Подход к построению производственных функций с эндогенно введенным НТП в качестве информационной компоненты[1]

В.А. Шведовский, .А.В. Неклюдов

Аннотация. Важной проблемой моделирования системы общественного воспроизводства (СОВ) является построение/выбор производственной функции (ПФ) и тесно связанная с ней проблема введения необходимого набора социальных переменных. В данной публикации предложен подход к построению производственных функций. В работе делается акцент на то, что ПФ с эндогенно вводимым НТП (научно-технический прогресс) в качестве показателя наукоёмкости должна быть функцией от 3-х аргументов E = E(K, L, C).

По существу, производственная функция ***f*** есть совокупность "правил", с помощью которых для каждого набора затрат $\mathbf{x_1, x_2, \ldots x_n}$, определяется соответствующий выпуск $\mathbf{y=f(x_1, x_2, \ldots x_n)}$. Поэтому построение производственной функции означает нахождение математической формулы, отражающей эти правила или, иначе говоря, закономерности превращения набора ресурсов, понимаемых расширительно в социальном смысле – например, учет социальной инфраструктуры или уровня образованности, - в конечный продукт.

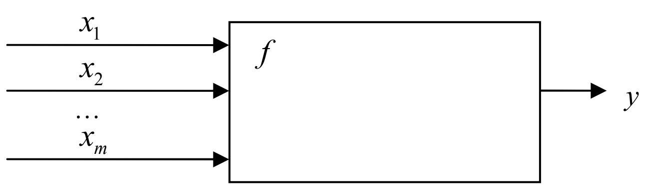

Схема представления ПФ как f-преобразователя m *входов* в 1 *выход* y.

Этапы построения производственной функции:

1) выявление общего вида функции f от аргументов $x_1, \ldots, x_m$ с неопределенными параметрами;

2) оценка параметров.

Примеры производственных функций:

1) линейная - $f(x) = \sum_{i=1}^{k} a_i x_i + b$,

2) Кобба-Дугласа - в виде мультипликативной функции: $f(x) = a \prod_{i=1}^{k} x_i^{b_i}$,

[1] Работа выполнена при частичной поддержке грантов: РФФИ 06-01-00-426 и 05-06-80-23, РГНФ 07-03-00620а

3) CES - в виде степенного многочлена: $f(x)=a(\sum_{i=1}^{k} b_i x_i^r)^1$.

Коэффициенты в подобных ПФ определяются с помощью линейного или нелинейного метода наименьших квадратов (МНК).

Обычно в математической экономике употребляется ПФ от двух аргументов – труда и капитала. Однако общий кризис экономико-математической теории ведет к новым подходам и решениям

В связи с ростом сложности социума и с растущими требованиями к моделям социально-экономических процессов возникает необходимость корректного учёта в ПФ набора факторов, большего двух. Помимо этого, при учете социальных переменных в таких моделях особую щепетильность социологи предъявляют к верифицируемости процедур эмпирического наполнения социальных показателей. Последнее соображение отображает строгий шкало-метрический критерий ограничения допустимой гладкости[2] функций, используемых в моделировании социальных процессов.

Ключевой идеей к последовательному и целостному построению модели СОВ как динамической модели является идея динамически сбалансированного набора факторов эволюции экономики и социума[3].

Если при построении моделей ранее использовались производственные функции, учитывающие **К** - капитал и **L** - труд, то в настоящее время создаваемые модели содержат ПФ, имеющие в качестве аргументов не только капитальные **K** и трудовые **L** затраты, но и информационно-культурную компоненту **C**. Последнее полностью вписывается в подход Н.Д. Кондратьева, разделявшего кумулятивные и потоковые переменные, - так к кумулятам капиталу K и труду L добавляется кумулята C – знание.

Понимая трудности, которые возникают при использовании ПФ с числом аргументов больше двух, математики-экономисты стремятся представить такую функцию либо как разложение по суперпозициям функций от 2-х переменных [1], либо вводя НТП экзогенно [2].

Как доказано А.Г. Витушкиным [3], что невозможно функции трех переменных класса C^S разложить в суперпозиции функций двух переменных класса C^P, если $p \geq [2s/3] + 1$.

Все ПФ от двух переменных, исследованные в математической экономике допускают дифференцируемость хотя бы один раз, и это требуется для всех дальнейших математико-экономических построений. Однако относительно вновь конструируемой функции от 3-х переменных можно утверждать лишь то, что она непрерывна, судя по используемому социальному показателю, характеризующему «знания». Таким образом, мы лишаемся возможности применить теоремы А.Н. Колмогорова и В.И. Арнольда о представимости непрерывной функции от 3-х,…, n аргументов суммой суперпозиций непрерывных функций от 2-х аргументов. Следовательно, ПФ от 3-х аргументов должна рассматриваться, в самом общем случае, как отображение E: (K,L,C) → R.

Не ограничивая общности применения метода дифференциальных форм, рассмотрим реализацию подхода [4] к построению системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) для решения нелинейного уравнения в частных производных первого порядка:

$$\boldsymbol{\Phi(K, L, C, E(K, L, C),\ P_K, P_L, P_C) = 0,} \tag{1}$$

K - капитал, ***L*** - труд, ***C*** – знания, $P_K = \frac{\partial E}{\partial K}$; $P_L = \frac{\partial E}{\partial L}$; $P_C = \frac{\partial E}{\partial C}$, **E = E(K, L, C)** – искомая ПФ как функция от трех аргументов. Содержательная социально-экономическая гипотеза заключается в

[2] Так, о гладкости, кроме непрерывности, не может идти речь, если и область значений и область определения этих функций, как правило, задаются в порядковых шкалах

[3] Здесь предпочтение не отдаётся ни экономическому детерминизму вульгарного марксизма, ни социэтальной концепции общества сторонников Парсонса. На наш взгляд, синтез этих концептов естественно логичен в более многомерном смысловом контексте.

предположении существования баланса[4] социальных и экономических факторов, объясняющих воспроизводство выпуска E как результата взаимодействия абсолютных вкладов капитала K, труда L, знаний C, а также учета вкладов относительных изменений ΔE за счет ΔK, ΔL и ΔC[5].

Формула (1) справедлива в силу естественного статистического факта существования ограниченных вариаций для социально-экономических функций E, L, K, C, что в соответствии с [3] приводит к принадлежности этих функций к классам функций C^2 и C^3, т.е. дважды и трижды дифференцируемым.

Таким образом, при построении характеристических уравнений для (1) возникают их структурные составляющие, находящие свою интерпретацию либо как некоторые агрегированные социальные переменные, либо как инновационные факторы системы общественного воспроизводства, находящиеся в совокупном балансе всех факторов СОВ в виде (1).

В целях построения системы ОДУ, определяющих характеристики нелинейного (в общем виде, Пфаффова) уравнения в частных производных первого порядка, используется многообразие 1 струй функций размерности 7 [4].

В итоге имеем строгое основание для неформального получения системы ОДУ:

$$\begin{cases} dK/dt = \partial\Phi/\partial P_K \\ dL/dt = \partial\Phi/\partial P_L \\ dC/dt = \partial\Phi/\partial P_C \\ d(\partial E/\partial K)/dt = -(\partial\Phi/\partial K + \partial\Phi/\partial E \cdot \partial E/\partial K) \\ d(\partial E/\partial L)/dt = -(\partial\Phi/\partial L + \partial\Phi/\partial E \cdot \partial E/\partial L) \\ d(E/C)/dt = -(\partial\Phi/\partial C + \partial\Phi/\partial E \cdot \partial E/\partial C) \\ dE/dt = \partial E/\partial K \cdot dK/dt + \partial E/\partial L \cdot dL/dt + \partial E/\partial C \cdot dC/dt \end{cases} \tag{2.1}$$

Поскольку область определения функции $\mathbf{E}=\mathbf{E}(\mathbf{X_1}\ \mathbf{X_2},\ \mathbf{X_3})$ рассматривается в 3-х мерном пространстве ($\mathbf{X_1}$ = K, $\mathbf{X_2}$ = L, $\mathbf{X_3}$ = C), то в целях замыкания системы ОДУ требуется условие интегрируемости. Таким условием является выполнимость требований теоремы Фробениуса**:** $\omega d\omega = 0$, где $\omega = dE - \sum\partial E\partial x_i \cdot dx_i$, т.е. дифференциальная форма – 1, в то время как $d\omega$ – дифференциальная форма - 2.

Для E = E (K, L, C), т.е. когда областью определения функции E является 3-х мерное многообразие, это условие записывается в виде:

$$\partial E/\partial K \cdot (\partial(\partial E/\partial C)/\partial L - \partial(\partial E/\partial L)/\partial C) + \partial E/\partial L \cdot (\partial(\partial E/\partial K)/\partial C - \partial(\partial E/\partial C)/\partial K) + \\ + \partial E/\partial C \cdot (\partial(\partial E/\partial L)/\partial K - \partial(\partial E/\partial K)/\partial L) = 0 \tag{2.2}$$

В случае принятия условия конкурентности экономики можно переобозначить $\partial E/\partial X_i$, i=1, 2, 3.

$P_K = \dfrac{\partial E}{\partial K} == i$ – норма процента на капитал, $P_L = \dfrac{\partial E}{\partial L} == l$ - величина средней зарплаты;

$P_C = \dfrac{\partial E}{\partial C} == h$ – стоимость производственного фактора знания. Тогда (2.1-2.2) записываются:

---

[4] Подобная балансовая гипотеза, объясняющая изменение функции распределения по различным социальным группам (пола, возраста, дохода, семейного положения, профессий и т.п.) была выдвинута Ю.Н. Гаврильцом [6]. Более того, им и его учениками была развита методология декомпозиции общей функции распределения многих аргументов на функции распределения меньшего числа аргументов.

[5] Естественно в предположении существования предельных переходов к P_K, P_L, P_C.

$$\begin{cases} \dfrac{dK}{dt} = \dfrac{\partial\Phi}{\partial i}(a) \\ \dfrac{dL}{dt} = \dfrac{\partial\Phi}{\partial l}(б) \\ \dfrac{dC}{dt} = \dfrac{\partial\Phi}{\partial h}(в) \\ \dfrac{di}{dt} = -(\dfrac{\partial\Phi}{\partial K} + \dfrac{\partial\Phi}{\partial E} i)(г) \\ \dfrac{dl}{dt} = -(\dfrac{\partial\Phi}{\partial L} + \dfrac{\partial\Phi}{\partial E} l)(д) \\ \dfrac{dh}{dt} = -(\dfrac{\partial\Phi}{\partial C} + \dfrac{\partial\Phi}{\partial E} h)(e) \\ d\mathrm{E}/dt = idK/dt + l\, dL/dt + hdC/dt\ (ж) \\ i(\partial h/\partial L - \partial l/\partial \mathrm{C}) + l(\partial i/\partial \mathrm{C} - \partial h/\partial K) + h(\partial l/\partial \mathrm{K} - \partial i/\partial L) = 0\ (з) \end{cases} \tag{3}$$

В качестве ПФ рассмотрим функцию вида: $E=K^a*L^b*C^g$, что достаточно правдоподобно отражает логику: ВВП прямо пропорционален затратам труда, капитала и знаний.

Сначала рассмотрим случай: $di/dt = I_i$, $dl/dt = I_l$, $dh/dt = I_h$, где I – const (4)

Временной интервал, удовлетворяющий условию (4), соответствует нескольким месяцам.

Из системы ОДУ вытекает для выражения (3г):

$$\frac{di}{dt} = \frac{\partial i}{\partial C}\frac{dC}{dt} + \frac{\partial i}{\partial K}\frac{dK}{dt} + \frac{\partial i}{\partial L}\frac{dL}{dt} = \frac{\partial i}{\partial C}\frac{\partial\Phi}{\partial h} + \frac{\partial i}{\partial K}\frac{\partial\Phi}{\partial i} + \frac{\partial i}{\partial L}\frac{\partial\Phi}{\partial l} = -(\frac{\partial\Phi}{\partial K} + \frac{\partial\Phi}{\partial E} i) = \mathbf{I_i} \tag{5}$$

Аналогичным образом получаются равенства для $\dfrac{dl}{dt}, \dfrac{dh}{dt}$.

Перепишем эти равенства в виде 2-х систем уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Phi}{\partial K} + \dfrac{\partial\Phi}{\partial E} i = -I_i \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial L} + \dfrac{\partial\Phi}{\partial E} l = -I_l \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial C} + \dfrac{\partial\Phi}{\partial E} h = -I_h \end{cases} \tag{6.1}$$

и

$$\begin{cases} \dfrac{\partial i}{\partial C}\dfrac{\partial\Phi}{\partial h} + \dfrac{\partial i}{\partial K}\dfrac{\partial\Phi}{\partial i} + \dfrac{\partial i}{\partial L}\dfrac{\partial\Phi}{\partial l} = I_i \\ \dfrac{\partial l}{\partial C}\dfrac{\partial\Phi}{\partial h} + \dfrac{\partial l}{\partial K}\dfrac{\partial\Phi}{\partial i} + \dfrac{\partial l}{\partial L}\dfrac{\partial\Phi}{\partial l} = I_l \\ \dfrac{\partial h}{\partial C}\dfrac{\partial\Phi}{\partial h} + \dfrac{\partial h}{\partial K}\dfrac{\partial\Phi}{\partial i} + \dfrac{\partial h}{\partial L}\dfrac{\partial\Phi}{\partial l} = I_h \end{cases} \tag{6.2}$$

$$\frac{I_i}{i}+\frac{\partial\Phi}{i\partial K}=\frac{I_l}{l}+\frac{\partial\Phi}{l\partial L}=\frac{I_h}{h}+\frac{\partial\Phi}{h\partial C}=\frac{\partial\Phi}{\partial E} \qquad (6.3)$$

Из системы (6.2) и (3) получаем: $\frac{dK}{dt}=\frac{\partial\Phi}{\partial i}$; $\frac{dL}{dt}=\frac{\partial\Phi}{\partial l}$; $\frac{dC}{dt}=\frac{\partial\Phi}{\partial h}$. Откуда:

$$\begin{cases}\frac{\partial i}{\partial C}\frac{dC}{dt}+\frac{\partial i}{\partial K}\frac{dK}{dt}+\frac{\partial i}{\partial L}\frac{dL}{dt}=I_i\\ \frac{\partial l}{\partial C}\frac{dC}{dt}+\frac{\partial l}{\partial K}\frac{dK}{dt}+\frac{\partial l}{\partial L}\frac{dL}{dt}=I_l\\ \frac{\partial h}{\partial C}\frac{dC}{dt}+\frac{\partial h}{\partial K}\frac{dK}{dt}+\frac{\partial h}{\partial L}\frac{dL}{dt}=I_h\end{cases} <=> \begin{pmatrix}\frac{\partial i}{\partial C} & \frac{\partial i}{\partial K} & \frac{\partial i}{\partial L}\\ \frac{\partial l}{\partial C} & \frac{\partial l}{\partial K} & \frac{\partial l}{\partial L}\\ \frac{\partial h}{\partial C} & \frac{\partial h}{\partial K} & \frac{\partial h}{\partial L}\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\frac{dC}{dt}\\ \frac{dK}{dt}\\ \frac{dL}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_i\\ I_l\\ I_h\end{bmatrix} \qquad (7)$$

Возможен случай, когда **I_i=0, I_l=0, I_h=0.** Тогда либо C, K, L –константы, либо все элементы матрицы $\begin{pmatrix}\frac{\partial i}{\partial C} & \frac{\partial i}{\partial K} & \frac{\partial i}{\partial L}\\ \frac{\partial l}{\partial C} & \frac{\partial l}{\partial K} & \frac{\partial l}{\partial L}\\ \frac{\partial h}{\partial C} & \frac{\partial h}{\partial K} & \frac{\partial h}{\partial L}\end{pmatrix}$ равны 0.

В случае, когда $E=K^a*L^b*C^g$, система уравнений (7) разрешима, если: $\det\begin{pmatrix}\frac{\partial i}{\partial C} & \frac{\partial i}{\partial K} & \frac{\partial i}{\partial L}\\ \frac{\partial l}{\partial C} & \frac{\partial l}{\partial K} & \frac{\partial l}{\partial L}\\ \frac{\partial h}{\partial C} & \frac{\partial h}{\partial K} & \frac{\partial h}{\partial L}\end{pmatrix}\neq 0$

и тогда

$$(a+b+g-1)\neq 0 \quad L,K,C>0$$
$$a,\ b,\ g\neq 0;$$

Подставляя в 3(ж), получаем после обозначения $k=\frac{1}{a+b+g-1}$:

$$\begin{cases}\frac{dE}{dt}=k*(L\cdot I_l+K\cdot I_i+C\cdot I_h)\\ \frac{dC}{dt}h+CI_h=g\frac{dE}{dt}\\ \frac{dK}{dt}i+KI_i=a\frac{dE}{dt}\\ \frac{dL}{dt}l+LI_l=b\frac{dE}{dt}\end{cases} \rightarrow \begin{cases}\frac{dE}{dt}=k*(L\cdot I_l+K\cdot I_i+C\cdot I_h)\\ \frac{d(h\cdot C)}{dt}=g\frac{dE}{dt}\\ \frac{d(i\cdot K)}{dt}=a\frac{dE}{dt}\\ \frac{d(L\cdot l)}{dt}=b\frac{dE}{dt}\end{cases}$$

(8) (9)

Проинтегрируем последние 3 уравнения в системе 9:

$$\begin{aligned} E &= g\cdot(h\cdot C)+f_1(\breve{t}) \\ E &= \alpha\cdot(i\cdot K)+f_2(\breve{t}), \\ E &= b\cdot(l\cdot L)+f_3(\breve{t}) \end{aligned} \tag{10}$$

где $f_1(\breve{t})$ - функция, не зависящая от времени.

Решение системы уравнений (8) осуществимо после подготовки статистических рядов для: E, C, K, L, h, i, l [10].

Однако, при вычислении *k,* его величина оказывается порядка 0.002, что никак не удовлетворяет условию:1/k=a+b+g-1, что и подтверждает гипотезу Бессонова [7-9] о невозможности описывать какой-то одной ПФ весь переходной период трансформационных преобразований в России.

Выводы

1. ПФ **E** с эндогенно вводимым НТП в качестве показателя наукоёмкости используемых в производстве технологий, т.е. их насыщенности знаниями – **C**, с неизбежностью должна быть функцией от 3-х аргументов **E = E(K, L, C).**
2. СОВ переходного периода России в течение всего периода не может быть описана ПФ только вида $E=K^a*L^b*C^g$.

Литература

1. Клейнер Г.Б. Производственные функции: теория, методы, применение. М.: Финансы и статистика, 1986. – 239 с.
2. Шведовский В.А. «Внутреннее обоснование» социальных переменных в динамической модели системы общественного воспроизводства. Вестник МГУ. Сер.18. Социология и политология.2007. № 1.
3. Иванов Л.Д. Вариации множеств и функций. Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1975 – 352 с.
4. Арнольд В.И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений.- Ижевск: Ижевская республиканская типография. 2000. – 400 с.
5. Шведовский В.А. Информационный критерий в обобщении уравнения Кондратьева Н.Д. для современной социально-экономической ситуации в России // Математическое моделирование социальных процессов, МГУ Социологический ф-т, вып.9., М., 2007.
6. Гаврилец Ю.Н. Моделирование социальных процессов, Наука, М., 1970.
7. Бессонов В.А. «Проблемы построения производственных функций в российской переходной экономике», М., 2002.
8. Бессонов В.А. «Практический анализ. О динамике основных фондов и инвестиций в российской переходной экономике». Экономический журнал ВШЭ, №2 2006
9. Бессонов В.А. «О динамике совокупной факторной производительности в российской переходной экономике». Экономический журнал ВШЭ. 2004 Т.8 №4 С. 542-587.
10. Неклюдов А.В. Проблемы построения производственных функций с эндогенно введённой составляющей научно-технического прогресса. Выпускная квалификационная работа на степень магистра, МФТИ (Государственный университет), 2007.

Шведовский Вячеслав Анатольевич. Родился в 1939 году. Окончил Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова в 1964 году. Кандидат физико-математических наук. Имеет свыше 60 научных публикаций, в том числе монографию. Область научных интересов: математическое моделирование социальных процессов, социальная генетика и эволюция. Старший научный сотрудник Института математического моделирования РАН.

Неклюдов Алексей Васильевич. Родился в 1984 году. Окончил Московский физико-технический институт в 2007 году. Имеет 2 научные публикации. Область научных интересов: математическое моделирование социально-экономических процессов. Математик-аналитик ООО «Созвездие энергетических решений».