

# Идентификация распределенной динамической системы с использованием расширенного фильтра Калмана

А. В. Копытин, Е. А. Копытина, М. Г. Матвеев

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Воронежский государственный университет», г. Воронеж, Россия

**Аннотация.** Предложен комбинированный метод идентификации уравнений математической физики, описывающих динамику пространственно-распределенных процессов, на основе экспериментальных многомерных временных рядов. Первой составляющей метода является получение МНК-оценок параметров разностной схемы Кранка-Николсон. Однако эти оценки оказываются смещенными в силу наличия ошибок в регрессорах. С целью уменьшения указанного смещения в качестве второй составляющей метода применяется расширенный фильтр Калмана. Приводится вычислительный эксперимент, подтверждающий эффективность предложенной методики.

**Ключевые слова:** оценка параметров, МНК, разностная схема Кранка-Николсон, расширенный фильтр Калмана.

DOI 10.14357/20718632210208

## Введение

Задачи идентификации параметров динамических систем являются одними из важнейших задач технических, экономических и социальных приложений. Им посвящено большое число работ. При этом большинство исследований посвящено стационарным системам с сосредоточенными параметрами [1-7]. Значительно меньше работ посвящено идентификации динамических систем и систем с распределенными параметрами, причем в большинстве этих работ рассматриваются приближенные методы, в том числе, основанные на обработке наблюдений многомерных временных рядов в узлах разностных схем, аппроксимирующих соответствующие дифференциальные уравнения [8-10].

В представленном исследовании для параметрической идентификации модели распределенного динамического объекта предлагается комбинация фильтра Калмана и простого МНК, служащего для оценки начальной точки рекурсивных вычислений. При этом предполагается, что качество оценки параметров будет зависеть от рационального выбора разностной схемы соответствующего дифференциального уравнения.

## 1. Постановка задачи

Продолжая исследования, начатые в [11-15], будем рассматривать широкий класс пространственно-распределенных динамических систем, для которых характерны диффузионные процес-

сы, процессы адвекции или их сочетание. Соответствующее дифференциальное уравнение в частных производных с начальными и граничными условиями имеет следующий общий вид:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = D \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} - v \frac{\partial x}{\partial z}, \quad (1)$$

$$x(0, z) = \varphi(z),$$

$$x(t, z^{\min}) = f_1(t), \quad x(t, z^{\max}) = f_2(t).$$

где  $D \geq 0$  – коэффициент диффузии,  $v \geq 0$  – скорость адвекции,  $z$  – пространственная координата.

Источником информации о поведении системы являются данные натуральных измерений переменной  $x_i^k$  с погрешностью  $\varepsilon_i^k$  в виде нормального «белого шума» –  $y_i^k = x_i^k + \varepsilon_i^k$  с математическим ожиданием  $M(\varepsilon_i^k) = 0$  и  $\text{cov}(\varepsilon_i^k, \varepsilon_j^l) = 0$ , в последовательные моменты времени  $t_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ , в узлах одномерной пространственной регулярной сетки  $i = 0, 1, \dots, m-1$ , т. е. многомерный временной ряд. Рассмотрение одномерной сетки ничем не ограничивает дальнейшие исследования, зато позволяет избежать громоздких построений, характерных для плоских и объемных пространств.

Задача заключается в идентификации процессов конвективной диффузии на основе анализа многомерных временных рядов и разработке алгоритмов параметрической идентификации механистической модели с постоянными коэффициентами по наблюдаемым значениям  $y_i^k$ .

Для решения задачи составим явную четырехточечную разностную схему для уравнения (1), заменив точные значения решения в узлах сетки  $x_i^k$  на наблюдаемые значения  $y_i^k$ :

$$\frac{y_i^{k+1} - y_i^k}{\Delta t} = D \frac{y_{i+1}^k - 2y_i^k + y_{i-1}^k}{(\Delta z)^2} - v \frac{y_{i+1}^k - y_{i-1}^k}{2\Delta z} + \zeta_i^k, \quad (2)$$

неявную четырехточечную разностную схему:

$$\frac{y_i^{k+1} - y_i^k}{\Delta t} = D \frac{y_{i+1}^{k+1} - 2y_i^{k+1} + y_{i-1}^{k+1}}{(\Delta z)^2} - v \frac{y_{i+1}^{k+1} - y_{i-1}^{k+1}}{2\Delta z} + \nu_i^k, \quad (3)$$

а также схему Кранка-Николсон:

$$\begin{aligned} \frac{y_i^{k+1} - y_i^k}{\Delta t} = & \frac{D}{2(\Delta z)^2} \left( (y_{i+1}^{k+1} - 2y_i^{k+1} + y_{i-1}^{k+1}) + (y_{i+1}^k - 2y_i^k + y_{i-1}^k) \right) - \\ & - \frac{v}{4\Delta z} \left( (y_{i+1}^{k+1} - y_{i-1}^{k+1}) + (y_{i+1}^k - y_{i-1}^k) \right) + \zeta_i^k, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\zeta_i^k$ ,  $\nu_i^k$  и  $\zeta_i^k$  – случайные ошибки. Изменяя  $i$  от 1 до  $m-2$  и  $k$  от 0 до  $n-1$ , получаем систему линейных относительно параметров  $D$  и  $v$  уравнений вида (2), (3) или (4). Любая из этих систем может быть использована для получения МНК-оценок неизвестных параметров  $D$  и  $v$ , но, как показывает проведенный в ходе исследования эксперимент, наиболее точные оценки получаются при использовании уравнений вида (4), т. е. схемы Кранка-Николсон. Однако и в этом случае МНК-оценки параметров  $v$  и  $D$  будут смещенными из-за наличия ошибок в регрессорах [16].

Повышения точности решения задачи верификации процессов уравнения (1) можно достичь на основе комбинирования методов идентификации. Такой подход получил широкое распространение в различных предметных областях [17; 18]. Комбинирование дает возможность компенсировать недостатки одних методов при помощи других и направлено на повышение качества параметрической идентификации как одного из главных критериев эффективности модели. В работах [13; 14] для решения задачи верификации используется комбинация МНК-оценок, полученных из уравнений вида (2), т. е. явной разностной схемы, и расширенного фильтра Калмана, построенного по этой же разностной схеме. МНК-оценки дают начальную точку в пространстве поиска

для реализации рекурсивного алгоритма Калмана, что очевидно лучше, чем произвольный выбор такой точки.

Однако, как известно, явная разностная схема сходится лишь при выполнении следующих условий Куранта:

$$dz < \frac{2D}{v}, \quad dt < \frac{(dz)^2}{2D}. \quad (5)$$

Следовательно, и применение алгоритма Калмана оправдано лишь при выполнении условий (5). На практике же условия (5) не обязательно выполняются. Таким образом, применение алгоритма расширенного фильтра Калмана, построенного по явной разностной схеме, далеко не всегда дает тот положительный результат, который приведен в [13;14].

Новизна предлагаемой работы состоит в исследовании эффективности комбинации МНК-оценок и фильтра Калмана, полученных по безусловно сходящейся разностной схеме Кранка-Николсон.

## 2. Расширенный фильтр Калмана, построенный по схеме Кранка-Николсон

Как известно, фильтр Калмана представляет собой рекурсивный алгоритм оптимального оценивания неизвестного состояния линейной динамической системы по зашумленным измерениям в дискретные моменты времени. Если система оказывается нелинейной, обычно используется процедура линеаризации. Полученный таким образом фильтр называется расширенным фильтром Калмана.

Уравнения (4), но уже для точного решения  $x$ , можно записать в виде:

$$-(\theta_1 + \theta_2)x_{i-1}^{k+1} + (1 + 2\theta_1)x_i^{k+1} + (\theta_2 - \theta_1)x_{i+1}^{k+1} = (\theta_1 + \theta_2)x_{i-1}^k + (1 - 2\theta_1)x_i^k + (\theta_1 - \theta_2)x_{i+1}^k,$$

где  $\theta_1 = \frac{D\Delta t}{2(\Delta z)^2}$ ,  $\theta_2 = \frac{v\Delta t}{4\Delta z}$ ,  $i = 1, \dots, m-2$ ,  $k = 0, \dots, n-1$ . Или в матричном виде:

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma}(\boldsymbol{\theta})(x_0^k, x_0^{k+1}, x_{m-1}^k, x_{m-1}^{k+1})^T, \quad k = 0, \dots, n-1, \quad (6)$$

где  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})$  и  $\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta})$  – трехдиагональные матрицы размера  $(m-2) \times (m-2)$ , зависящие от вектора параметров  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)^T$ , следующего вида:

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} 1+2\theta_1 & \theta_2 - \theta_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\theta_1 - \theta_2 & 1+2\theta_1 & \theta_2 - \theta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\theta_1 - \theta_2 & 1+2\theta_1 & \theta_2 - \theta_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -\theta_1 - \theta_2 & 1+2\theta_1 & \theta_2 - \theta_1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -\theta_1 - \theta_2 & 1+2\theta_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} 1-2\theta_1 & \theta_1 - \theta_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \theta_1 + \theta_2 & 1-2\theta_1 & \theta_1 - \theta_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \theta_1 + \theta_2 & 1-2\theta_1 & \theta_1 - \theta_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \theta_1 + \theta_2 & 1-2\theta_1 & \theta_1 - \theta_2 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \theta_1 + \theta_2 & 1-2\theta_1 \end{pmatrix},$$

$\mathbf{x}_k = (x_1^k, x_2^k, \dots, x_{m-2}^k)^T$  – вектор размера  $(m-2) \times 1$ , а  $\mathbf{\Gamma}(\boldsymbol{\theta})$  – матрица размера  $(m-2) \times 4$ , также зависящая от вектора  $\boldsymbol{\theta}$ , следующего вида:

$$\Gamma(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} \theta_1 + \theta_2 & \theta_1 + \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_1 - \theta_2 & \theta_1 - \theta_2 \end{pmatrix}.$$

В силу невырожденности матрицы  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})$  умножим левую и правую части уравнений (6) на обратную матрицу  $\mathbf{A}^{-1}(\boldsymbol{\theta})$ . Получим

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}^{-1}(\boldsymbol{\theta})(\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{x}_k + \Gamma(\boldsymbol{\theta})(x_0^k, x_0^{k+1}, x_{m-1}^k, x_{m-1}^{k+1})^T), \quad k = 0, \dots, n-1. \quad (7)$$

Тогда рассматриваемая нами линейная динамическая модель может быть записана в пространстве состояний следующим образом:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}^{-1}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{x}_k + \mathbf{A}^{-1}(\boldsymbol{\theta})\Gamma(\boldsymbol{\theta})(\mathbf{u}_k + \boldsymbol{\xi}_k), \\ \mathbf{y}_k = \mathbf{x}_k + \boldsymbol{\eta}_k, \end{cases} \quad (8)$$

где  $\mathbf{u}_k = (y_0^k, y_0^{k+1}, y_{m-1}^k, y_{m-1}^{k+1})^T$  интерпретируется в терминах фильтра Калмана как вектор управляющих воздействий,  $\boldsymbol{\xi}_k = (\varepsilon_0^k, \varepsilon_0^{k+1}, \varepsilon_{m-1}^k, \varepsilon_{m-1}^{k+1})^T$  – шум процесса,  $\mathbf{y}_k = (y_1^k, y_2^k, \dots, y_{m-2}^k)^T$  – вектор измерений,  $\boldsymbol{\eta}_k = (\varepsilon_1^k, \varepsilon_2^k, \dots, \varepsilon_{m-2}^k)^T$  – измерительный шум.

Поскольку  $\boldsymbol{\theta}$  – постоянный вектор, вполне естественно положить

$$\boldsymbol{\theta}_{k+1} = \boldsymbol{\theta}_k, \quad k = 0, \dots, n-1. \quad (9)$$

Тогда система (8) вместе с предположением (9) может быть переформулирована как нелинейная модель

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{k+1} \\ \boldsymbol{\theta}_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_k)\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}_k)\mathbf{x}_k \\ \boldsymbol{\theta}_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_k)\Gamma(\boldsymbol{\theta}_k)\mathbf{u}_k \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_k)\Gamma(\boldsymbol{\theta}_k)\boldsymbol{\xi}_k \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{y}_k = (\mathbf{I}_{m-2} \quad \mathbf{0}) \begin{pmatrix} \mathbf{x}_k \\ \boldsymbol{\theta}_k \end{pmatrix} + \boldsymbol{\eta}_k, \end{cases} \quad (10)$$

где  $\mathbf{I}_{m-2}$  – единичная матрица размера  $(m-2) \times (m-2)$ . Теперь расширенный фильтр Калмана может быть применен для оценки вектора состояния, содержащего  $\boldsymbol{\theta}_k$  в качестве своих компонент. Однако, для этого нам необходимо иметь оценки матриц ковариации  $\mathbf{Q} = \text{cov}(\boldsymbol{\xi}_k)$  и  $\mathbf{R} = \text{cov}(\boldsymbol{\eta}_k)$ ,

начальную оценку вектора состояния  $\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{0|0} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{0|0} \end{pmatrix}$  и оценку ковариационной матрицы  $\mathbf{P}_{0|0}$  начальной оценки вектора состояния.

Предположим, что имеется некоторая оценка  $\hat{\sigma}^2$  дисперсии  $\sigma^2$  измерительной погрешности  $\varepsilon_i^k$ . Таковую оценку можно получить, например, с использованием уравнений вида (2) способом, приведенном в [15]. Тогда оценки матриц  $\mathbf{Q}$  и  $\mathbf{R}$  имеют вид:  $\hat{\mathbf{Q}} = \hat{\sigma}^2 \mathbf{I}_4$ ,  $\hat{\mathbf{R}} = \hat{\sigma}^2 \mathbf{I}_{m-2}$ .

В качестве оценки  $\hat{\mathbf{x}}_{0|0}$  естественно взять вектор  $(y_1^k, y_2^k, \dots, y_{m-2}^k)^T$ , а в качестве оценки  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{0|0}$  – вектор  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_0 = \left( \frac{\hat{D}\Delta t}{2(\Delta z)^2}, \frac{\hat{v}\Delta t}{4\Delta z} \right)^T$ , где  $\hat{D}$  и  $\hat{v}$  – МНК-оценки параметров  $D$  и  $v$ , полученные из системы уравнений вида (4). Тогда оценка матрицы  $\mathbf{P}_{0|0}$  примет вид:

$$\hat{\mathbf{P}}_{0|0} = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}^2 \mathbf{I}_{m-2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 \end{pmatrix}.$$

Алгоритм расширенного фильтра Калмана в нашем случае выглядит следующим образом [19]:

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{0|0} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{0|0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (y_1^0, y_2^0, \dots, y_{m-2}^0)^T \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{P}}_{0|0} = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}^2 \mathbf{I}_{m-2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 \end{pmatrix}.$$

Для  $k = 1, 2, \dots, n$ ,

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k|k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1|k-1})\mathbf{B}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1|k-1})\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} + \mathbf{A}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1|k-1})\boldsymbol{\Gamma}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1|k-1})\mathbf{u}_k \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1|k-1} \end{pmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{P}}_{k|k-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1|k-1})\mathbf{B}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1|k-1}) & \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \left( \mathbf{A}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1|k-1})\mathbf{B}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1|k-1})\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} + \mathbf{A}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1|k-1})\boldsymbol{\Gamma}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1|k-1})\mathbf{u}_k \right) \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 \end{pmatrix} \hat{\mathbf{P}}_{k-1|k-1} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1|k-1})\mathbf{B}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1|k-1}) & \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \left( \mathbf{A}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1|k-1})\mathbf{B}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1|k-1})\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} + \mathbf{A}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1|k-1})\boldsymbol{\Gamma}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1|k-1})\mathbf{u}_k \right) \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 \end{pmatrix}^T +$$

$$+ \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1|k-1})\boldsymbol{\Gamma}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1|k-1})\hat{\mathbf{Q}}\left(\mathbf{A}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1|k-1})\boldsymbol{\Gamma}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1|k-1})\right)^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{K}_k = \hat{\mathbf{P}}_{k|k-1} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{m-2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}^T \left( \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{m-2} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \hat{\mathbf{P}}_{k|k-1} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{m-2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}^T + \hat{\mathbf{R}} \right)^{-1},$$

$$\hat{\mathbf{P}}_{k|k} = (\mathbf{I}_m - \mathbf{K}_k \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{m-2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}) \hat{\mathbf{P}}_{k|k-1},$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{k|k} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k|k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k|k-1} \end{pmatrix} + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}).$$

В качестве итоговой оценки вектора параметров  $\boldsymbol{\theta}$  можно использовать последнее значение оценки  $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{n|n}$ , полученное при  $k = n$ . Тогда вектор оценок исходных параметров  $D$  и  $v$  имеет вид

$$\begin{pmatrix} \frac{2(\Delta z)^2 \hat{\theta}_1}{\Delta t}, \frac{4\Delta z \hat{\theta}_2}{\Delta t} \end{pmatrix}^T.$$

Аналогичным образом можно построить расширенный фильтр Калмана и для уравнений вида (3), соответствующим неявной разностной схеме, но, как показывает проведенный в ходе исследования эксперимент, качество полученных таким образом оценок будет уступать качеству оценок, полученных с помощью описанного выше алгоритма.

### 3. Результаты вычислительного эксперимента

Для проведения исследований удобно воспользоваться данными модельного эксперимента. Для этого необходимо найти решение исходного дифференциального уравнения (1) с заданными значениями параметров  $D$  и  $v$ . Затем выполнить регулярную дискретизацию полученного решения и добавить погрешность  $\varepsilon$  в виде «белого шума» с различной интенсивностью. Полученные статистические данные будут использованы для получения оценок  $\hat{D}$  и  $\hat{v}$  параметров уравнения (1). Таким образом, модельный эксперимент позволяет провести наглядное сравнение исходных зна-

чений параметров и их оценок при различных методах получения оценок и различных интенсивностях помехи.

Рассмотрим следующее решение уравнения (1):

$$x(t, z) = \exp\left(\frac{v}{2D}\left(z - \frac{vt}{2}\right)\right) (\exp(-Dt) \sin(z) + \exp(-4Dz) \sin(2z) + \exp(-9Dz) \sin(3z)) \quad (11)$$

в прямоугольной области  $[0, 1] \times [1, 3]$  при значениях параметров  $D$  и  $v$  равных соответственно 3 и 2. График решения представлен на Рис. 1.

Далее к значениям  $x_i^t$  решения (11) в узлах пространственно-временной сетки с некоторым шагом  $\Delta z$  по пространственной координате и некоторым шагом  $\Delta t$  по времени добавим смоделированную с помощью генератора случайных чисел погрешность в виде нормального «белого шума» с некоторой дисперсией  $\sigma$  и по полученным значениям  $y_i^t$  найдем сначала МНК-оценки  $\hat{D}$  и  $\hat{v}$  параметров уравнения (1) с использованием системы уравнений вида (4), а затем оценки этих же параметров, применяя алгоритмы расширенного фильтра Калмана, построенные по явной разностной схеме и по схеме Кранка-Николсон, при выполнении и невыполнении условий Куранта (5).

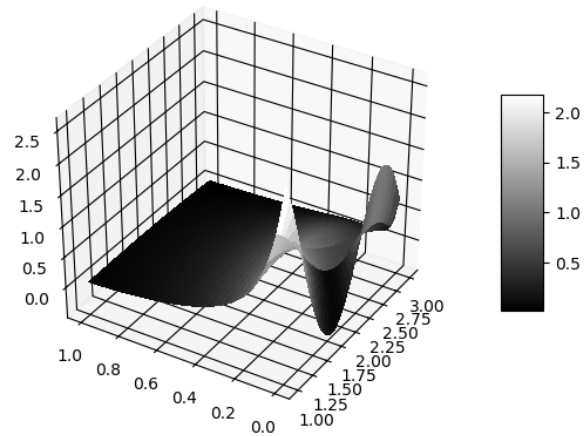


Рис. 1. График решения уравнения (1)

Очевидно, что результаты параметрической идентификации могут существенно зависеть от интенсивности «белого шума», задаваемой стандартным отклонением случайной погрешности наблюдений  $\sigma$ . Для проведения эксперимента выберем три уровня погрешности: 1%, 5% и 10% от среднего значения модуля решения (11) в узлах сетки, что соответствует низкому, среднему и высокому уровню погрешности. Модельный эксперимент многократно повторим (100 раз) по каждому методу получения оценок и при каждом уровне интенсивности помехи, что позволит получить средние абсолютные ошибки в процентах (MAPE) оценок параметров  $D$  и  $v$ .

Шаг по пространственной координате  $\Delta z$  выберем равным 0,1, шаг по времени  $\Delta t$  выберем сначала равным 0,001, что соответствует условиям Куранта (5). Результаты идентификации представлены в Табл. 1.

Данные Табл. 1 показывают, что алгоритмы расширенного фильтра Калмана, построенные по явной разностной схеме и по схеме Кранка-Николсон дают примерно одинаковые очень хорошие результаты, практически не зависящие от уровня погрешности наблюдений. Средние абсолютные ошибки для этих методов более чем на порядок меньше чем ошибки МНК-оценок.

Табл. 1. Сравнение качества идентификации по статистическому критерию при  $\Delta t = 0,001$

Уровень погрешности	MAPE					
	МНК		Фильтр Калмана (явная схема)		Фильтр Калмана (схема Кранка-Николсон)	
	$D$	$v$	$D$	$v$	$D$	$v$
1%	15,66	4,69	0,33	1,30	0,48	1,60
5%	82,90	30,91	0,36	1,34	0,49	1,62
10%	95,13	39,86	0,54	1,54	0,51	1,65

Табл. 2. Сравнение качества идентификации по статистическому критерию при  $\Delta t = 0,01$ 

Уровень погрешности	MAPE					
	МНК		Фильтр Калмана (явная схема)		Фильтр Калмана (схема Кранка-Николсон)	
	$D$	$v$	$D$	$v$	$D$	$v$
1%	16,35	5,94	8,58	27,50	0,13	0,46
5%	83,00	32,26	20,64	34,06	2,15	1,30
10%	95,16	41,62	38,22	48,00	6,37	3,98

Теперь выберем шаг  $\Delta t$  так, чтобы условия (5) не выполнялись. Например, возьмем  $\Delta t = 0,01$ . Результаты идентификации в этом случае приведены в Табл. 2.

Из Табл. 2 хорошо видно, что результаты идентификации, полученные с помощью алгоритма расширенного фильтра Калмана, построенного по явной разностной схеме являются неудовлетворительными: средние абсолютные ошибки в процентах в несколько раз выше, чем уровень погрешности наблюдений. В то же время средние абсолютные ошибки в процентах оценок, полученных с использованием алгоритма расширенного фильтра Калмана, построенного по разностной схеме Кранка-Николсон не превышают уровня погрешности наблюдений, что является весьма неплохим результатом.

## Заключение

Результаты проведенных экспериментов показывают, что использование для оценки параметров дифференциального уравнения (1) метода наименьших квадратов может привести к существенным искажениям истинных значений параметров в условиях даже незначительного уровня погрешностей наблюдений за многомерными временными рядами в узлах разностной схемы. Использование для идентификации расширенного фильтра Калмана, построенного по явной разностной схеме также не может обеспечить приемлемого качества оценок параметров дифференциального уравнения в случае нарушения условий Куранта.

Комбинирование МНК-оценок и оценок расширенного фильтра Калмана, построенного по разностной схеме Кранка-Николсон, как показывают результаты Табл. 1 и 2, существенно улучшает качество оценки, как в случае выполнения, так и в случае невыполнения условий Куранта.

## Литература

1. Putter H., Heisterkamp S. H., Lange J. M. A., De Wolf F. A Bayesian approach to parameter estimation in HIV dynamical models // *Statistics in Medicine*. 2002. Vol. 21. Pp. 2199-2214.
2. Huang Y., Liu D., Wu H. Hierarchical Bayesian methods for estimation of parameters in a longitudinal HIV dynamic system // *Biometrics*. 2006. Vol. 62. Pp. 413-423.
3. Huang Y., Wu H. A Bayesian approach for estimating antiviral efficacy in HIV dynamic models // *Journal of Applied Statistics*. 2006. Vol. 33. Pp. 155-174.
4. Ramsay J. O., Hooker G., Campbell D., Cao, J. Parameter estimation for differential equations: a generalized smoothing approach (with discussion) // *Journal of the Royal Statistical Society. Series B*. 2007. Vol. 69. Pp. 741-796.
5. Liang H., Wu H. Parameter estimation for differential equation models using a framework of measurement error in regression models // *Journal of the American Statistical Association*. 2008. Vol. 103. Pp. 1570-1583.
6. Chen J., Wu H. Efficient local estimation for time-varying coefficients in deterministic dynamic models with applications to HIV-1 dynamics // *Journal of the American Statistical Association*. 2008. Vol. 103. Pp. 369-384.
7. Cao J., Huang J. Z., Wu H. Penalized nonlinear least squares estimation of time-varying parameters in ordinary differential equations // *Journal of Computational and Graphical Statistics*. 2012. Vol. 21. Pp. 42-56.
8. Muller T., Timmer J. Fitting parameters in partial differential equations from partially observed noisy data // *Physical Review, D*. 2002. Vol. 171. Pp. 1-7.
9. Muller T., Timmer J. Parameter identification techniques for partial differential equations // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2004. Vol. 14. Pp. 2053-2060.
10. Xun X. и др. Parameter estimation of partial differential equation models // *Journal of the American Statistical Association*. 2013. Vol. 108. – Pp. 1009-1020.
11. Matveev M. G., Kopytin A. V., Sirota E. A., Kopytina E. A. Modeling of nonstationary distributed processes on the basis of multidimensional time series // *Procedia Engineering*. 2017. Vol. 201. Pp. 511-516.

12. Matveev M. G., Sirota E. A., Semenov M. E., Kopytin A. V. Verification of the convective diffusion process based on the analysis of multidimensional time series // CEUR Workshop Proceedings. 2017. Vol. 2022. Pp. 354-358.
13. Matveev M. G., Kopytin A. V., Sirota E. A. Parameters identification of a distributed dynamical model using combined approach // Journal of Physics: Conference Series. 2018. Vol. 1096. 012068.
14. Копытин А. В., Копытина Е. А., Матвеев М. Г. Применение расширенного фильтра Калмана для идентификации параметров распределенной динамической системы // Вестник Воронежского государственного университета. Сер. Системный анализ и информационные технологии. Воронеж, 2018. № 3. С. 44–50.
15. Копытин А. В., Копытина Е. А. Применение интегрального метода идентификации параметров распределенной динамической системы // Вестник Воронежского государственного университета. Сер. Системный анализ и информационные технологии. Воронеж, 2019. № 1. С. 21–26.
16. Ben-Moshe D. Identification of linear regressions with errors in all variables // Econometric Theory. 2020. Pp. 1-31.
17. Fogler H. R. A pattern recognition model for forecasting // Management science. 1974. Vol. 20. Pp. 1178-1189.
18. Conejo A. J., Plazas M. A., Espinola R., Molina A. B. Day-ahead electricity price forecasting using the wavelet transform and ARIMA models // IEEE transaction on power systems. 2005. Vol. 20. – Pp. 1035-1042.
19. Chui C. K., Chen G. Kalman filtering with real-time applications. Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009. 241 p.

**Копытин Алексей Вячеславович.** Кандидат физико-математических наук, доцент. Количество печатных работ: 58. Область научных интересов: параметрическая идентификация, теория игр. E-mail: alexkopytin@gmail.com

**Копытина Екатерина Александровна.** Старший преподаватель. Количество печатных работ: 31. Область научных интересов: параметрическая идентификация, теория игр. E-mail: zhemkaterina@yandex.ru

**Матвеев Михаил Григорьевич.** Заведующий кафедрой, доктор технических наук, профессор. Количество печатных работ: 274 (в т.ч. 2 монографии). Область научных интересов: модели и методы принятия решений в условиях случайной и нечеткой неопределенности. E-mail: mgmatveev@yandex.ru

## Distributed Dynamic System Identification Using Extended Kalman Filter

A. V. Kopytin, E. A. Kopytina, M. G. Matveev

Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education "Voronezh State University", Voronezh, Russia

**Abstract.** A combined method for identifying equations of mathematical physics describing the dynamics of spatially distributed processes based on experimental multidimensional time series is proposed. The first component of the method is to obtain OLS estimates of the parameters of the Crank-Nicholson difference scheme. However, these estimates turn out to be biased due to the presence of errors in the regressors. In order to reduce the indicated bias, the extended Kalman filter is used as the second component of the method. A computational experiment confirming the effectiveness of the proposed method is given.

**Keywords:** parameter estimation, LSM, Crank-Nicholson difference scheme, extended Kalman filter.

DOI 10.14357/20718632210208

## References

1. Putter H., Heisterkamp S. H., Lange J. M. A., De Wolf F. A Bayesian approach to parameter estimation in HIV dynamical models // Statistics in Medicine. 2002. Vol. 21. Pp. 2199-2214.
2. Huang Y., Liu D., Wu H. Hierarchical Bayesian methods for estimation of parameters in a longitudinal HIV dynamic system // Biometrics. 2006. Vol. 62. Pp. 413-423.
3. Huang Y., Wu H. A Bayesian approach for estimating antiviral efficacy in HIV dynamic models // Journal of Applied Statistics. 2006. Vol. 33. Pp. 155-174.
4. Ramsay J. O., Hooker G., Campbell D., Cao, J. Parameter estimation for differential equations: a generalized smoothing approach (with discussion) // Journal of the Royal Statistical Society. Series B. 2007. Vol. 69. Pp. 741-796.
5. Liang H., Wu H. Parameter estimation for differential equation models using a framework of measurement error in regression models // Journal of the American Statistical Association. 2008. Vol. 103. Pp. 1570-1583.



6. Chen J., Wu H. Efficient local estimation for time-varying coefficients in deterministic dynamic models with applications to HIV-1 dynamics // *Journal of the American Statistical Association*. 2008. Vol. 103. Pp. 369-384.
7. Cao J., Huang J. Z., Wu H. Penalized nonlinear least squares estimation of time-varying parameters in ordinary differential equations // *Journal of Computational and Graphical Statistics*. 2012. Vol. 21. Pp. 42-56.
8. Muller T., Timmer J. Fitting parameters in partial differential equations from partially observed noisy data // *Physical Review, D*. 2002. Vol. 171. Pp. 1-7.
9. Muller T., Timmer J. Parameter identification techniques for partial differential equations // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2004. Vol. 14. Pp. 2053-2060.
10. Xun X. и др. Parameter estimation of partial differential equation models // *Journal of the American Statistical Association*. 2013. Vol. 108. – Pp. 1009-1020.
11. Matveev M. G., Kopytin A. V., Sirota E. A., Kopytina E. A. Modeling of nonstationary distributed processes on the basis of multidimensional time series // *Procedia Engineering*. 2017. Vol. 201. Pp. 511–516.
12. Matveev M. G., Sirota E. A., Semenov M. E., Kopytin A. V. Verification of the convective diffusion process based on the analysis of multidimensional time series // *CEUR Workshop Proceedings*. 2017. Vol. 2022. Pp. 354-358.
13. Matveev M. G., Kopytin A. V., Sirota E. A. Parameters identification of a distributed dynamical model using combined approach // *Journal of Physics: Conference Series*. 2018. Vol. 1096. 012068.
14. Kopytin, A. V., E. A. Kopytina, and M. G. Matveev. 2018. *Primeneniye rasshirennogo fil'tra Kalmana dlya identifikatsii parametrov raspredelennoy dinamicheskoy sistemy* [Application of the extended Kalman filter to identify the parameters of a distributed dynamic system]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya Sistemnyy analiz i informatsionnyye tekhnologii* [Proceedings of Voronezh State University. Series Systems Analysis and Information Technologies]. 3:44-50.
15. Kopytin, A. V., and E. A. Kopytina. 2019. *Primeneniye integral'nogo metoda identifikatsii parametrov raspredelennoy dinamicheskoy sistemy* [Application of the integral method for identifying the parameters of a distributed dynamic system]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya Sistemnyy analiz i informatsionnyye tekhnologii* [Proceedings of Voronezh State University. Series Systems Analysis and Information Technologies]. 1:21-26.
16. Ben-Moshe D. Identification of linear regressions with errors in all variables // *Econometric Theory*. 2020. Pp. 1-31.
17. Fogler H. R. A pattern recognition model for forecasting // *Management science*. 1974. Vol. 20. Pp. 1178-1189.
18. Conejo A. J., Plazas M. A., Espinola R., Molina A. B. Day-ahead electricity price forecasting using the wavelet transform and ARIMA models // *IEEE transaction on power systems*. 2005. Vol. 20. – Pp. 1035-1042.
19. Chui C. K., Chen G. *Kalman filtering with real-time applications*. Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009. 241 p.

**Kopytin A. V.** PhD, Associate Professor, Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education "Voronezh State University", Universitetskaya Pl., 1, Voronezh, 394018, Russia, e-mail: alexkopytin@gmail.com

**Kopytina E. A.** Postgraduate Student, Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education "Voronezh State University", Universitetskaya Pl., 1, Voronezh, 394018, Russia, e-mail: zhemkaterina@yandex.ru

**Matveev M. G.** PhD, Full Professor, Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education "Voronezh State University", Universitetskaya Pl., 1, Voronezh, 394018, Russia, e-mail: mgmatveev@yandex.ru