

# О некоторых свойствах нелинейных интегральных моделей динамических процессов\*

С. В. Солодуша<sup>1</sup>, Е. Д. Антипина<sup>1,II</sup>

<sup>1</sup>Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН, Иркутск, Россия

<sup>II</sup>Иркутский государственный университет, Иркутск, Россия

**Аннотация.** В статье представлены алгоритмы построения динамических моделей технических (энергетических) систем в условиях зашумленных данных. Рассматривается один класс нелинейных систем интегральных уравнений вольтерровского типа I рода с входным сигналом, состоящим из двух компонент. Хорошо известна задача идентификации входного сигнала линейных систем, когда путем дифференцирования интегральных уравнений Вольтерра I рода выполняется редукция к системе интегральных уравнений II рода. При построении моделей формируется управляющее входное воздействие, обеспечивающее заданный отклик динамической системы. Используются алгоритмы идентификации, основанные на теории полиномиальных уравнений Вольтерра. В работе рассмотрен случай при зашумленных исходных данных, в том числе, когда условие невырожденности матриц перед главной частью в некоторые фиксированные моменты времени нарушается.

**Ключевые слова:** идентификация, динамические процессы, интегральные модели, полиномиальные уравнения Вольтерра I рода.

DOI 10.14357/20718632240209 EDN XQUEEY

## Введение

Одним из важнейших направлений математического моделирования процессов и систем является идентификация – построение моделей по данным реального функционирования. Функциональные ряды Вольтерра [1] занимают достойное место среди разнообразных методов идентификации нелинейных систем типа «вход–выход» в условиях априорной неопределенности (например, [2]). В научной литературе [3–5] отмечаются универсальные свойства указанного математического аппарата и его применимость для различных технических объектов. В данной работе исследуются свойства моделей на основе интегро-степенных рядов Вольтерра при моделировании в режиме реального времени динамики технических объектов в энергетике.

Под онлайн моделированием динамических процессов будем понимать оценивание отклика на возможные внешние изменения в режиме реального времени. Вектор входных сигналов может включать измеряемые воздействия и управляющие воздействия, подлежащие идентификации на основе анализа текущего состояния. Современные методы математического моделирования динамических процессов различной природы, в том числе в промышленности и энергетике, основаны на

\* Исследование выполнено в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект FWEU-2021-0006, тема № AAAA-A21-121012090034-3) с привлечением ресурсов Центра коллективного пользования «Высокотемпературный контур».

использовании, во-первых, априорной информации, во-вторых, наблюдаемых данных, и, наконец, совместном применении сведений первого и второго типа. Сложные динамические объекты, такие как энергосистемы, характеризуются сложной иерархической структурой [6]. При построении моделей в отсутствие априорных данных о структуре такого объекта хорошо зарекомендовали себя подходы, позволяющие для идентификации параметров использовать индуктивные знания – закономерности, извлекаемые посредством интеллектуального анализа данных и ассоциативных методов машинного обучения [7, 8]. Подобный подход характеризуется учетом всех ретроспективных знаний об объекте, что влечет повышение точности моделирования.

Применимельно к модели в виде конечного отрезка интегро-степенного ряда (полинома) Вольтерра для векторного входного сигнала  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_p(t))^T$

$$y(t) = \sum_{n=1}^N \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_n \leq p} \int_0^t \dots \int_0^t K_{i_1 \dots i_n}(t, s_1, \dots, s_n) \prod_{j=1}^n x_{i_j}(s_j) ds_j, \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

эта концепция в идейном плане может быть реализована, исходя из нестационарных свойств энергетических систем и объектов. В (1) ядра Вольтерра  $K_{i_1 \dots i_n}$  зависят от текущего состояния  $t \in [0, T]$ , а переменные  $0 \leq s_1, \dots, s_n \leq t$  позволяют учесть значения динамических характеристик в предыдущие моменты времени. Здесь функции  $K_{i_1 \dots i_n}$  симметричны относительно аргументов  $s_1, \dots, s_n$ , соответствующих совпадающим индексам  $i_1, \dots, i_n$ .

На основе элементов теории полиномиальных уравнений Вольтерра I рода (например, [9-11]) авторами была разработана технология идентификации вектора входных сигналов  $x(t)$ . В данной статье, в отличие от [10], используется векторный выход  $y(t)$ , компоненты которого имеют один и тот же физический смысл. С использованием этой технологии реализован для зашумленных исходных данных вычислительный алгоритм идентификации отклонений расхода воды и пара в задаче регулирования давления на выходе конденсатора, входящего в выделенный участок пароводяного тракта в энергоблоке крупной электроэнергетической системы.

## 1. Системы уравнений Вольтерра I рода и их свойства

При автоматическом управлении техническими объектами в энергетике возникает задача определения воздействия  $x(t)$ , которое обеспечивает заданный отклик  $y(t)$ . Применение моделей в виде полиномов Вольтерра (1) с входом  $x(t)$  размерности ( $p \times 1$ ) в случае  $y(t)$  размерности ( $m \times 1$ ) позволяет редуцировать исходную задачу к решению системы  $N$ -й степени следующего вида:

$$y_r(t) = \sum_{n=1}^N \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_n \leq p} \int_0^t \dots \int_0^t K_{i_1 \dots i_n}^{(r)}(t, s_1, \dots, s_n) \prod_{j=1}^n x_{i_j}(s_j) ds_j, \quad t \in [0, T], \quad (2)$$

где переходные характеристики  $K_{i_1 \dots i_n}^{(r)}(t, s_1, \dots, s_n)$  и компоненты отклика  $y_r(t)$ ,  $r = 1, \dots, m$ , считаются известными. В работе [10] компонентами вектора входа энергетического объекта являлись приращения расхода вещества (управляющее воздействие) и тепловой нагрузки (измеряемое воздействие). В качестве выхода рассматривалось отклонение энтальпии в текущий момент времени  $t$  от начального значения, установившегося для времени  $t = 0$ . В случае, когда обе компоненты входного вектора подлежат идентификации, выбирать структурообразующие элементы модели (системы интегральных уравнений) можно различными способами. В статье [9] рассмотрен случай, когда вектор  $y(t)$  содержит компоненты, имеющие разный физический смысл. Такой способ формирования вектора отклика объекта сопряжен с некоторыми трудностями, связанными, в первую очередь, с вопросом замкнутости системы уравнений (число  $m$  компонент  $y(t)$  должно совпадать с числом  $p$  искомых компонент  $x(t)$ ). На практике, как правило, это условие не выполняется, т.е.  $m \neq p$ .

Для решения данной проблемы естественно перейти к формированию вектора  $y(t)$  такими компонентами, которые могут иметь один и тот же физический смысл, но при этом отражают реакцию на сигнал  $x(t)$  различных по структуре интегральных моделей. Этот подход позволяет учесть особенность реального динамического объекта.

Полагая далее, что размерности векторов  $x(t)$  и  $y(t)$  равны ( $p \times 1$ ), и учитывая специфику полиномиальных уравнений Вольтерра I рода [11], представим (2) при фиксированном  $N = 2$  в следующем виде:

$$y(t) = V[Z] = \int_0^t K(t,s)x(s)ds + Z[x], \quad (3)$$

где  $K(t,s)$  – ( $p \times p$ )-матрица,  $x(t)$  и  $y(t)$  – искомая и заданная  $p$ -мерные вектор-функции,  $y(0) = 0$ , а оператор  $Z[x]$  определен по правилу

$$\begin{aligned} Z[x] = & \int_0^t \int_{s_1=1}^{s_2=t} \left[ \sum_{j_1=1}^p L_{j_1}^1(t, s_1, s_2) x_1(s_1) x_{j_1}(s_2) + \sum_{j_2=1}^p L_{j_2}^2(t, s_1, s_2) x_2(s_1) x_{j_2}(s_2) + \right. \\ & \left. + \sum_{j_3=3}^p L_{j_3}^3(t, s_1, s_2) x_3(s_1) x_{j_3}(s_2) + \dots + \sum_{j_{p-1}=p-1}^p L_{j_{p-1}}^{p-1}(t, s_1, s_2) x_p(s_1) x_{j_{p-1}}(s_2) \right] ds_1 ds_2, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $j_m = \overline{1, m}$ . В формуле (4)  $L_{j_m}^m(t, s_1, s_2)$  –  $p$ -мерные вектор-функции, т.е.  $L_{j_m}^m(t, s_1, s_2) = (\mathcal{Z}_{j_m 1}^m(t, s_1, s_2), \mathcal{Z}_{j_m 2}^m(t, s_1, s_2), \dots, \mathcal{Z}_{j_m p}^m(t, s_1, s_2))^T$ , той гладкости, которая необходима для проведения всех выкладок.

Если в (4)

$$\det K(t,t) \neq 0 \quad \forall t \in [0, T], \quad (5)$$

то исследование таких систем на предмет существования единственного решения в классе непрерывных функций проводится по аналогии с интегральными уравнениями Вольтерра I рода [9-11]. Для этого достаточно продифференцировать по  $t$  систему (3) и переписать полученный результат в виде системы II рода, а это возможно в силу условия (5). Такие системы будут наследовать основную особенность полиномиальных уравнений, состоящую в локальности области существования (единственного) непрерывного решения.

Отметим, что при формировании вектора  $y(t)$  предлагаемым способом, в силу разреженности матрицы  $K(t,s)$ , условие (5) может быть нарушено для всех  $t \in [0, T]$ . В этом случае стандартные подходы не дают желаемого результата – систему II рода, т.к. после дифференцирования мы будем иметь систему интегральных уравнений с тождественно вырожденной матрицей перед главной частью. Такие задачи имеют принципиальные отличия от систем типа (3) с условием (5) и требуют привлечения теории интегро-алгебраических уравнений, элементы которой представлены в статье [12]. Этот случай требует отдельного изучения и в данной работе не рассматривается.

В следующем разделе остановимся на изучении свойств систем вида (3), (4) для точно заданных исходных данных, при которых условие (5) выполняется.

## 2. Основные результаты

Рассмотрим случай, когда  $p = 2$ , т.е.  $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$ ,  $y(t) = (y_1(t), y_2(t))^T$ , причем  $y_i(0) = 0$ ,  $y'_i(t) \in C_{[0, T]}$ ,  $i = 1, 2$ . Пусть вместо (3), (4) задана система интегральных уравнений второго порядка

$$y(t) = \int_0^t K(t,s)x(s)ds + Z[x], \quad (6)$$

а оператор  $Z[x]$  определен по правилу

$$Z[x] = \int_0^t \int_0^t \left[ \sum_{i=1}^2 L_i(t, s_1, s_2) x_i(s_1) x_i(s_2) + L_{12}(t, s_1, s_2) x_1(s_1) x_2(s_2) \right] ds_1 ds_2, \quad (7)$$

где  $L_i(t, s_1, s_2) = (0, K_{ii}(t))^T$ ,  $L_{12}(t, s_1, s_2) = (0, K_{12}(t))^T$ ,  $i = 1, 2$ , ядра Вольтерра  $K_i(t) = (K_i^{(1)}(t), K_i^{(2)}(t))$ ,  $K_{ji}(t)$  непрерывны и непрерывно-дифференцируемы по  $t$ , причем  $K_i(t) \neq 0$ ,  $K_{ji}(t) \neq 0$ ,  $1 \leq j \leq i \leq 2$ .

**Теорема 1.** Пусть

$$y_i(t) \in C_{[0,T]}^{(1)}, \quad y_i(0) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Тогда единственное непрерывное решение (6), (7) определяется формулой

$$x_j^*(t) = \frac{\alpha'_i(t) - b'_i(t)}{2a_i(t)} - \frac{\alpha'_i(t) - b_i(t)}{2(a_i(t))^2}, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, \quad i \neq j,$$

$$a_i(t) = K_{jj}(t) + \gamma_i(t)(K_{ii}(t)\gamma_i(t) - K_{12}(t)), \quad \gamma_1(t) = \frac{K_2^{(1)}(t)}{K_1^{(1)}(t)}, \quad \gamma_2(t) = \frac{K_1^{(1)}(t)}{K_2^{(1)}(t)},$$

$$\beta_i(t) = \frac{y_1(t)}{K_i^{(1)}(t)}, \quad b_i(t) = K_j^{(2)}(t) - \gamma_i(t)(K_i^{(2)}(t) + 2K_{ii}(t)\beta_i(t)) + K_{12}(t)\beta_i(t),$$

$$c_i(t) = \beta_i(t)(K_i^{(2)}(t) + K_{ii}(t)\beta_i(t)) - y_2(t), \quad \alpha_i(t) = \sqrt{(b_i(t))^2 - 4a_i(t)c_i(t)}.$$

Условия теоремы 1 включают в себя, во-первых, стандартное условие на гладкость исходных данных и, во-вторых, условие корректного задания  $y(0)$ . Отметим, что в линейном случае при выполнении равенства  $y(0) = 0$  решения в классе обобщенных функций отсутствуют. Следующая теорема показывает, что для системы вида (6), (7) это заведомо не так.

**Теорема 2.** Пусть, с учетом введенных обозначений  $a_i(t)$ ,  $b_i(t)$ , имеет место

$$\hat{K}_i(t) \in C_{[0,T]}^{(1)}, \quad \hat{K}_i(t) = \frac{b_i(t)}{a_i(t)}, \quad i = 1, 2.$$

Если  $x_j^*(t)$  – решение (6), (7), то

$$x_j^{**}(t) = -\left(x_j^*(t) + \hat{K}_i(t)\delta(t) + \hat{K}'_i(t)\right), \quad j = 1, 2, \quad i \neq j,$$

также решение (6), (7), где  $\delta(t)$  –  $\delta$ -функция Дирака.

Доказательство теорем 1, 2, а также вывод формул (8), (9) основаны на результатах работы [9]. В следующем разделе рассмотрим алгоритм численного решения в случае зашумленных исходных данных.

### 3. Вычислительный эксперимент

В качестве объекта исследования мы взяли участок пароводяного тракта энергоблока Назаровской ГРЭС мощностью 135 МВт. Данный участок включает в себя конденсатор типа 80-КЦС-1 и группу насосов.

Итак, в нашей модели в качестве входных сигналов выберем изменение расхода воды  $\Delta D_w$  и изменение расхода пара  $\Delta D_s$  при стационарных значениях расхода воды  $D_w = 11562,2$  кг/с и расхода пара  $D_s = 45,5$  кг/с соответственно, в качестве выходного сигнала – изменение давления  $\Delta p$  в конденсаторе. На Рис. 1 представлена блок-схема выбранного участка.

Будем полагать, что отклик динамического объекта  $\Delta p$  измеряется, в первом случае, при изменении только расхода пара  $\Delta D_s$  и, во втором случае, при одновременном изменении расхода пара  $\Delta D_s$  и расхода воды  $\Delta D_w$ .

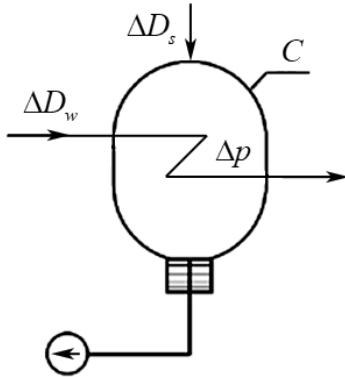


Рис. 1. Блок-схема участка пароводяного тракта энергоблока

Для набора данных применялся цифровой двойник [13], способный выдавать как зашумленные, так и свободные от шума данные. Отметим, что для подавления шума применялся фильтр, построенный на основе сглаживающих кубических сплайнов [14-16], который хорошо зарекомендовал себя в задаче идентификации ядер Вольтерра.

Для значений  $K$  из (3), полученных на реальных данных, неизбежно наличие некоторых погрешностей, обусловленных зашумлением исходных данных при измерении  $y(t)$ . Обозначим зашумленные значения ядер Вольтерра через  $\tilde{K}$ , для которых условие (5) выполняется, за исключением лишь конечного числа моментов времени  $t$ . Будем считать при этом, что имеет место условие  $\text{rank } \tilde{K}(t,t) = p$ , где  $p$  – размерность вектора  $x(t)$ .

Модифицируя подход [15, 16] будем применять данный фильтр, дополнительно включив в вычислительный эксперимент процедуру проверки условия (5) (для  $t \in [0, T]$ ) относительно ядер Вольтерра, полученных в результате сглаживания. Обозначим такие ядра  $\bar{K}$ .

Перейдем к вычислительному эксперименту, для которого сначала необходимо построить численную схему решения (3), при  $p = 2$ ,  $Z[x] = 0$ ,  $\bar{K}_2^{(1)} = 0$ . При этом имеет место  $\bar{K}_1^{(1)} = \bar{K}_1^{(2)} = \bar{K}_1$ ,  $\bar{K}_2^{(2)} = \bar{K}_2$ . Введем равномерную сетку:  $t_i = ih$ ,  $t_{j-1/2} = (j - 1/2)h$ ,  $h = T/n$ . Для удобства записи будем представлять разностный аналог ядер  $\bar{K}_1(t_i, t_j)$ ,  $\bar{K}_2(t_i, t_j)$  и правых частей  $y_1(t_i)$ ,  $y_2(t_i)$  как  $\bar{K}_{ij}^{(1)}$ ,  $\bar{K}_{ij}^{(2)}$  и  $y_i^{(1)}$ ,  $y_i^{(2)}$  соответственно. В результате из (3) получим

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^i \bar{K}_{i,j-1/2}^{(1)} x_{j-1/2}^{(1)} = y_i^{(1)}, \\ \sum_{j=1}^i \bar{K}_{i,j-1/2}^{(1)} x_{j-1/2}^{(1)} + \sum_{j=1}^i \bar{K}_{i,j-1/2}^{(2)} x_{j-1/2}^{(2)} = y_i^{(2)}, \quad i = \overline{1, n}, \end{cases} \quad (10)$$

где  $x^{(l)}(t_{i-1/2}) = x_{i-1/2}^{(l)}$ ,  $K^{(l)}(t_i, t_{i-1/2}) = K_{i,i-1/2}^{(l)}$ ,  $l = 1, 2$ . Таким образом, решение (10) имеет вид

$$\begin{cases} x_{i-1/2}^{(1)} = \frac{y_i^{(1)} - y_{i-1}^{(1)}}{\bar{K}_{i,i-1/2}^{(1)}}, \\ x_{i-1/2}^{(2)} = \frac{y_i^{(2)} - y_i^{(1)} - y_{i-1}^{(2)} + y_{i-1}^{(1)}}{\bar{K}_{i,i-1/2}^{(2)}}. \end{cases} \quad (11)$$

Далее применим (11) для построения модели динамики исследуемого объекта, где  $x^{(1)} = \Delta D_w$ ,  $x^{(2)} = \Delta D_s$ ,  $y^{(1)} = \Delta p^{(1)}$  (изменение давления при постоянном расходе пара),  $y^{(2)} = \Delta p^{(2)}$  (изменение давления при одновременном изменении расхода воды и пара).

Представим результаты, показывающие результативность используемого нами модифицированного фильтра. Для верификации эксперимента проведем 9 испытаний. В Табл. 1 представлены результаты эксперимента, где  $\hat{\varepsilon}_l^x$ ,  $\tilde{\varepsilon}_l^x$  ( $l=1, 2$ ) – относительные погрешности, вычисляемые по формулам

$$\hat{\varepsilon}_l^x = \max_i \left| \frac{x^{(l)}(t_i) - \hat{x}_i^{(l)}}{x^{(l)}(t_i)} \right| \cdot 100\%, \quad \tilde{\varepsilon}_l^x = \max_i \left| \frac{x^{(l)}(t_i) - \tilde{x}_i^{(l)}}{x^{(l)}(t_i)} \right| \cdot 100\%, \quad l=1, 2.$$

Здесь  $\hat{\varepsilon}_l^x$ ,  $\tilde{\varepsilon}_l^x$ ,  $l=1, 2$ , – погрешности входных сигналов  $\hat{x}^{(l)}$  и  $\tilde{x}^{(l)}$ ,  $l=1, 2$ , построенных на зашумленных сигналах  $\hat{y}^{(l)}$ ,  $l=1, 2$ , и сглаженных сигналах  $\tilde{y}^{(l)}$ ,  $l=1, 2$ , соответственно.

В Табл. 1 применяемый нами фильтр позволяет уменьшить погрешность входных сигналов по изменению расхода воды в среднем на 5,5%, по изменению расхода пара – на 3,1%.

Табл. 1. Погрешности входных сигналов

№	$\hat{\varepsilon}_1^x$ , %	$\tilde{\varepsilon}_1^x$ , %	$\hat{\varepsilon}_2^x$ , %	$\tilde{\varepsilon}_2^x$ , %
1	13,7	11,8	13,0	9,4
2	18,2	12,1	13,0	9,4
3	15,0	11,3	12,4	8,6
4	21,7	13,8	11,9	8,5
5	26,6	14,1	11,6	9,5
6	21,7	14,6	11,8	10,9
7	19,2	12,3	12,3	8,8
8	13,0	12,8	13,3	8,4
9	15,0	11,5	11,0	9,0
среднее	18,2	12,7	12,3	9,2

Теперь посчитаем выходы при полученных входах  $\hat{x}^{(l)}$  и  $\tilde{x}^{(l)}$ ,  $l=1, 2$ , а также вычислим погрешность по формулам

$$\hat{\varepsilon}_l^y = \max_i \left| \frac{y^{(l)}(t_i) - \hat{y}_i^{(l)}}{y^{(l)}(t_i)} \right| \cdot 100\%, \quad \tilde{\varepsilon}_l^y = \max_i \left| \frac{y^{(l)}(t_i) - \tilde{y}_i^{(l)}}{y^{(l)}(t_i)} \right| \cdot 100\%, \quad l=1, 2.$$

В Табл. 2 фильтр позволяет уменьшить погрешность изменения давления в конденсаторе при изменении расхода воды (при постоянном расходе пара) на 7,7%, а при одновременном изменении расхода воды и пара – на 4,9%.

Табл. 2. Погрешности выходных сигналов

№	$\hat{\varepsilon}_1^y$ , %	$\tilde{\varepsilon}_1^y$ , %	$\hat{\varepsilon}_2^y$ , %	$\tilde{\varepsilon}_2^y$ , %
1	18,9	9,8	10,0	4,3
2	18,1	10,4	9,0	3,2
3	17,0	8,4	9,0	7,1
4	18,2	15,0	10,0	4,0
5	17,6	7,1	10,0	5,3
6	21,7	14,8	9,0	5,1

№	$\hat{\varepsilon}_1^y$ , %	$\tilde{\varepsilon}_1^y$ , %	$\hat{\varepsilon}_2^y$ , %	$\tilde{\varepsilon}_2^y$ , %
7	15,4	12,2	10,0	4,5
8	17,2	8,1	9,0	3,1
9	19,3	9,0	7,0	2,4
среднее	18,2	10,5	9,2	4,3

## Заключение

В данной статье приведены теоремы о существовании единственного решения в классе непрерывных функций некоторой нелинейной системы, полученной на основе применения аппарата интегро-степенных рядов Вольтерра в задаче идентификации входных сигналов. Показано, что данная система, в отличие от классических интегральных уравнений с условием  $y(0) = 0$ , имеет решение в классе обобщенных функций. Проведен вычислительный эксперимент на реальных данных выделенного участка пароводяного тракта крупного объекта электротехнической системы.

## Литература

1. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1982. 302 с.
2. Giannakis G.B., Serpedin E. A bibliography on nonlinear system identification // Signal Processing. 2001. Vol. 81. №3. P. 533-580.
3. Волков Н.В. Функциональные ряды в задачах динамики автоматизированных систем. М.: Янус-К, 2001. 98 с.
4. Бойков И.В., Кривулин Н. Идентификация параметров нелинейных динамических систем, моделируемых полиномами Вольтерра // СибЖИМ. 2018. № 2. С. 17-31.
5. Apartsin A.S., Solodusha S.V. Mathematical Simulation of Linear Dynamic Systems by Volterra Series // Engineering Simulation. 2000. Vol. 17. №2. P. 143-153.
6. Методы исследования и управления системами энергетики / отв. ред. А.П. Меренков, Ю.Н. Руденко. – Новосибирск: Наука, 1987. – 369 с.
7. Бахтадзе Н.Н., Лотоцкий В.А., Максимов Е.М., Максимова Н.Е. Интеллектуальные алгоритмы идентификации состояния энергообъектов // Информационные технологии и вычислительные системы. 2011. №3. С. 45-50.
8. Бахтадзе Н.Н., Черешко А.А., Кушнарев В.Н. Сценарное прогнозирование на основе цифровых смарт-моделей динамических процессов // Информационные технологии и вычислительные системы. 2023. №3. С. 70-78.
9. Солодуша С.В. Моделирование систем автоматического управления на основе полиномов Вольтерра // Моделирование и анализ информационных систем. 2012. Т. 19. №1. С. 60-68.
10. Solodusha S.V. Modeling Heat Exchangers by Quadratic Volterra Polynomials // Automation and Remote Control. 2014. Vol. 75. №1. P. 87-94.
11. Апарчин А.С. Полиномиальные интегральные уравнения Вольтерра I рода и функция Ламберта // Тр. ИММ УрО РАН. 2012. Т. 18. № 1. С. 69-81.
12. Булатов М.В., Будникова О.С. Об устойчивых алгоритмах численного решения интегро-алгебраических уравнений // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование. 2013. Т. 6. №4. С. 5-14.
13. Таиров Э.А., Логинов А.А., Чистяков В.Ф. Математическая модель, численные методы и программное обеспечение тренажера для энергоблока иркутской ТЭЦ-10. Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 1999. 43 с. Препринт № 11.
14. Воскобойников Ю.Е., Боева В.А. Оценивание оптимальных скалярного и векторного параметров сглаживающего бикубического сплайна // Международный научно-исследовательский журнал. 2022. №4-1(118). С. 31-39.
15. Воскобойников Ю.Е., Преображенский Н.Г., Седельников А.И. Математическая обработка эксперимента в молекулярной газодинамике. Новосибирск: Наука, 1984. 238 с.
16. Воскобойников Ю.Е., Боева В.А. Метод L-кривой для оценивания оптимального параметра сглаживающего кубического сплайна // Международный научно-исследовательский журнал. 2021. № 11 (113), ч. 1. С. 6-13.

**Солодуша Светлана Витальевна.** Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева Сибирского отделения Российской академии наук, Иркутск, Россия. Главный научный сотрудник, доктор технических наук, доцент. Область научных интересов: интегральные уравнения Вольтерра I рода, численные методы, обратные и некорректные задачи. E-mail: solodusha@isem.irk.ru

**Антипина Екатерина Дмитриевна.** Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева Сибирского отделения Российской академии наук, Иркутск, Россия. Иркутский государственный университет, Иркутск, Россия. Аспирант. E-mail: kate19961231@gmail.com

## On Some Properties of Nonlinear Integral Models of Dynamic Processes

S.V. Solodusha<sup>1</sup>, E.D. Antipina<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Melentiev Energy Systems Institute SB RAS, Irkutsk, Russia

<sup>2</sup> Irkutsk State University, Irkutsk, Russia

**Abstract.** The paper presents algorithms for constructing dynamic models of technical (energy) systems in conditions of noisy data. We consider a class of nonlinear systems of Volterra-type integral equations of the first kind with an input signal consisting of two components. The problem of identifying the input signal of linear systems is well known when reduction to a system of equations of the second kind is performed by differentiating Volterra integral equations of the first kind. When constructing models, a control input action is formed that provides the specified response of the dynamic system. Identification algorithms based on the theory of Volterra polynomial equations are used. The paper considers the case with noisy initial data, including when the condition of non-degeneracy of matrices in front of the main part is violated at some fixed points in time.

**Keywords:** identification, dynamic processes, integral models, Volterra polynomial equations of the first kind.

**DOI** 10.14357/20718632240209      **EDN XQUEEY**

### References

1. Volterra V. Theory of functionals and of integral and integro-differential equations. Moscow: Nauka; 1982. 302 p. (In Russ).
2. Giannakis G.B., Serpedin E. A bibliography on nonlinear system identification // Signal Processing. 2001. Vol. 81. №3. P. 533-580.
3. Volkov N.V. Functional series in the problems of dynamics of automated systems. Moscow: Janus-K; 2001. 98 p. (In Russ).
4. Boykov I.V., Krivulin N.P. Identification of parameters of nonlinear dynamical systems simulated by Volterra polynomials // Sib. Zh. Ind. Mat. 2018; 21(2): 17-31 (In Russ). doi: 10.17377/sibjim.2018.21.201
5. Apartsin A.S., Solodusha S.V. Mathematical Simulation of Linear Dynamic Systems by Volterra Series // Engineering Simulation. 2000. Vol. 17. №2. P. 143-153.
6. Methods for research and control of energy systems. A.P. Merenkov, Yu.N. Rudenko (eds.). Novosibirsk: Nauka; 1987. 369 p. (In Russ).
7. Bakhtadze N.N., Lototsky V.A., Maksimov E.M., Maksimova N.E. Intelligent algorithms of power grid's state identification // Informatzionnye Tekhnologii i Vychislitel'nye Sistemy. 2011; 3: 45-50 (In Russ).
8. Bakhtadze N.N., Chereshko A.A., Kushnarev V.N. Scenario forecasting based on digital smart models of dynamic processes // Informatzionnye Tekhnologii i Vychislitel'nye Sistemy. 2023; 3: 70-78 (In Russ). doi: 10.14357/20718632230308
9. Solodusha S.V. Automatic control systems modeling by Volterra polynomials // Modelirovanie i Analiz Informatcionnykh Sistem, 2012; 19(1): 60-68 (In Russ).
10. Solodusha S.V. Modeling Heat Exchangers by Quadratic Volterra Polynomials // Automation and Remote Control. 2014. Vol. 75. №1. P. 87-94.
11. Apartsyn A.S. Polynomial Volterra equations of the first kind and the Lambert function // Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2012. Vol. 18. № 1. P. 69-81.
12. Bulatov M.V., Budnikova O.S. On Stable Algorithms for Numerical Solution of Integral-Algebraic Equations // Vestnik YuUrGU. Ser. Mat. Model. Progr. 2013; 6(4): 5-14 (In Russ).
13. Tairov E.A., Loginov A.A., Chistyakov V.F. Mathematical model, numerical methods and software of the simulator for the generating unit of the Irkutsk CHP-10. Irkutsk: SEI SB RAS; 1999. 43 p. Preprint no. 11 (In Russ).
14. Voskoboinikov Yu.E., Boeva V.A. An estimation of optimal scalar and vector parameters of a smoothing bicubic spline // International Research Journal. 2022; 4(118): 31-39 (In Russ). doi: 10.23670/IRJ.2022.118.4.006.
15. Voskoboinikov Yu.E., Preobrazhensky N.G., Sedelnikov A.I. Mathematical processing of experiment in molecular gas dynamics. Novosibirsk: Nauka; 1984 (In Russ).
16. Voskoboinikov Yu.E., Boeva V.A. L-curve method for evaluating the optimal parameter of a smoothing cubic spline // International Research Journal. 2021; 11(113), pt. 1: 6-13 (In Russ). doi: 10.23670/IRJ.2021.113.11.003.

**Svetlana V. Solodusha.** Doctor of technical sciences, Melentiev Energy Systems Institute SB RAS, Irkutsk, 664033, Russia.  
E-mail: solodusha@isem.irk.ru

**Ekaterina D. Antipina.** Melentiev Energy Systems Institute SB RAS, Irkutsk State University, Irkutsk, 664033, Russia.  
E-mail: kate19961231@gmail.com