

Индексы состояний в конечных динамических системах ориентаций полных графов

А. В. Жаркова

Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Саратов, Россия

Аннотация. Рассматривается конечная динамическая система, состояниями которой являются все возможные ориентации полного графа, а эволюционная функция задается следующим образом: динамическим образом орграфа является орграф, полученный из исходного путем переориентации всех дуг, входящих в стоки. Других отличий между исходным орграфом и его образом нет. Предложен алгоритм вычисления индексов состояний системы (расстояние до аттрактора того бассейна, которому принадлежит состояние). Найден максимальный индекс состояний в системе, как следствие получены дополнительные характеристики. Приведены соответствующие таблицы для полных графов с количеством вершин от 1 до 8 включительно.

Ключевые слова: аттрактор, граф, индекс, кибербезопасность, конечная динамическая система, ориентированный граф, отказоустойчивость, полный граф, эволюционная функция.

DOI10.14357/20718632240403 EDN NZRSWL

Введение

Графовые модели занимают важное место в задачах, связанных с информационной безопасностью. В вопросах кибербезопасности с помощью графовых моделей можно, например, выявлять связи между сущностями системы, группировать их, оценивать их поведение, выявлять различные аномалии. В задачах, связанных с отказоустойчивостью компьютерных сетей, отказы процессоров интерпретируются как удаление соответствующих вершин, а отказы сетевых каналов – как удаление дуг.

При изучении модельных графов можно применять идеи и методы теории конечных динамических систем. В работе [1] в качестве механизма восстановления работоспособности сети предлагается так называемая SER-динамика бесконтактных связанных ориентированных графов. В исследовании [2] рассматривается

структурный метод моделирования логико-динамических систем управления, в основе которого лежит естественное разбиение систем на ряд структурных состояний. В работе [3] рассматриваются и анализируются алгоритмы построения цепно-рекуррентных структур на графах, элементы которых являются аппроксимацией динамической системы – символическим образом. В статье [4] представлена эволюционирующая графовая сверточная сеть, которая улавливает динамизм, лежащий в основе последовательности графов, с помощью рекуррентной модели для развития параметров графовой сверточной сети.

В данной работе полные графы изучаются с точки зрения динамического подхода к кибербезопасности и отказоустойчивости графовых систем. В данной работе предлагается алгоритм вычисления индексов состояний в конечных динамических системах ориентаций полных

графов, находится максимальный из индексов состояний системы. Предварительные результаты частично были анонсированы на научной конференции [5], данная статья является полной и завершающей эти исследования.

1. Основные определения и постановка задачи

Основные понятия теории дискретных систем, в частности графов, используются согласно [6].

Под *конечной динамической системой* понимается пара (S, δ) , где S – конечное непустое множество, элементы которого называются *состояниями системы*, $\delta: S \rightarrow S$ – отображение множества состояний в себя, называемое *эволюционной функцией системы*. Каждой конечной динамической системе сопоставляется карта, представляющая собой функциональный орграф с множеством вершин S и дугами, проведенными из каждой вершины $s \in S$ в вершину $\delta(s)$. Компоненты связности орграфа, задающего динамическую систему, называются ее *бассейнами*. Каждый бассейн представляет собой контур с входящими в него деревьями. Контуры, в свою очередь, называются *предельными циклами*, или *аттракторами*. Под *длиной аттрактора* будем понимать количество различных состояний в соответствующем контуре. Состояние, принадлежащее аттрактору, называется *циклическим*.

Основными проблемами теории конечных динамических систем являются задачи отыскания эволюционных параметров системы без построения карты и проведения динамических исследований на ее основе. К числу таких характеристик относятся *индекс состояния* (его расстояние до аттрактора того бассейна, которому оно принадлежит), а также максимальный из индексов состояний системы.

Автором предложены алгоритмы вычисления индексов состояний в конечных динамических системах ориентаций некоторых типов графов (например, [7]). В данной работе предлагается алгоритм вычисления индексов состояний в конечных динамических системах ориентаций полных графов, находится максимальный из индексов состояний системы.

2. Описание конечной динамической системы (Γ_{K_n}, α)

Пусть дан полный граф $G = K_n$, $n \geq 1$, $m = \frac{n(n-1)}{2}$, где m – число ребер. Пометим его вершины и придадим его ребрам произвольную ориентацию, тем самым получив направленный граф $\vec{G} = (V, \beta)$, где отношение смежности β антирефлексивно и антисимметрично. Применим к полученному орграфу эволюционную функцию α , которая у данного орграфа одновременно переориентирует все дуги, входящие в стоки, а остальные дуги оставляет без изменения, в результате чего получим орграф $\alpha(\vec{G})$. Если проделать указанные действия со всеми возможными ориентациями данного графа, то получим карту конечной динамической системы, состоящую из одного или нескольких бассейнов.

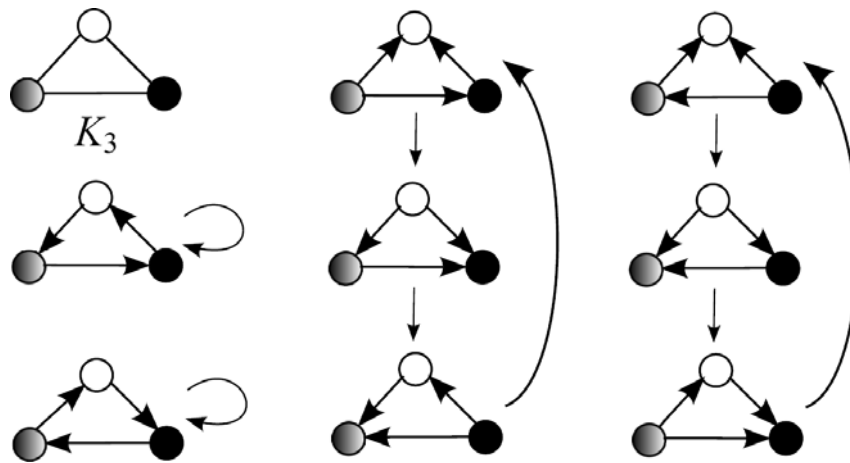
Таким образом, будем рассматривать конечную динамическую систему (Γ_{K_n}, α) , $n \geq 1$, где через Γ_{K_n} обозначено множество всех возможных ориентаций данного полного графа K_n , $|\Gamma_{K_n}| = 2^m$, а эволюционная функция α задана следующим образом: если дан некоторый орграф $\vec{G} \in \Gamma_{K_n}$, то его динамическим образом $\alpha(\vec{G})$ является орграф, полученный из \vec{G} одновременной переориентацией всех дуг, входящих в стоки, других отличий между \vec{G} и $\alpha(\vec{G})$ нет.

На Рис. 1 изображен граф K_3 и карта конечной динамической системы (Γ_{K_3}, α) .

Под *вектором степеней захода* орграфа будем понимать вектор, компонентами которого являются расположенные в убывающем порядке степени захода всех его вершин. Например, на Рис. 1 расположенный посередине сверху орграф имеет вектор степеней захода $(2, 1, 0)$.

3. Индексы состояний в конечной динамической системе (Γ_{K_n}, α)

Теорема 1 [8]. В конечной динамической системе (Γ_{K_n}, α) , $n \geq 1$, состояние $\vec{G} \in \Gamma_{K_n}$ принадлежит аттрактору (является циклическим) тогда и только тогда, когда орграф \vec{G} 1) не имеет стока

Рис. 1. Граф K_3 и карта конечной динамической системы (Γ_{K_3}, α)

или

2) имеет вектор степеней захода $(n-1, n-2, \dots, 0)$.

Теорема 2. В конечной динамической системе (Γ_{K_n}, α) , $n \geq 1$, индекс состояния $\vec{G} \in \Gamma_{K_n}$ равен 0, если орграф \vec{G} не имеет стока или имеет вектор степеней захода $(n-1, n-2, \dots, 0)$, иначе равен f , $f \geq 1$, где f – мощность наибольшего множества $(n-1, n-2, \dots, n-f)$, являющегося подвектором вектора степеней захода \vec{G} .

Доказательство. Рассмотрим состояния конечной динамической системы (Γ_{K_n}, α) , $n \geq 1$.

1) Пусть орграф $\vec{G} \in \Gamma_{K_n}$ не имеет стока или имеет вектор степеней захода $(n-1, n-2, \dots, 0)$.

Согласно теореме 1 данное состояние принадлежит аттрактору, то есть его индекс равен 0: $i(\vec{G}) = 0$.

2) Пусть орграф $\vec{G} \in \Gamma_{K_n}$ имеет сток v_s , $d^-(v_s) = n-1$, и его вектор степеней захода отличен от $(n-1, n-2, \dots, 0)$. Очевидно, что в орграфе \vec{G} не может быть еще одного стока, отличного от v_s .

Согласно теореме 1 $i(\vec{G}) \geq 1$. Применим эволюционную функцию α к орграфу \vec{G} , при этом одновременно переориентируются все дуги, входящие в вершину v_s , остальные дуги останутся в прежней ориентации, то есть получаем состояние $\alpha(\vec{G})$, у которого $d^-(v_s) = 0$, а степень захода остальных вершин увеличилась на 1.

а) Пусть в состоянии \vec{G} нет вершины v_t , у которой $d^-(v_t) = n-2$.

Тогда в состоянии $\alpha(\vec{G})$ нет стока, согласно теореме 1 оно принадлежит аттрактору, то есть $i(\vec{G}) = 1$.

Заметим, что в данном случае получаем искомого наибольшее множество с одним элементом $(n-1)$, являющееся подвектором вектора степеней захода \vec{G} , $f = 1$.

б) Пусть в состоянии \vec{G} есть вершина v_t , у которой $d^-(v_t) = n-2$.

В состоянии $\alpha(\vec{G})$ данная вершина v_t является стоком: $d^-(v_t) = n-2+1 = n-1$, и при применении вновь эволюционной функции α получаем новое следующее состояние.

Так как у орграфа \vec{G} вектор степеней захода отличен от $(n-1, n-2, \dots, 0)$, обозначим две его подходящие вершины через v_u и v_w , для первых из которых по вектору степеней захода, если просматривать его слева направо, выполняется $d^-(v_u) - d^-(v_w) \geq 2$. Пусть $d^-(v_u) = n-f$, $d^-(v_w) = n-f-k$, где $f, k \geq 2$.

Применим к состоянию \vec{G} эволюционную функцию α f раз, получим, что у состояния $\alpha^f(\vec{G})$ $d^-(v_u) = n-f+f = (n) \bmod n = 0$, $d^-(v_w) = n-f-k+f = n-k$. Так как были выбраны две вершины с наибольшими подходящими степенями заходов и $k \geq 2$, то получили, что у состояния $\alpha^f(\vec{G})$ нет стока, согласно теореме 1 оно принадлежит аттрактору, то есть $i(\vec{G}) = f$.

Заметим, что в данном случае получаем иско-
мое наибольшее множество с f элементами
($n - 1, n - 2, \dots, n - f$), являющееся подвекто-
ром вектора степеней захода \vec{G} , $f \geq 2$.

Следствие 1. В конечной динамической си-
стеме (Γ_{K_n}, α) , $n \geq 1$, состояния $\vec{G} \in \Gamma_{K_n}$ с ин-
дексом $i(\vec{G}) \geq 1$ принадлежат бассейну с ат-
трактором длины 1, у образующего состояния
которого есть источник и нет стока.

Доказательство. Утверждение следует из
доказательства теоремы 2, где показывается, что
каждое состояние $\vec{G} \in \Gamma_{K_n}$ с индексом $i(\vec{G}) \geq 1$
при эволюции приходит в состояние, у которого
есть источник и нет стока, образующее аттрак-
тор единичной длины согласно заданной эволю-
ционной функции α .

4. Алгоритм вычисления индекса состояния системы (Γ_{K_n}, α) , $n \geq 1$

Индекс $i(\vec{G})$ состояния $\vec{G} \in \Gamma_{K_n}$ системы
(Γ_{K_n}, α), $n \geq 1$, вычисляется по следующему ал-
горитму.

- 1) Если $n = 1$, то $i(\vec{G}) := 0$, конец алгоритма.
- 2) Для состояния \vec{G} построить его вектор сте-
пеней захода.
- 3) Если $n - 1$ не является компонентой век-
тора степеней захода \vec{G} , то $i(\vec{G}) := 0$, конец ал-
горитма.
- 4) Если вектор степеней захода \vec{G} равен $(n - 1, n - 2, \dots, 0)$, то $i(\vec{G}) := 0$, конец алгоритма.
- 5) Построить наибольшее множество $(n - 1, n - 2, \dots, n - f)$, являющееся подвектором
вектора степеней захода \vec{G} .
- 6) $i(\vec{G}) := f$, конец алгоритма.

Теорема 3. Предложенный алгоритм вычис-
ления индекса состояния конечной динамиче-
ской системы (Γ_{K_n}, α) , $n \geq 1$, корректен.

Доказательство. Утверждение следует из
теоремы 2, при этом шаги 1) и 3) алгоритма опи-
сывают ситуацию, когда оргграф $\vec{G} \in \Gamma_{K_n}$ не
имеет стока.

Сложность данного алгоритма будет зави-
сеть от выбранного алгоритма сортировки для
построения вектора степеней захода оргграфа,

при использовании быстрой сортировки она
будет равна $O(n \log n)$.

Например, вычислим индекс расположен-
ного посередине сверху оргграфа \vec{G} на Рис. 1 си-
стемы (Γ_{K_3}, α) . Согласно шагу 2) алгоритма
строим его вектор степеней захода: $(2, 1, 0)$.
Согласно шагу 3) алгоритма $n - 1 = 3 - 1 = 2$
является компонентой вектора степеней захода
 \vec{G} . Согласно шагу 4) алгоритма вектор степеней
захода \vec{G} равен $(n - 1, n - 2, \dots, 0)$, значит,
 $i(\vec{G}) := 0$, конец алгоритма.

Одним из параметров конечной динамиче-
ской системы является наибольший из индексов
ее состояний.

Теорема 4. В конечной динамической си-
стеме (Γ_{K_n}, α) , $n \geq 1$, максимальный из индек-
сов состояний равен 0 при $1 \leq n \leq 3$ и $n - 3$ при
 $n \geq 4$.

Доказательство. Рассмотрим состояния ко-
нечной динамической системы (Γ_{K_n}, α) , $n \geq 1$.

- 1) Пусть $1 \leq n \leq 3$.

Система состоит из состояний, принадлежа-
щих аттракторам, индекс всех состояний равен
0, таким образом, максимальный из индексов
состояний системы также равен 0.

- 2) Пусть $n \geq 4$.

Согласно теореме 2 максимальное значение
будет получаться при построении наибольшего
множества $(n - 1, n - 2, \dots, n - f)$, являюще-
гося подвектором наибольшего возможного век-
тора степеней захода среди состояний системы.

Построим ориентацию полного графа G с
наибольшим вектором степеней захода, отличного
от $(n - 1, n - 2, \dots, 0)$. Зададим вектор с макси-
мально возможными степенями захода всех вер-
шин: $d_{\max}^- = (n - 1, n - 1, \dots, n - 1)$. При по-
строении будем нумеровать вершины по мере
задания ориентации ребрам, инцидентным им.

Начинаем с вершины v_0 , степень захода ко-
торой равна $n - 1$: $d^-(v_0) = n - 1$, то есть она
является стоком, все инцидентные ей ребра ори-
ентируем в нее. Степень захода вершины v_0
определена, из всех остальных вершин исходит
по 1 дуге, поэтому максимально возможная
степень остальных вершин уменьшается на 1:
 $d_{\max}^- = (n - 1, n - 2, \dots, n - 2)$.

Табл. 1. Индексы состояний в конечных динамических системах (Γ_{K_n}, α) , $1 \leq n \leq 8$

$n \setminus$ Индекс	0	1	2	3	4	5
1	1	–	–	–	–	–
2	2	–	–	–	–	–
3	8	–	–	–	–	–
4	56	8	–	–	–	–
5	824	160	40	–	–	–
6	27344	4224	960	240	–	–
7	1872816	186368	29568	6720	1680	–
8	251698560	14942208	1490944	236544	53760	13440

Берем следующую вершину v_1 , степень захода которой равна $n - 2$: $d^-(v_1) = n - 2$, то есть из нее выходит единственная дуга в сток v_0 , все остальные инцидентные ей ребра ориентируем в нее. Степени захода вершин v_0 и v_1 определены, из всех остальных вершин исходит по 2 дуги, поэтому максимально возможная степень остальных вершин вновь уменьшается на 1: $d_{\max}^-(n - 1, n - 2, n - 3, \dots, n - 3)$.

Продолжая аналогично, доходим до 3 последних необработанных вершин v_{n-3} , v_{n-2} , v_{n-1} . Все дуги, инцидентные им и уже обработанным вершинам, исходят из них. У каждой вершины без ориентации находятся 2 ребра, инцидентные ей и еще не обработанным вершинам. $d_{\max}^-(n - 1, n - 2, \dots, 3, 2, 2, 2)$. Если какая-либо из этих вершин будет иметь степень захода 2 или 0 (например, будут дуги (v_{n-2}, v_{n-3}) , (v_{n-1}, v_{n-3}) , (v_{n-1}, v_{n-2})), то вектор степеней захода станет равен $(n - 1, n - 2, \dots, 0)$, что не может быть по условию. Таким образом, степень захода каждой из этих 3 вершин должна быть равна 1 (например, будут дуги (v_{n-3}, v_{n-2}) , (v_{n-2}, v_{n-1}) , (v_{n-1}, v_{n-3})).

Получаем наибольший возможный вектор степеней захода $(n - 1, n - 2, \dots, 3, 1, 1, 1)$, согласно теореме $2n - f = 3$ и индекс данного состояния равен $n - 3$.

В Табл. 1 приведены данные по индексам состояний в конечных динамических системах (Γ_{K_n}, α) для $1 \leq n \leq 8$, полученные с помощью вычислительных экспериментов.

Можно заметить, что в конечных динамических системах (Γ_{K_n}, α) большинство состояний имеют индекс 0 (являются циклическими).

Заключение

В работе предложен алгоритм вычисления индексов состояний рассматриваемой конечной динамической системы (Γ_{K_n}, α) , $n \geq 1$, всех возможных ориентаций данного полного графа K_n , найден максимальный из индексов состояний системы, что является полезным для задач, связанных с информационной безопасностью, в том числе для построения отказоустойчивых графовых систем с непрерывным функционированием и восстановлением.

Литература

1. Barbosa V.C. An Atlas of Edge-reversal Dynamics. London: Chapman & Hall/CRC; 2001. 372 p.
2. Кадыров А.А., Кадырова А.А. Структуризация и графовое моделирование логико-динамических систем управления // Вестник БГТУ им. В.Г. Шухова. 2014. № 1. С. 185–188.
3. Лукьяненко В.А., Германчук М.С. Графовые структуры в построении символических образов динамических систем // Осенние математические чтения в Адыгее: материалы III Междунар. науч. конф. (Россия, Майкоп, 15–20 октября 2019 года). Майкоп: Изд-во АГУ, 2019. С. 90–94.
4. Pareja A., Domeniconi G., Chen J., Ma T., Suzumura T., Kanezashi H., Kaler T., Schardl T.B., Leiserson C.E. EvolveGCN: evolving graph convolutional networks for dynamic graphs. In: Proceedings of the thirty-fourth AAAI conference on artificial intelligence, AAAI-20. 7–12 February 2020, New York, USA. 2020. 34 (04). P. 5363–5370. doi:10.1609/aaai.v34i04.5984.
5. Жаркова А.В. Об индексах состояний в конечных динамических системах ориентаций полных графов // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2019. № 12. С. 176–179.
6. Богомолов, А.М., Салий В.Н. Алгебраические основы теории дискретных систем. М.: Наука. Физматлит. 1997. 368 с.
7. Власова А.В. Индексы в динамической системе (B, δ) двоичных векторов // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. 2011. Т. 11. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 3, ч. 1. С. 116–122.

8. Жаркова А.В. Аттракторы и циклические состояния в конечных динамических системах ориентаций полных графов // Прикладная дискретная математика. 2023. № 59. С. 80–87.

Жаркова Анастасия Владимировна. Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского», Саратов, Россия. Доцент кафедры теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии, кандидат физико-математических наук, доцент. Область научных интересов: дискретная математика, компьютерная безопасность, криптография. E-mail: ZharkovaAV3@gmail.com

Indices of States in Finite Dynamic Systems of Complete Graphs Orientations

A. V. Zharkova

Saratov State University, Saratov, Russia

Abstract. Graph models occupy an important place in tasks related to information security, including the construction of models and methods for managing the continuous operation of systems and system recovery, countering denials of service. Finite dynamic systems of complete graphs orientations are considered. States of a dynamic system are all possible orientations of a given complete graph, and evolutionary function transforms the given complete graph orientation by reversing all arcs that enter into sinks and there are no other differences between the given and the next digraphs. In this paper, the algorithm to calculate indices of system states is proposed. Namely, the index of the state is equal to 0 if it does not have a sink or its indegrees vector (a vector whose components are the degrees of entry of all its vertices located in descending order) contains all possible degrees of entry, otherwise its index is equal to the power of the largest set of consecutive degrees of entry, starting with the maximum possible degree, which is a subvector of its indegrees vector. As a consequence, the states with non-zero index belong to a basin with an attractor of length 1, whose generator state has a source and no sink. The maximal index of the states in the system is found. The corresponding tables are given for complete graphs with the number of vertices from 1 to 8 inclusive.

Keywords: attractor, complete graph, cybersecurity, evolutionary function, fault-tolerance, finite dynamic system, graph, graph orientation, index.

DOI 10.14357/20718632240403 **EDN** NZRSWL

References

1. Barbosa V.C. An Atlas of Edge-reversal Dynamics. London: Chapman & Hall/CRC; 2001. 372 p.
2. Kadyrov A.A., Kadyrova A.A. Structuring and Graphic Modeling of Logical-dynamic Control systems. Vestn. BSTU named after V.G. Shukhov. 2014;1:185–188 (In Russ).
3. Lukianenko V.A., Germanchuk M.S. Graph structures in the construction of symbolic images of dynamical systems. In: Autumn mathematical readings in Adygea: Materials of the III International scientific conference. 15–20 October 2019, Maykop, Russia. Maykop: Adyghe State University; 2019. P. 90–94 (In Russ).
4. Pareja A., Domeniconi G., Chen J., Ma T., Suzumura T., Kanezashi H., Kaler T., Schardl T.B., Leiserson C.E. EvolveGCN: evolving graph convolutional networks for dynamic graphs. In: Proceedings of the thirty-fourth AAAI conference on artificial intelligence, AAAI-20. 7–12 February 2020, New York, USA. 2020. 34 (04). P. 5363–5370. doi:10.1609/aaai.v34i04.5984.
5. Zharkova A.V. On indices of states in finite dynamic systems of complete graphs orientations. Prikladnaia diskretnaia matematika. Prilozhenie. 2019;12:176-179 (In Russ). doi:10.17223/2226308X/11/33.
6. Bogomolov A.M., Salii V.N. Algebraic foundations of the theory of discrete systems. Moscow: Nauka. Fizmatlit; 1997. 368 p. (In Russ).
7. Vlasova A.V. Indices in dynamical system (B, δ) of binary vectors. Izvestiia Saratovskogo universiteta. Novaia seriia. Seriia Matematika. Mekhanika. Informatika. 2011;3(1):116-122 (In Russ). doi:10.18500/1816-9791-2011-11-3-1-116-122.
8. Zharkova A.V. Attractors and cyclic states in finite dynamic systems of complete graphs orientations. Prikladnaia diskretnaia matematika. 2023;59:80-87 (In Russ). doi:10.17223/20710410/59/5.

Zharkova Anastasiia V. Candidate of physico-mathematical sciences, docent, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya str., Saratov, 410012, Russia. Research interests: cryptography, cybersecurity, discrete mathematics. E-mail: ZharkovaAV3@gmail.com