Методы вывода для нечетких систем при несинглтонной фаззификации*

В. Г. Синюк, С. В. Кулабухов

Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова, Белгород, Россия

Аннотация. В статье изложен результат логического вывода для широко используемых нечетких систем при несинглтонной фаззификации. Он достигнут на основании обобщенного правила modus ponens с применением нечеткого значения истинности. Это дало возможность снизить вычислительную сложность реализации нечеткого вывода с экспоненциальной до полиномиальной. К полученным результатам вывода применены наиболее часто используемые в приложениях процедуры дефаззификации.

Ключевые слова: обобщенное нечеткое правило modus ponens, несинглтонная фаззификация, нечеткое значение истинности, экспоненциальная и полиномиальная вычислительная сложность.

DOI 10.14357/20718632230211

Введение

Нечеткие системы рассматриваются как композиция фаззификатора, базы знаний, модуля вывода и дефаззификатора. Разнообразные комбинации методов вывода, фаззификации и дефаззификации приводят к многочисленным конструкциям нечетких систем. Наиболее популярная база знаний получена из первых исследований Мамдани [1], где как в антецедентной, так и в консеквентной частях правил используются нечеткие множества. Эта форма эволюционирует до формы типа Такаги-Сугено [2], где в консеквентной части правил нечеткие множества заменяются четкими функциями.

В последнее время при разработке нечетких систем уделяется внимание изменению метода фаззификации. Фаззификация — это отображение из точки входного пространства в нечеткое множество. Основным методом является синглтонная фаззификация [3]. Она обычно применяется всегда при любом характере входных данных. Основным преимуществом такого подхода является существенное упрощение реализации методов вывода нечетких систем, особенно для нейро-нечетких систем. Альтернативным решением является несинглтонная (NS) фаззификация [4-6].

NS-фаззификация используется в нечетких системах на основе правил, когда измерения, которые их активируют, несовершенны или неопределенны (из-за шума измерений, дефектов или ухудшения качества датчиков и т.д.), или когда их входными данными являются слова (как при вычислениях со словами). NS-фаззификация моделирует такие измерения или слова нечеткими числами или более общими нечеткими множествами, так что, независимо

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант №20-07-00030.

от причины несовершенства или неопределенности измерения или слова, они рассматриваются в рамках нечетких множеств и систем.

Фаззификация NS была введена и исследована для нечетких систем типа Мамдани и Такаги-Сугено в частном случае в [6-8]. Данная статья посвящена развитию этого подхода для более общей постановки задачи. Проблема состоит в том, что в этом случае для нечетких систем MISO-структуры реализация нечеткого вывода с использованием известных методов приводит к экспоненциальной вычислительной сложности. В статье рассмотрены методы вывода на основе нечеткого значения истинности, снижающего вычислительную сложность до полиномиальной.

В разделе 1 описана постановка задачи и оценка сложности при NS-фаззификации нечеткими числами при традиционном подходе. В разделе 2 представлены методы вывода для нечетких систем Мамдани и Такаги-Сугено с применением нечеткого значения истинности, что позволило снизить вычислительную сложность до полиномиальной и обобщить задачу вывода при NS-фаззификации. Раздел 3 посвящен применению методов дефаззификации к результатам, полученным в разделе 2.

1. Постановка задачи

Лингвистическая модель представляет собой базу нечетких правил R_k, $k=\overline{1,N}$ вида

$$R_k: \text{Если } x_1 \text{ есть } A_{1k} \text{ и } x_2 \text{ есть } A_{2k} \text{ и } \ldots \text{ и } x_n \text{ есть } A_{nk}, \text{ то } y \text{ есть } B_k, \tag{1}$$

где N — количество нечетких правил, $A_{ik} \subseteq X_i$, $i=\overline{1,n}$, $B_k \subseteq Y$ — нечеткие множества, которые характеризуются функциями принадлежности $\mu_{A_{ik}}(x_i)$ и $\mu_{B_k}(y)$ соответственно; x_1, x_2, …, x_n — входные переменные лингвистической модели, причем

$$[x_1, x_2, \ldots, x_n]^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{x} \in X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n.$$

Символами X_i, $i=\overline{1,n}$ и Y обозначаются соответственно пространства входных и выходной переменных. Если ввести обозначения $\boldsymbol{X} = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ и $\boldsymbol{A_k} = A_{1k} \times A_{2k} \times \ldots \times A_{nk}$, причем

$$\mu_{\mathbf{A_k}}(\boldsymbol{x}) = \underset{i=\overline{1,n}}{\mathrm{T_1}} \mu_{A_{ik}}(x_i),$$

где T_1 — произвольная t-норма, то правило (1) представляется в виде нечеткой импликации

$$R_k: \boldsymbol{A_k} \to B_k, \quad k=\overline{1,N}.$$

Правило R_k можно формализовать как нечеткое отношение, определенное на множестве $\boldsymbol{X} \times Y$, т.е. $R_k \subseteq \boldsymbol{X} \times Y$ — нечеткое множество с функцией принадлежности

$$\mu_{R_k}(\boldsymbol{x}, y) = \mu_{\mathbf{A_k} \to B_k}(\boldsymbol{x}, y).$$

Модель Мамдани определяет задание функции $\mu_{\mathbf{A_k} \to B_k}(\boldsymbol{x}, y)$ на основе известных функций принадлежности $\mu_{\mathbf{A_k}}(\boldsymbol{x})$ и $\mu_{B_k}(y)$ следующим образом [3; 9]:

$$\mu_{\mathbf{A_k} \to B_k}(\boldsymbol{x}, y) = \mathrm{T}_2\left(\mu_{\mathbf{A_k}}(\boldsymbol{x}), \mu_{B_k}(y)\right) = \mu_{\mathbf{A_k}}(\boldsymbol{x}) \overset{\mathrm{T}_2}{*} \mu_{B_k}(y),$$

где T_2 — произвольная t-норма.

Ставится задача определить нечеткий вывод $B'_k \subseteq Y$ для системы, представленной в виде (1), если на входах — нечеткие множества

$$A' = A'_1 \times A'_2 \times \ldots \times A'_n \subseteq \boldsymbol{X} \text{ или } x_1 \text{ есть } A'_1 \text{ и } x_2 \text{ есть } A'_2 \text{ и } \ldots \text{ и } x_n \text{ есть } A'_n$$

с соответствующей функцией принадлежности $\mu_{\mathbf{A}'}(\boldsymbol{x})$, которая определяется как

$$\mu_{\mathbf{A}'}(\boldsymbol{x}) = \underset{i=\overline{1,n}}{\mathrm{T_3}} \mu_{A'_i}(x_i).$$

Несинглтонный фаззификатор отображает измеренное $x_i = x'_i$, $i=\overline{1,n}$ в нечеткое число, для которого $\mu_{A'_i}(x'_i)=1$ и $\mu_{A'_i}(x_i)$ уменьшается от единицы по мере удаления от x'_i.

Концептуально [8] NS фаззификация подразумевает, что данное входное значение x'_i есть значение, которое будет верным из всех значений, находящихся рядом; однако, так как вход является неопределенным, соседние значения также могут быть верными, но в меньшей степени.

В соответствии с обобщенным нечетким правилом *modus ponens* [3], нечеткое множество B'_k определяется композицией нечеткого множества $\boldsymbol{A}'$ и отношения R_k, т.е.

$$B'_k = \boldsymbol{A}' \circ (\boldsymbol{A_k} \to B_k),$$

или, на уровне функций принадлежности,

$$\mu_{B'_k}(y \mid \boldsymbol{x}') = \sup_{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}} \left\{ \mu_{\boldsymbol{A}'}(\boldsymbol{x}) \overset{\mathrm{T}_4}{*} \left(\mu_{\boldsymbol{A}_k}(\boldsymbol{x}) \overset{\mathrm{T}_2}{*} \mu_{B_k}(y) \right) \right\}, \quad (2)$$

где T_2 может быть любым оператором в классе t-норм.

В (2) применена условная нотация, так как ввод в нечеткую систему происходит при определенном значении $\boldsymbol{x}$, а именно $\boldsymbol{x}'$. Обозначение $\mu_{B'_k}(y \mid \boldsymbol{x}')$ показывает, что $\mu_{B'_k}$ изменяется с каждым значением $\boldsymbol{x}'$.

Сложность выражения (2) составляет $\mathrm{O}\big(|X_1| \cdot |X_2| \cdot \ldots \cdot |X_n| \cdot |Y|\big)$.

2. Методы вывода с использованием нечеткого значения истинности (НЗИ)

Для снижения экспоненциальной сложности (2) рассмотрим следующие методы вывода.

2.1. Метод вывода, когда t-нормы различны

Применяя правило истинностной модификации [10]

$$\mu_{\boldsymbol{A}'}(\boldsymbol{x}) = \tau_{\boldsymbol{A}_k|\boldsymbol{A}'}\big(\mu_{\boldsymbol{A}_k}(\boldsymbol{x})\big),$$

где $\tau_{\boldsymbol{A}_k|\boldsymbol{A}'}(\cdot)$ — нечеткое значение истинности (*нзи*) нечеткого множества $\boldsymbol{A}_k$ относительно $\boldsymbol{A}'$, представляющее собой функцию принадлежности совместимости $CP(\boldsymbol{A}_k, \boldsymbol{A}')$ $\boldsymbol{A}_k$ по отношению к $\boldsymbol{A}'$, причем $\boldsymbol{A}'$ рассматривается как достоверное [11]:

$$\tau_{\boldsymbol{A}_k|\boldsymbol{A}'}(v) = \mu_{CP(\boldsymbol{A}_k, \boldsymbol{A}')}(v) = \sup_{\substack{\mu_{\boldsymbol{A}_k}(\boldsymbol{x}) = v \\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}}} \left\{ \mu_{\boldsymbol{A}'}(\boldsymbol{x}) \right\},$$

перейдем от переменной $\boldsymbol{x}$ к переменной v, обозначив $\mu_{\boldsymbol{A}_k}(\boldsymbol{x}) = v$. Получим:

$$\mu_{\boldsymbol{A}'}(\boldsymbol{x}) = \tau_{\boldsymbol{A}_k|\boldsymbol{A}'}\big(\mu_{\boldsymbol{A}_k}(\boldsymbol{x})\big) = \tau_{\boldsymbol{A}_k|\boldsymbol{A}'}(v), \quad (3)$$

тогда (2) примет вид:

$$\mu_{B'_k}(y|\boldsymbol{x}') = \sup_{v \in [0;1]} \left\{ \tau_{\boldsymbol{A}_k|\boldsymbol{A}'}(v) \overset{\mathrm{T}_4}{*} \left(v \overset{\mathrm{T}_2}{*} \mu_{B_k}(y) \right) \right\}. \quad (4)$$

При вербализации «инженерной» импликации в (4) она представится в виде:

Если *нзи* есть *истинно*, то y есть B'_k. (5)

Таким образом, (5) представляет собой еще одну структуру правил в отличие от канонических структур Заде [12] и Такаги-Сугено [2]. Применение данного правила не зависит от количества входов в нечетких системах.

Как следует из (4), вывод B'_k есть результат композиции полученного значения *нзи* между антецедентом правила (1) $\boldsymbol{A}_k$ относительно входов $\boldsymbol{A}'$ и «инженерной» импликации (5). Такое преобразование реализует вывод в рамках единого пространства истинности, упрощает вычисление составной функции *нзи* (3) и лишено проблем многомерного анализа (2).

Выражение (4) характеризуется сложностью порядка $\mathrm{O}\big(|v| \cdot |Y|\big)$. Как следует из [13; 14]:

$$\mu_{CP(\boldsymbol{A}_k, \boldsymbol{A}')}(v) = \underset{i=\overline{1,n}}{\tilde{\mathrm{T}}_1} \mu_{CP(A_{ki}, A'_i)}(v_i) =$$
$$= \Big(\ldots\Big(\mu_{CP(A_{k1}, A'_1)}(v_1)\ \tilde{\mathrm{T}}_1\ \mu_{CP(A_{k2}, A'_2)}(v_2)\Big)\ \tilde{\mathrm{T}}_1 \ldots\Big)\ \tilde{\mathrm{T}}_1$$
$$\tilde{\mathrm{T}}_1\ \mu_{CP(A_{kn}, A'_n)}(v_n),$$

где $\tilde{\mathrm{T}}_1$ — расширенная по принципу обобщения n-местная t-норма и

$$\mu_{CP(A_{ki}, A'_i)}(v_i) = \sup_{\substack{\mu_{A_{ki}}(x_i) = v_i \\ x_i \in X_i}} \left\{ \mu_{A'_i}(x_i) \right\}.$$

Например, двухместная расширенная t-норма имеет вид:

$$\mu_{CP(\boldsymbol{A}_k, \boldsymbol{A}')}(v) = \underset{i=\overline{1,2}}{\tilde{\mathrm{T}}_1} \mu_{CP(A_{ki}, A'_i)}(v_i) =$$
$$= \sup_{\substack{v_1 \mathrm{T}_1 v_2 = v \\ (v_1, v_2) \in [0;1]^2}} \left\{ \mu_{CP(A_{k1}, A'_1)}(v_1)\ \mathrm{T}_3\ \mu_{CP(A_{k2}, A'_2)}(v_2) \right\}.$$

Последнее соотношение характеризуется сложностью порядка $\mathrm{O}\big(|v|^2\big)$.

2.2. Метод вывода, если $\mathrm{T}_4 = \mathrm{T}_2 = \mathrm{T}$

С учетом свойства ассоциативности t-норм выражение (4) примет вид:

$$\mu_{B'_k}(y \mid \boldsymbol{x}') = \sup_{v \in [0;1]} \left\{ \tau_{\boldsymbol{A}_k|\boldsymbol{A}'}(v) \overset{\mathrm{T}}{*} \left(v \overset{\mathrm{T}}{*} \mu_{B_k}(y) \right) \right\} =$$
$$= \sup_{v \in [0;1]} \left\{ \left(\tau_{\boldsymbol{A}_k|\boldsymbol{A}'}(v) \overset{\mathrm{T}}{*} v \right) \overset{\mathrm{T}}{*} \mu_{B_k}(y) \right\} = \quad (6)$$
$$= \sup_{v \in [0;1]} \left\{ \tau_{\boldsymbol{A}_k|\boldsymbol{A}'}(v) \overset{\mathrm{T}}{*} v \right\} \overset{\mathrm{T}}{*} \mu_{B_k}(y) = \Pi_{\boldsymbol{A}_k|\boldsymbol{A}'} \overset{\mathrm{T}}{*} \mu_{B_k}(y),$$

где

$$\Pi_{\boldsymbol{A}_k|\boldsymbol{A}'} = \sup_{v \in [0;1]} \left\{ \tau_{\boldsymbol{A}_k|\boldsymbol{A}'}(v) \overset{\mathrm{T}}{*} v \right\}$$

есть скалярная величина, которая является мерой возможности [15], т.е. насколько антецедент правила $\boldsymbol{A}_k$ соответствует входам $\boldsymbol{A}'$. Возможность здесь определяется как мера совместимости полученного значения *нзи* (3) со значением *истинно*.

Как следует из [7], $\Pi_{\boldsymbol{A}_k|\boldsymbol{A}'} \in [0;1]$ есть уровень срабатывания (firing level) правила R_k, который меняется с каждым значением $\boldsymbol{x}'$.

Таким образом, применение нечеткого значения истинности при методе вывода (6) получен при различных T_1, T_3 и $\mathrm{T} = \mathrm{T}_2 = \mathrm{T}_4$. Данный результат обобщает результат, полученный в [7; 8], когда имеет место ограничение на равенство всех t-норм.

2.3. Метод вывода для нечетких систем типа Такаги-Сугено (ТС)

Описание нечетких систем ТС реализуется с помощью правил (1), консеквент которых имеет вид:

$$\mu_{B_k}(y) = \begin{cases} 1, & \text{если } y = f_k(\boldsymbol{x}), \\ 0, & \text{если } y \neq f_k(\boldsymbol{x}), \end{cases} \tag{7}$$

где $f_k(\boldsymbol{x})$ — функция, имеющая одинаковую для всех правил $k = \overline{1, N}$ структуру и различающаяся параметрами.

Учитывая (7) следует, что для правил ТС (6) преобразуется к виду:

$$\mu_{B'_k}(y \mid \boldsymbol{x}') = \mu_{B'_k}(\boldsymbol{x}') = \Pi_{\boldsymbol{A}_k|\boldsymbol{A}'}, \quad \text{если} \quad y = f_k(\boldsymbol{x}').$$

Отметим, что для нечеткой системы ТС, $\mu_{B'_k}(\boldsymbol{x}')$ является явной функцией $\boldsymbol{x}'$ и неявной функцией y, где $\boldsymbol{x}' \in X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$. Явное применение консеквента $f_k(\boldsymbol{x}')$ будет реализовано на этапе дефаззификации (подраздел 3.4).

Таким образом, с учетом результатов подразделов 2.2 и 2.3:

Теорема. Пусть $\boldsymbol{x}'$ является входом в нечеткую систему. Тогда функция принадлежности B'_k с учетом уровня срабатывания правила R_k, $k = \overline{1, N}$ равна:

$$\begin{cases} \text{для систем Мамдани:} & \mu_{B'_k}(y \mid \boldsymbol{x}') = \Pi_{\boldsymbol{A}_k|\boldsymbol{A}'} \overset{\mathrm{T}}{*} \mu_{B_k}(y); \\ \text{для систем ТС:} & \mu_{B'_k}(\boldsymbol{x}') = \Pi_{\boldsymbol{A}_k|\boldsymbol{A}'}, \\ & \text{если } y = f_k(\boldsymbol{x}'). \end{cases} \tag{8}$$

3. Дефаззификация

Наиболее часто используются в реальных приложениях [7] для нечеткой системы Мамдани дефаззификаторы: по среднему центру (Center Average, CA), по центру множеств (Center-of-Sets, CoS) и метод центра тяжести (Center of Area, CoA).

Два вида дефаззификации для нечеткой системы ТС описаны в подразделе 3.4.

3.1. Дефаззификация по среднему центру

Выходное значение нечеткой системы с учетом (8) определяется [3]:

$$\begin{aligned} \overline{y}_{\mathrm{CA}}(\boldsymbol{x}') &= \frac{\sum_{k=\overline{1,N}} \overline{y}_k \cdot \mu_{B'_k}(\overline{y}_k | \boldsymbol{x}')}{\sum_{k=\overline{1,N}} \mu_{B'_k}(\overline{y}_k | \boldsymbol{x}')} = \\ &= \frac{\sum_{k=\overline{1,N}} \overline{y}_k \cdot \Pi_{\boldsymbol{A}_k|\boldsymbol{A}'} \overset{\mathrm{T}}{*} \mu_{B_k}(\overline{y}_k)}{\sum_{k=\overline{1,N}} \Pi_{\boldsymbol{A}_k|\boldsymbol{A}'} \overset{\mathrm{T}}{*} \mu_{B_k}(\overline{y}_k)}. \end{aligned} \tag{9}$$

В (9), $\overline{y}_k$ — центры функций принадлежности $\mu_{B_k}(y)$, $k = \overline{1, N}$, т.е. значения в которых:

$$\mu_{B_k}(\overline{y}_k) = \sup_{y \in Y} \left\{ \mu_{B_k}(y_k) \right\} = 1, \tag{10}$$

тогда (9) примет вид:

$$\overline{y}_{\mathrm{CA}}(\boldsymbol{x}') = \frac{\sum_{k=\overline{1,N}} \overline{y}_k \cdot \Pi_{\boldsymbol{A}_k|\boldsymbol{A}'}}{\sum_{k=\overline{1,N}} \Pi_{\boldsymbol{A}_k|\boldsymbol{A}'}} \tag{11}$$

т.к. t-норма по определению удовлетворяет граничному условию $\mathrm{T}(a,\, 1) = a$.

Проблема дефаззификации по среднему центру возникает, когда функция принадлежности консеквента правила R_k имеет максимальное значение при $y = 0$ (например, функция принадлежности самого левого терма B_k). Такое правило будет обнуляться следуя (11). Эта проблема устраняется дефаззификатором CoS.

3.2. Дефаззификация по центру множеств

При этой дефаззификации [16] каждая функция принадлежности консеквента заменяется синглтоном, расположенным в его центре тяжести (CoA) с амплитудой, равной уровню срабатывания (firing level) правила R_k, после чего определяется центроид данных синглтонов.

Выражение для вывода с CoS дефаззификацией задается:

$$\bar{y}_{\text{CoS}}(\boldsymbol{x}') = \frac{\sum\limits_{k=\overline{1,N}} \text{CoA}(B_k) \cdot \Pi_{\boldsymbol{A}_k|\boldsymbol{A}'}}{\sum\limits_{k=\overline{1,N}} \Pi_{\boldsymbol{A}_k|\boldsymbol{A}'}} = \frac{\sum\limits_{k=\overline{1,N}} c_k \cdot \Pi_{\boldsymbol{A}_k|\boldsymbol{A}'}}{\sum\limits_{k=\overline{1,N}} \Pi_{\boldsymbol{A}_k|\boldsymbol{A}'}}. \qquad (12)$$

В (12), c_k есть центроид функции принадлежности консеквента правила R_k. Они могут быть определены предварительно.

Если каждая функция принадлежности B_k является симметричной, нормальной и выпуклой, то $c_k = \bar{y}_k$, но для несимметричной функции принадлежности $c_k \neq \bar{y}_k$. Поэтому в общем случае $\bar{y}_{\text{CoS}}(\boldsymbol{x}') \neq \bar{y}_{\text{CA}}(\boldsymbol{x}')$.

3.3. Дефаззификация на основе метода центра тяжести

Дефаззификатор CoA определяет четкий вывод нечеткой системы [3]:

$$\bar{y}_{\text{CoA}}(\boldsymbol{x}') = \frac{\sum\limits_{k=\overline{1,N}} \bar{y}_k \cdot \mu_{B'}(\bar{y}_k | \boldsymbol{x}')}{\sum\limits_{k=\overline{1,N}} \mu_{B'}(\bar{y}_k | \boldsymbol{x}')}. \qquad (13)$$

Нечеткое множество B' получается как результат объединения нечетких множеств B'_k, $k = \overline{1,N}$ с помощью оператора max или других s-норм, т.е.

$$\mu_{B'}(y | \boldsymbol{x}') = \underset{j=\overline{1,N}}{\text{S}} \mu_{B'_j}(y | \boldsymbol{x}'). \qquad (14)$$

Тогда (13) с учетом (14) и (8) примет вид:

$$\bar{y}_{\text{CoA}}(\boldsymbol{x}') = \frac{\sum\limits_{k=\overline{1,N}} \bar{y}_k \cdot \underset{j=\overline{1,N}}{\text{S}} \mu_{B'_j}(\bar{y}_k | \boldsymbol{x}')}{\sum\limits_{k=\overline{1,N}} \underset{j=\overline{1,N}}{\text{S}} \mu_{B'_j}(\bar{y}_k | \boldsymbol{x}')} = \frac{\sum\limits_{k=\overline{1,N}} \bar{y}_k \cdot \underset{j=\overline{1,N}}{\text{S}} \left\{ \Pi_{\boldsymbol{A}_j|\boldsymbol{A}'} \overset{\text{T}}{*} \mu_{B_j}(\bar{y}_k) \right\}}{\sum\limits_{k=\overline{1,N}} \underset{j=\overline{1,N}}{\text{S}} \left\{ \Pi_{\boldsymbol{A}_j|\boldsymbol{A}'} \overset{\text{T}}{*} \mu_{B_j}(\bar{y}_k) \right\}}. \qquad (15)$$

Обозначим $\mu_{B_j}(\bar{y}_k) = b_{jk}$. Согласно (10), $b_{kk} = \mu_{B_k}(\bar{y}_k) = 1$. Тогда (15):

$$\bar{y}_{\text{CoA}}(\boldsymbol{x}') = \frac{\sum\limits_{k=\overline{1,N}} \bar{y}_k \cdot \underset{j=\overline{1,N}}{\text{S}} \left\{ \Pi_{\boldsymbol{A}_j|\boldsymbol{A}'} \overset{\text{T}}{*} b_{jk} \right\}}{\sum\limits_{k=\overline{1,N}} \underset{j=\overline{1,N}}{\text{S}} \left\{ \Pi_{\boldsymbol{A}_j|\boldsymbol{A}'} \overset{\text{T}}{*} b_{jk} \right\}}. \qquad (16)$$

Если $b_{jk} = 0$ для $j,k = \overline{1,N}$, $j \neq k$, то (16) примет вид выражения (11). Условия $b_{jk} = 0$ соответствуют условиям, в которых консеквенты правил R_k представляют собой нечеткие множества-синглтоны, либо функции принадлежности B_k не пересекаются.

3.4. Дефаззификация нечетких систем типа ТС

Один вид дефаззификатора для нечетких систем ТС приводит к ненормированной нечеткой системе [2], для которой:

$$\bar{y}_{\text{TS}}(\boldsymbol{x}') = \sum_{k=\overline{1,N}} \Pi_{\boldsymbol{A}_k|\boldsymbol{A}'} \cdot f_k(\boldsymbol{x}').$$

Второй вид дефаззификатора приводит к нормированной нечеткой системе ТС:

$$\bar{y}_{\text{TS}}(\boldsymbol{x}') = \frac{\sum\limits_{k=\overline{1,N}} \Pi_{\boldsymbol{A}_k|\boldsymbol{A}'} \cdot f_k(\boldsymbol{x}')}{\sum\limits_{k=\overline{1,N}} \Pi_{\boldsymbol{A}_k|\boldsymbol{A}'}}.$$

В частном случае, когда $f_k(\boldsymbol{x}') = f_k$, т.е. является константой, структурно $\bar{y}_{\text{CoS}}(\boldsymbol{x}')$ и $\bar{y}_{\text{TS}}(\boldsymbol{x}')$ совпадают.

Заключение

Приведенные в статье методы вывода для нечетких систем типа Мамдани и Такаги-Сугено дают возможность применять их в случае, если используется несинглтонная фаззификация. Было доказано, что вычислительная сложность реализации вывода для нечетких систем со многими входами является полиномиальной. Данные результаты достигнуты благодаря подходу, основанному на нечетком значении истинности. Следствием этого подхода является также новая структура лингвистических правил (5), применение которого не зависит от размерности входов в нечетких системах.

Литература

1. Mamdani E. H. Applications of Fuzzy Algorithm for Control a Simple Dynamic Plant // Proc. IEEE. — 1974. — Т. 121, No 12. — С. 1585—1588.
2. Takagi T., Sugeno M. Fuzzy Identification of Systems and Its Application to Modeling and Control // IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics. — 1985. — Т. 15, No 1. — С. 116—132.
3. Рутковский Л. Методы и технологии искусственного интеллекта. — М.: Горячая линия — Телеком, 2010.
4. Pourabdollah A., John R., Garibaldi J. M. A new dynamic approach for non-singleton fuzzification in noisy time-series prediction // Proc. of FUZZ-IEEE 2017. — 2017. — С. 1—6.
5. Input Uncertainty Sensitivity Enhanced Nonsingleton Fuzzy Logic Controllers for Long-Term Navigation of Quadrotor UAVs / C. Fu [и др.] // IEEE/ASME Transactions on Mechatronics. — 2018. — Т. 23, No 2. — С. 725—734.
6. Mendel J. M. Non-Singleton Fuzzification Made Simpler // Information Sciences. — 2021. — Т. 559. — С. 286—308.
7. Mendel J. M. Uncertain Rule-Based Fuzzy Systems: Introduction and New Directions. — Cham: Springer, 2017.
8. Mouzouris G. C., Mendel J. M. Non-Singleton Fuzzy Logic Systems: Theory and Application // IEEE Transactions on Fuzzy Systems. — 1997. — Т. 5, No 1. — С. 56—71.
9. Пегат А. Нечеткое моделирование и управление. — М.: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2009.
10. Борисов А. Н., Крумберг О. А., Федоров И. П. Принятие решений на основе нечетких моделей. Примеры использования. — Рига: Зинатне, 1990.
11. Дюбуа Д., Прад А. Теория возможностей. Приложение к представлению знаний в информатике. — М.: Радио и связь, 1990.
12. Zadeh L. A. Outline of a New Approach to the Analysis of Complex Systems and Decision Processes // IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics. — 1973. — Т. 3, No 1. — С. 28—44.
13. Синюк В. Г., Михелев В. В. Методы вывода для систем логического типа на основе нечеткой степени истинности // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2018. — No 3. — С. 108—115.
14. Sinuk V. G., Polyakov V. M., Kutsenko D. A. New Fuzzy Truth Value Based Inference Methods for Non-singleton MISO Rule-Based Systems // Proceedings of the First International Scientific Conference “Intelligent Information Technologies for Industry” (IITI ’16). — Sochi, 2016.
15. Fuzzy-set Based Logics — An History-Oriented Presentation of Their Main Developments / D. Dubois [и др.] // The Many Valued and Nonmonotonic Turn in Logic. Т. 8 / под ред. M. D. Gabbay, W. John. — Elsevier, 2007. — Гл. 2.3 Fuzzy Truth-Values – Degree of Truth vs. Degree of Uncertainty. С. 325—449. — (Handbook of the History of Logic book series).
16. Sugeno M., Yasukawa T. A Fuzzy-Logic-Based Approach to Qualitative Modeling // IEEE Transactions on Fuzzy Systems. — 1993. — Т. 1. — С. 7—31.

Кулабухов Сергей Владимирович Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова» (БГТУ им. В.Г. Шухова), Белгород, Россия. Аспирант. Область научных интересов: нечеткие системы. E-mail: qlba@ya.ru

Синюк Василий Григорьевич. Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова» (БГТУ им. В.Г. Шухова), Белгород, Россия. Профессор, кандидат технических наук, доцент. Область научных интересов: нечеткие системы. E-mail: vgsinuk@mail.ru.

Inference Methods for Fuzzy Systems with Non-Singleton Fuzzification

V. G. Sinuk, S. V. Kulabukhov

Federal State Budget Educational Institution of Higher Education “Belgorod State Technological University named after V.G. Shukhov”, Belgorod, Russia

Abstract. The paper derives the inference result for widely used fuzzy systems in case of non-singleton fuzzification. It is achieved by means of the approach based on the fuzzy truth values, which made it possible to reduce the computational complexity of the inference down to polynomial and to generalize the conditions for logical inference. The most commonly used defuzzification methods in applications were considered along with the obtained expressions of inference result.

Keywords: fuzzy truth values, computational complexity, firing level.

DOI 10.14357/20718632230211

References

1. Mamdani, E.: Applications of fuzzy algorithm for control a simple dynamic plant. Proc. IEEE 121(12), 1585–1588 (1974).
2. Takagi, T., Sugeno, M.: Fuzzy identification of systems and its application to modeling and control. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics 15(1), 116–132 (1985).
3. Rutkowski, L.: Metody i tekhnologii iskusstvennogo intellekta [Computational Intelligence: Methods and Techniques]. Hot Line — Telecom, Moscow (2010)
4. Pourabdollah, A., John, R., Garibaldi, J.M.: A new dynamic approach for non-singleton fuzzification in noisy time-series prediction. Proc. of FUZZ-IEEE 2017, pp. 1–6 (2017).
5. Fu, C., Sarabakha, A., Kayacan, E., Wagner, C., John, R., Garibaldi, J.: Input uncertainty sensitivity enhanced nonsingleton fuzzy logic controllers for long-term navigation of quadrotor uavs. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics 23(2), 725–734 (2018).
6. Mendel, J.: Non-singleton fuzzification made simpler. Information Sciences 559, 286–308 (2021)
7. Mendel, J.: Uncertain Rule-Based Fuzzy Systems: Introduction and New Directions, second edn. Springer, Cham, Switzerland (2017).
8. Mouzouris, G., Mendel, J.: Non-singleton fuzzy logic systems: Theory and application. IEEE Transactions on Fuzzy Systems 5(1), 56–71 (1997).
9. Pegat, A.: Nechetkoe modelirovanie i upravlenie [Fuzzy Modelling and Control]. BINOM, Laboratory of Knowledge, Moscow (2009).
10. Borisov, A., Krunberg, O., Fedorov, I.: Prinyatie reshenij na osnove nechetkih modelej [Decision Making Based on Fuzzy Models]. Zinatne, Riga (1990).
11. Dubois, D., Prade, A.: Teoriya vozmozhnostej. Prilozhenie k predstavleniyu znanij v informatike [Possibility Theory. Application to Knowledge Representation in Computer Science]. Radio and Communication, Moscow (1990).
12. Zadeh, L.A.: Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics 3(1), 28–44 (1973).
13. Sinuk, V., Mikhelev, V.: Metody vyvoda dlya sistem logicheskogo tipa na osnove nechetkoj stepeni istinnosti [Inference methods for logical systems based on fuzzy degree of truth]. Bulletin of Russian Academy of Sciences. Theory and Control Systems (3), 108–115 (2018).
14. Sinuk, V.G., Polyakov, V.M., Kutsenko, D.A.: New fuzzy truth value based inference methods for non-singleton miso rule-based systems. Proceedings of the First International Scientific Conference “Intelligent Information Technologies for Industry” (IITI ’16) (2016)
15. Dubois, D., Esteva, F., Godo, L., Prade, H.: Fuzzy-set Based Logics - An History-Oriented Presentation of Their Main Developments. In: M.D. Gabbay, W. John (eds.) The Many Valued and Nonmonotonic Turn in Logic, Handbook of the History of Logic book series, vol. 8, chap. 2.3 Fuzzy Truth-Values – Degree of Truth vs. Degree of Uncertainty, pp. 325–449. Elsevier (2007).
16. Sugeno, M., Yasukawa, T.: A fuzzy-logic-based approach to qualitative modeling. IEEE Transactions on Fuzzy Systems 1, 7–31 (1993).

Sinuk V. G. PhD, associate professor. Federal State Budget Educational Institution of Higher Education «Belgorod State Technological University named after V.G. Shukhov», 46 Kostyukova Street, Belgorod, Russia. E-mail: vgsinuk@mail.ru

Kulabukhov S. V. Postgraduate student. Federal State Budget Educational Institution of Higher Education «Belgorod State Technological University named after V.G. Shukhov», 46 Kostyukova Street, Belgorod, Russia. E-mail: qlba@ya.ru