных задач и составлены первые списки задач, относящихся к этим классам. Оказалось, что две, практически важные задачи – линейное программирование и изоморфизм графов, выпадают из этой классификации. Для них неизвестны полиномиальные алгоритмы и не доказана NP-полнота. Впоследствии для задачи линейного программирования Леонидом Хачияном [2] был построен полиномиальный алгоритм, а ситуация с идентификацией графов до сегодняшнего времени не разрешена. Наибольшим достижением сейчас является квазиполиномиальный алгоритм Ласло Бабаи (2016) [3].

Естественно, что несколько молодых математиков Лаборатории (включая В. Арлазарова, Б. Вейсфейлера, А. Лемана, М. Розенфельд и автора) увлеклись теми или иными аспектами проблемы изоморфизма. И первым результатом в этом направлении был алгоритм Вейсфейлера-Лемана (1968) [4].

Грубо говоря, этот алгоритм заключается в последовательной раскраске дуг полного ориентированного графа. На каждом шаге алгоритма для каждой дуги подсчитывается число треугольников с цветами от предыдущего шага, замыкающих данную дугу. Полученные значения упорядочиваются как полиномы от цветов и, в результате, новые цвета двух дуг совпадают тогда и только тогда, когда совпадают вычисленные для них полиномы. Процесс заканчивается, когда прекращается дифференциация дуг графа, то есть, когда любая пара одинаково раскрашенных дуг остается одинаково раскрашенной после очередного шага. Фактически алгоритм строит некоторую когерентную конфигурацию – когерентное замыкание графа. К сожалению, у меня не сохранилось никаких воспоминаний о процессе разработки этого алгоритма. Я либо был занят другими делами, либо просто пропускал все обсуждения мимо ушей – не имея математического образования, я тогда не владел нужным языком. Меня к этой работе привлекли позже, когда понадобилось кое-что посчитать.

Следующий шаг был сделан в серии докладов Б. Вейсфейлера и их обсуждениях на семинаре под руководством Г.М. Адельсона-Вельского и В. Арлазарова в Институте Проблем Управления (ИПУ). Введенные тогда понятия клетки, клеточного кольца и клеточной алгебры были впоследствии опубликованы Б. Вейсфейлером в коллективной монографии в серии Lecture Notes in Mathematics (1976) [5].

Особый интерес представляют регулярные когерентные конфигурации, у которых все петли при вершинах имеют одинаковый цвет - ассоциативные схемы (схемы отношений в другой терминологии) и некоторые их специальные классы: конфигурации, раскрашенные только в три цвета - сильно регулярные графы (срг), и дистанционно регулярные графы (дрг), у которых одинаково раскрашены дуги, соединяющие пары равноудаленных вершин. Некоторое время авторы алгоритма пребывали в заблуждении, считая, что группа автоморфизмов регулярной конфигурации действует транзитивно на вершинах порождающего ее графа. В частности, это означало бы, что все срг имеют транзитивную группу автоморфизмов. По-видимому, первым сомнение в этом высказал Г. Маргулис в 1969 году. В результате, вскоре (в том же 1969 году), Г. Адельсон-Вельским, Б. Вейсфейлером, А. Леманом и автором был построен пример срг на 26 вершинах с интранзитивной группой автоморфизмов [6]. Впоследствии Л. Бабаи доказал, что почти все срг имеют тривиальную группу автоморфизмов [7].

Ранее комбинаторные конструкции, подобные введенным Б. Вейсфейлером и А. Леманом, неоднократно возникали в теории групп (алгебры Гекке, кольца Шура, централизаторные алгебры и т.д.). Интересно, что великий алгебраист Исайя Шур пребывал в том же заблуждении, что и авторы алгоритма Вейсфейлера-Лемана. В связи с этим сейчас конфигурации с транзитивным действием группы автоморфизмов на одноцветных дугах называют Шуровыми. Нешуровская когерентная конфигурация с интранзитивной группой автоморфизмов и минимально возможным числом точек была обнаружена М. Зив-Авом (2015) [8]. Нужно отметить, что алгоритмы, похожие на алгоритм Вейсфейлера-Лемана, до последнего времени неоднократно переоткрывались с претензией на эффективное решение проблемы изоморфизма графов. Последняя известная мне публикация такого рода появилась в 2014 году. [9].

В конце прошлого века делались неоднократные попытки обобщить алгоритм Вейсфейлера-Лемана, рассматривая при перекраске дуг не цветные треугольники, а цветные подграфы с большим числом вершин. Харьковский физик А. Голубчик даже представил в доклады Академии Наук (при посредничестве М. Клина и автора) статью с описанием соответствующей конструкции (алгебра цветов) и утверждением, что проблема изоморфизма графов решена. К счастью, статья попала на рецензию к Л. Хачияну, который и обнаружил в доказательстве принципиальную ошибку. Однако рассмотрение подграфов с числом вершин больше 3 привело к понятию графа с вершинным t-условием, обобщающим понятие срг (срг – это граф с 3-условием). Впервые такое понятие было введено М. Хестенесом и Д. Хигманом (1971) [10]. М. Клин (1983) [11] предположил, что при достаточно большом t группа автоморфизмов графа с вершинным t-условием транзитивна. Сейчас известны графы с вершинным t-условием и интранзитивной группой автоморфизмов при всех t, не превышающих 7. При t = 7 бесконечная серия таких графов была построена учеником М.Клина С.Рейчардом (2014) [12]. Так что, если гипотеза Клина верна, то при t > 7.

Следующий прорыв в изучении когерентных конфигураций был произведен в конце 70-х – начале 80-х годов прошлого века двумя группами математиков. Основная идея при этом заключалась в эксплуатации связи когерентных конфигураций и групп подстановок – орбиты действия группы подстановок на парах точек (2-орбиты) являются базисными элементами когерентной конфигурации. Аксиоматизация свойств 2-орбит группы подстановок как раз и привела Д. Хигмана (1970) [13] к понятию когерентной конфигурации. Кстати, Д. Хигман в течение нескольких лет даже не подозревал о существовании подхода Вейсфейлера-Лемана. Только после выхода в 1976 году книги Б. Вейсфейлера он стал ссылаться на работы советских математиков.

Группа японских математиков (Э. Баннаи, Т. Ито, их ученики и коллеги) в основном занимались изучением ассоциативных схем и дистанционно регулярных графов. Им удалось перенести на чисто комбинаторные структуры традиционные теоретико-групповые методы (теория характеров, теория представлений и т.д.). В результате возникла ветвь дискретной математики под названием «Алгебраическая Комбинаторика» (теория групп без групп), обобщившая ранее бытовавший термин «Алгебраическая теория графов». Эти исследования выявили глубокие связи когерентных конфигураций с другими математическими структурами, в частности, с ортогональными многочленами. Результаты, полученные в эти годы, опубликованы в книге Э. Баннаи, Т. Ито «Алгебраическая Комбинаторика» (1984) [14] перевод на русский язык выполнен А.А. Ивановым и автором в 1987 году [15].

Другая группа, состоящая из сотрудников руководимой автором лаборатории дискретной математики ВНИИСИ (Я. Гольфанд, В. Зайченко, А.А. Иванов, А.В. Иванов, М.Иофинова, Д. Пасечник, И. Чуваева, С. Шпекторов), и учеников профессора Киевского Университета Льва Аркадьевича Калужнина (М. Клин, М. Музычук, В. Устименко, Р. Пёшель) сосредоточилась на интерпретации, перечислении, построении и характеризации комбинаторных объектов с большой степенью регулярности. Решающую роль в формировании этой группы и тематики их исследований сыграли ежегодные семинары в Одессе под руководством Александра Александровича Зыкова. В частности, именно на этих семинарах познакомились и начали работать вместе математики Московской и Киевской школ. Прогрессу в этих исследованиях также способствовали три проведенные нами школы по комбинаторике – в Вильянди (Эстония) в 1974 году, в Саулескалнсе (Латвия) в 1975 году и в Пущино в 1977 году.

В работе этой группы в основном эксплуатировалось антимонотонное соответствие Галуа между категорией когерентных конфигураций на некотором множестве точек, частично упорядоченных при помощи введенной М. Клином операции склеивания базисных элементов конфигурации, и решеткой подгрупп симметрической группы на том же множестве. Функторами в этом соответствии служат операции построения соответствующей когерентной конфигурации группы подстановок и вычисления группы автоморфизмов конфигурации. Интересно, что при этом обнаружился и был детально изучен Я. Гольфандом и

А. В. Ивановым класс аморфных ассоциативных схем, у которых любая склейка антирефлексивных базисных элементов приводит к ассоциативной схеме [16, 17].

Начало такому исследованию было положено в двухчасовой беседе Я. Гольфанда и М. Клина в присутствии автора на пляже в Батуми в 1982 году.

Если асимптотические результаты при таком подходе удается получить аналитически для многих серий групп подстановок, то при малых размерах групп, и особенно для спорадических простых групп, исследование их подстановочных представлений потребовало привлечения компьютерных вычислений. В. Зайченко и автор, под руководством М. Клина, разработали комплекс программ COCO (COherent COnfiguration), позволяющий проводить необходимые вычисления с группами подстановок и когерентными конфигурациями. Благодаря содействию Андреаса Брауера этот комплекс программ стал известен многим специалистам, использующим компьютеры для исследования симметрии графов. Впоследствии возможности этого комплекса были значительно расширены Ф. Фидлером, Х. Печем и С. Рейчардом – студентами М. Клина.

Еще одна ветвь алгебраической комбинаторики, основанная на изучении конечных подгрупп группы автоморфизмов диаграммных геометрий Бьюкенхута, развита в работах А.А. Иванова и С. Шпекторова. Диаграммные геометрии оказались удобным языком для описания "локальных" свойств высоко симметрических графов, при этом начальными примерами служили дистанционно-транзитивные графы (дтг), группа автоморфизмов которых действует транзитивно на парах равноудаленных вершин. Классические геометрии являются односвязными в топологическом смысле. Оказалось, что тем же свойством обладают и геометрии спорадических простых групп. Из этого следует, что такие группы характеризуются локальными свойствами своих подгрупп. Эти исследования привели к комбинаторной характеризации «больших» спорадических простых групп, а одна из них - J4 - впервые была построена конструктивно.

Этой группой советских (впоследствии разбежавшихся по всему миру) математиков получены как комбинаторные результаты - решение проблемы изоморфизма некоторых классов циклических графов, построение новых объектов с высокой степенью регулярности (срг, дрг, блок-схем, дтг, примитивных и несогласованных графов), классификация аморфных конфигураций, так и теоретико-групповые (исправление ряда неточностей и пополнение информации в Атласе конечных простых групп, комбинаторная характеризация некоторых спорадических групп, класссификация дистанционно-транзитивных представлений некоторых классов конечных групп и пр.). Многие результаты, полученные нашей группой к моменту развала СССР, опубликованы в коллективной монографии “Investigations in Algebraic Theory of Combinatorial Objects", изданной Kluwer Academic Publisher в 1994 году.

Следует отметить, что наше сотрудничество с японскими коллегами началось благодаря опубликованию в 1984 году А.А. Ивановым прорывной статьи об ограничении диаметра дистанционно регулярных графов. Большую роль в работе нашей группы сыграли также контакты с математиками из США (Р. Вейсс), Великобритании (М. Лиебек, Я. Саксл), Голландии (Я. Зейдель, А. Брауер) и Австралии (Ш. Прейгер).

В заключение я хочу рассказать о моих личных отношениях с авторами алгоритма Вейсфейлера-Лемана и об обстановке, в которой мы жили и работали.

Когда я встретился с А. Леманом в 1966 году, выяснилось, что мы давно знакомы – в 1952 и 1953 годах мы были в одном пионерском лагере. В ИТЭФе мы проработали недолго. Весной 1968 года А.С. Кронрод был уволен из Института и Лаборатория расформирована. Формальным поводом было подписание несколькими сотрудниками Лаборатории письма «девяносто девяти» в защиту математика А.С. Есенина-Вольпина. Значительную часть нашего коллектива приютил академик В.А. Трапезников в Институте Проблем Управления (ИПУ). К сожалению, власти не позволили перейти туда А. С. Кронроду, так что руководителем коллектива с тех пор и по настоящее время является Владимир Львович Арлазаров. Нормальные рабочие места в ИПУ у нас появились не сразу, так что упоминавшийся семинар проходил в длинном коридоре под самой крышей здания.

Андрей продолжал заниматься проблематикой, связанной с изоморфизмом графов, и в 1971 году защитил кандидатскую диссертацию, посвященную перечислению всех клеточных алгебр порядка не больше 7 и всех ассоциативных схем порядка до 9. Это были пионерские результаты. Только через 10-20 лет такие задачи стали решаться математиками многих стран, включая Германию, Израиль, США и Японию. Но Высшая Аттестационная Комиссия (ВАК) отправила работу на рецензирование Ю.И. Журавлеву. К чести Юрия Ивановича надо сказать, что он сколько мог тянул с отрицательным отзывом, который требовал от него функционер от математики С.В. Яблонский, известный мракобес и антисемит, личный враг А.С. Кронрода. В конце концов требуемый отзыв был в ВАК отправлен, и Экспертный Совет ВАК по математике, руководимый тем же С.В. Яблонским, работу отклонил. Основание отказа было сформулировано так: «Это не математика». Впоследствии Андрей с горечью говорил «Я не математик, я программист».

К сожалению, после этого Андрей перестал заниматься комбинаторикой, а сделался алгоритмистом, системным аналитиком и программистом в других областях – системах управления базами данных (СУБД), автоматизированных системах управления производством и административной деятельностью. В 1973 году он защитил кандидатскую диссертацию по этой тематике, а в 1990 году был удостоен премии Совета Министров СССР за участие в разработке и внедрении СУБД ИНЭС. Следует отметить, что интересы Андрея этим не ограничивались. В частности, в конце 1970-х он, по просьбе физиков, занимающихся квантовыми эффектами, написал программу, моделирующую эти эффекты и визуализирующую трехмерную картинку на экране дисплея с использованием бинокулярного зрения. В то время это вызывало удивление и восхищение у его коллег.

В 1976 году в составе нашего коллектива он перешел в Институт Системных Исследований (ВНИИСИ), отпочковавшийся от ИПУ. Во ВНИИСИ мы с ним вместе проработали до 1990 года. В 1990 Андрей в составе «десанта» коллектива переехал в Силиконовую Долину (Калифорния), а через год и я к ним присоединился. В образованном там стартапе Cognitive Technology Inc мы занимались оптическими системами распознавания текста (OCR). Созданная там OCR Cuneiform была в то время лучшей в мире. Но в последующие годы компания не выдержала конкуренции и распалась, так что в 1994-95 годах мы с Андреем разошлись по разным hi tech компаниям. Но до моего возвращения в Россию в 2009 году мы жили недалеко друг от друга и часто встречались. После того, как стали жить в разных странах, поддерживали отношения по телефону и скайпу до самого ухода Андрея из жизни в 2012 году.

Стоит заметить, что Андрей был математиком блестящего олимпиадного стиля. Изданный им в 1965 году сборник задач школьных математических олимпиад МГУ [18] до сих пор считается одной из лучших книг этого жанра. Сам список авторов задач, представленных в этом сборнике, от Адельсон-Вельского и Арнольда до Фукса и Хованского просто потрясает. Десятки блестящих молодых (в то время) математиков, уже ушедших или еще активных членов мировой математической элиты, с удовольствованием участвовали в тренировке школьников.

Андрей был надежным коллегой и верным другом. В любом занятии (включая мытье полов и уборку помещения) он находил изюминку, позволяющую делать дело без особого напряжения. С удовольствием вспоминаю командировки вместе с Андреем в Ереван и Владивосток, весенние байдарочные сплавы по большой воде и байдарочный поход по Карелии под его руководством.

А еще Андрей обладал неслабым чувством юмора. Во время подготовки к упомянутому довольно длительному байдарочному походу по ненаселенным местам Карелии кто-то предложил взять с собой ружье, чтобы иногда полакомиться свежей дичью. Андрей категорически запретил, зато поручил запастись разнообразными рыболовными снастями. «Безнравственно убивать птиц, которые летят по своим делам и ничего плохого нам не делают. А когда я купаю свою блесну и жадная щука за нее хватается –

это совсем другое дело» – объяснял он на полном серьезе. Другой пример. Андрей ехал ночью по фривею в Калифорнии с большим превышением скорости и был остановлен догнавшим его полицейским. Последовал такой диалог: «Зачем же вы едете так быстро?» – «Я еду со скоростью трафика» – «Где же вы увидели трафик на пустом шоссе?» – «Ну как же – Вы и Я». Полицейский рассмеялся и отпустил Андрея, не выписав ему штраф.

С Борисом Вейсфейлером все было значительно сложнее. Борис был человек очень замкнутый, трудно сходился с людьми. Ему были ненавистны несправедливость и антисемитизм. Так в процессе расставания с ИТЭФ он сцепился с неким партийным функционером, за что был исключен из комсомола. На заключительном банкете зимней школы в Вильянди он, недослышав, в каком контексте Л. Макар-Лиманов употребил слово «жид», пытался с ним подраться.

Все свои отпуска Борис проводил в одиночных походах в необитаемых районах крайнего Севера и дальнего Востока. «Отдыхал от людей» - его выражение. Единственное известное мне исключение он сделал для меня летом 1969 года. Весной этого года, во время байдарочной прогулки под парусами по Плещееву озеру с моим участием, погибли наши друзья. В связи с этой трагедией, а также с проблемами в семейной жизни, я пребывал в жесточайшей депрессии, и Борис предложил мне составить ему компанию и побродить по Южному Таймыру и плато Путарана. За время полуторамесячного маршрута от Норильска до озера Кутарамакан мы сказали друг другу не более двух десятков слов – не было необходимости. 40-килограммовые рюкзаки в начале маршрута (минимум личных вещей, сублимированные продукты, кусок пластика вместо палатки, ружье, ракетница, боеприпасы), по мере расхода продуктов пополнялись красивыми кусками горных пород и оленьими рогами.

У Бориса не было проблем с академической карьерой. Крутой алгебраист, автор многих работ в области групп Ли, опубликованных в серьезных журналах (в том числе в ДАН СССР и УМН), он в 1970 году защитил кандидатскую диссертацию. В 1975 году Борис эмигрировал в США через Вену. Я был в числе провожающих. На этом наше общение прекратилось. Борис с пониманием относился к «ревности» властей, не одобряющих общение советских ученых с уезжантами, так что до конца 80-х информацию о его дальнейшей судьбе мы получали только путем редких частных оказий и слухов. Интересная деталь касается публикации коллективной монографии в Lecture Notes in Mathematics. Эта, теперь легендарная, книга была издана при весьма активной поддержке Я. Зейделя. Борис формально был единственным автором – материал был вывезен нелегально, и он не хотел подставлять своих друзей-соавторов, оставшихся в СССР. Сразу после выхода книги он наклеил на все доступные ему экземпляры стикер «Под редакцией Б. Ю. Вейсфейлера». И теперь на эту книгу ссылаются именно так.

Приношу свои извинения большому количеству коллег и просто достойных людей, поддерживавших нас в непростой период жизни, которых я не смог упомянуть персонально.

Я благодарен моей жене Л. У. Лукашиной, а также коллегам В. Л. Арлазарову, А. А. Иванову, М. Х. Клину и И. Н. Пономаренко, которые тщательно изучили черновик этого текста и сделали существенные замечания по стилю изложения и терминологии. Они также откорректировали мою слабеющую память в отношении дат и последовательности событий.

Литература

1. Тихомиров В. М. А.С. Кронрод. (1921-1986) //Математическое просвещение, сер. 3, вып. 6, — МЦНМО, 2002. - С. 49–54.
2. Хачиян Л.Г. Сложность задач линейного программирования. Новое в Жизни, Науке, Технике: Серия "Математика, Кибернетика", "Знание", Москва, 1987. 32 с.
3. Babai László. Graph isomorphism in quasipolynomial time [extended abstract]//STOC'16—Proceedings of the 48th Annual ACM SIGACT Symposium on Theory of Computing. pp. 684-697, ACM, New York, 2016.
4. Вейсфейлер Б.Ю., Леман А.А. Приведение графа к каноническому виду и возникающая при этом алгебра//НТИ сер. 2, 1968, № 9, С. 12-16.
5. Weisfeiler B., editor. On Construction and Identification of Graphs, Lecture Notes in Mathematics, 558, Springer-Verlag Berlin, 1976.
6. Адельсон-Вельский Г.М., Вейсфейлер Б.Ю., Леман А. А., Фараджев И. А. Об одном примере графа, не имеюще-

го транзитивной группы автоморфизмов//Доклады АН СССР, 1969. Т. 185. № 5. С. 975-976.
7. Babai László. On the automorphism groups of strongly regular graphs I. ITCS'14—Proceedings of the 2014 Conference on Innovations in Theoretical Computer Science, pp. 359–368, ACM, New York, 2014.
8. Ziv-Av Matan Enumeration of coherent configurations of order at most 15//Acta Univ. M. Belii Ser. Math. 26, 2018, pp. 65-75.
9. Itzhakov Avraham, Codish Michael. Breaking symmetries in graph search with canonizing sets//Constraints 21, 2016, no. 3, pp. 357-374.
10. Hestenes M.D., Higman D.G., Rank 3 groups and strongly regular graphs, in. SIAM-AMS Proc., Vol. IV, pp. 141-159, Amer. Math. Soct., Providence, R.I. 1971.
11. Клин М.Х. Об аксиоматике клеточных колец. Исследования по алгебраической теории комбинаторных объектов, М. ВНИИСИ, 1985. С. 6-32
12. Reichard Sven. Strongly regular graphs with the 7-vertex condition// J. Algebraic Combin. 41,2015, N 3, pp. 817-842.
13. Higman D.G. Coherent configurations I//Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, XLIV, 1970, pp. 1-25.
14. E. Bannai, T.Ito, Algebraic Combinatorics, Association Schemes, Benjamin/ Cummings, 1984.
15. Баннаи Э., Ито Т. Алгебраическая Комбинаторика, М. Наука, 1987.
16. Иванов А.В. Аморфные клеточные кольца. II, Исследования по алгебраической теории комбинаторных объектов: труды семинара ВНИИСИ, Институт системных исследований, Москва, 1985, С. 39-49.
17. Гольфанд Я.Ю., Клин М.Х. Аморфные клеточные кольца I, Исследования по алгебраической теории комбинаторных объектов: труды семинара ВНИИСИ, Институт системных исследований, Москва, 1985, С. 32-38.
18. Болтянский В.Г., Леман А.А. Сборник задач московских математических олимпиад. – М., Просвещение, 1965. 384 с.

Фараджев Игорь Александрович. Главный научный сотрудник. Федеральное государственное учреждение "Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" Российской академии наук", г. Москва, Россия. Кандидат физико-математических наук, доцент. Количество печатных работ: более 120. Область научных интересов: комбинаторика, дискретные алгоритмы, компьютерная алгебра.

Symmetry vs Regularity

I. A. Faradjev

Federal Research Center “Computer Science and Control” of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

This work of the famous mathematician, one of the founders of algebraic combinatorics, was read as a lecture at the conference dedicated to the memory of A. A. Leman and B. Yu. Weisfeiler. It had no references, and the author, unfortunately, did not manage to turn it into a full-fledged article. This was done for him by the members of the editorial board of JITCS A. A. Ivanov and M. Klin.

DOI 10.14357/20718632200406

Faradjev I.A. Chief Researcher. Federal Research Center “Computer Science and Control” of Russian Academy of Sciences, senior researcher, Moscow, pr-t 60-letiya Oktyabrya, 9. He has the Ph.D. of Physical and Mathematical Sciences. He is the author of more than 120 papers. His research interests included combinatorics, discrete algorithms, computerized algebra.