

# О возможности изменения типа производственной функции: интересы социальных групп и направление технического прогресса<sup>1</sup>

В.Д. Матвеевко

**Аннотация.** Анализируются факторы, влияющие на выбор направления технического прогресса, и подчеркивается важность этого выбора для социально-экономического развития страны. Сформулированы условия совпадения и несовпадения интересов социальных групп при выборе направления изменения параметра производственной функции. Выясняется роль величины эластичности замещения факторов. С точки зрения модели рассматривается динамика распределения дохода между владельцами факторов. Обсуждается возможность несовпадения типов производственных функций в странах.

## Введение

На протяжении полувека после выхода работ Р.Солоу [1, 2] модели экономического роста, основанные на производственных функциях, служат одним из основных инструментов экономического анализа. За это время круг таких моделей существенно расширился, прежде всего, благодаря развитию моделей эндогенного роста [3]. Модели роста стали использоваться и как основа моделей делового цикла. Исследования Ф.Кидленда и Э.Прескотта в этом направлении отмечены в 2004 г. Нобелевской премией по экономике. Однако по мере развития теории роста становились очевидными проблемы, связанные с ее практическим применением. Создатели неоклассической теории роста в своих моделях имели в виду, прежде всего, экономику США, но с помощью этих же моделей изучались другие страны и проводился межстрановой анализ, при этом предположения моделей далеко не всегда подвергались переоценке.

Часто модели роста, в том числе и ориентированные на экономическую политику, основываются на упрощенных предположениях относительно значений параметров. Например, полагают, что разнотипные страны имеют одинаковое распределение дохода между владельцами факторов производства – труда и капитала. Работа [4] показывает неадекватность такого предположения: доля капитала в промышленности разных стран в период 1990-2003 гг. существенно различалась (например, она составляла 0,33 в Исландии и 0,82 в Чили), при этом в развивающихся странах она была, в среднем, выше, чем в развитых.

Другое предположение – о свободном обмене технологиями между странами и, соответственно, о совпадении производственных функций – также является чрезмерным упрощением. Даже если все страны имели бы свободный доступ к наиболее современным технологиям, что далеко не так, существующие институты сделали бы в ряде стран невозможным использование этих технологий в первоначальном виде.

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке РГНФ (проект № 07-02-04048а)

Гипотезы, принятые в большинстве моделей роста, соответствуют так называемым стилизованным фактам роста [5, 6], которые плохо описывают динамику многих развивающихся стран, плановых и переходных экономик. Например, такой факт, как постоянство капиталотдачи (выпуска на единицу капитала) не соответствует динамике российской экономики, начиная с 1960-х годов. Модели, в основу которых положен этот стилизованный факт, на протяжении нескольких десятилетий использовались в практике Всемирного Банка, и, по мнению У. Истерли [7], именно неадекватность этих моделей была причиной неэффективности помощи развитых стран развивающимся.

Значимость проблем международного экономического развития в условиях глобализации обуславливает сегодня чрезвычайную актуальность теоретических и эмпирических исследований, связанных с основаниями моделей экономического роста и, в частности, с производственными функциями. Модели роста пытаются объяснить колоссальные различия в развитии стран мира и выявить оптимальные пути развития. Для нашей страны подобные исследования тем более актуальны в связи с необходимостью уменьшения ресурсозависимости экономики и перехода к устойчивому развитию на основе экономики знаний.

Напомним, что производственная функция показывает выпуск продукта в зависимости от затрат факторов (чаще всего, это физический капитал  $K$  и труд  $L$ , точнее, их услуги). Распространение получили:

функция Леонтьева:

$$F(K, L) = \min\{A_K K, A_L L\},$$

функция Кобба-Дугласа:

$$F(K, L) = (A_K K)^\alpha (A_L L)^{1-\alpha},$$

функция CES:

$$F(K, L) = [\alpha(A_K K)^p + (1-\alpha)(A_L L)^p]^{1/p}.$$

Здесь  $A_K, A_L > 0$  - коэффициенты эффективности факторов,  $0 < \alpha < 1$ ,  $p \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$  - параметры. Обычно функцию Кобба-Дугласа записывают в виде  $AK^\alpha L^{1-\alpha}$ . Функция CES в частном случае  $A_K = A_L$  также записывается в виде  $A[\alpha K^p + (1-\alpha)L^p]^{1/p}$ . Коэффициент  $A$

известен как общая производительность факторов (total factor productivity, TFP).

Эти три типа функций тесно связаны между собой. В пределе при  $p \rightarrow 0$  CES-функция превращается в функцию Кобба-Дугласа, а при  $p \rightarrow -\infty$  - в функцию Леонтьева. При обсуждении производственных функций чаще говорят не о параметре  $p$ , а об эластичности замещения  $\sigma$ . Эти две величины связаны между собой равенством:  $p = 1 - \frac{1}{\sigma}$ . Таким образом,

для функции Леонтьева  $\sigma = 0$ , для функции Кобба-Дугласа  $\sigma = 1$ , для CES-функции  $\sigma \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ .

Стоит заметить, что появление CES-функции в экономике было достаточно случайным: экономисты стали использовать в качестве производственной функции получившую популярность в математике функцию обобщенного среднего. Параметр  $\alpha$  CES-функции, по видимому, до сих пор не имеет экономической интерпретации. Мы можем интерпретировать его как институциональный параметр - показатель, характеризующий распределение некоторого ограниченного информационного ресурса между факторами производства.

Укажем некоторые направления современных исследований, относящиеся к производственным функциям и их применениям в моделях экономического роста.

В [8] выявляются критические значения параметра  $\sigma$ , при которых качественно меняется характер экономической динамики.

Немало работ последних лет посвящено оцениванию значений  $\sigma$  по данным, относящимся к отдельным странам или выборкам стран (например, [9, 10]). При этом у различных авторов получаются совершенно разные значения  $\sigma$  (существенно меньшие 1, близкие к 1, больше 1), что лишь подчеркивает необходимость совершенствования теории.

Другое направление теории роста составляет исследование коэффициентов эффективности факторов или коэффициента TFP [11-16]. Для нас будет представлять интерес результат Д. Акемоглу [14, 15]: при высокой эластичности замещения  $\sigma$  технический прогресс направлен на увеличение эффективности имею-

щегося в избытке фактора, тогда как при низкой эластичности замещения  $\sigma$  технический прогресс направлен на повышение эффективности имеющегося в недостатке фактора.

Ряд работ посвящен возможности представления «глобальной» производственной функции  $F(x)$  как результата оптимального выбора «локальной» технологии из заданного технологического меню:

$$F(x) = \min_{l \in \Lambda} \varphi(x, l).$$

Здесь  $x$  – вектор факторов производства,  $l$  – локальная технология,  $\Lambda$  – технологическое меню,  $\varphi(x, l)$  – локальная производственная функция. В [17, 18] было получено такое представление произвольной  $n$ -факторной глобальной производственной функции с постоянной отдачей от масштаба через локальные производственные функции Леонтьева. Позднее в [19] было указано аналогичное представление глобальной двухфакторной функции Кобба-Дугласа через локальные функции с эластичностью замещения  $\sigma < 1$ .

Ряд новых результатов в теории роста получен с использованием других типов производственной функции. Так, автором [20-22] разработана так называемая fK-модель, в которой производственная функция имеет вид  $f(V)K$ , где  $K$  – капитал,  $V$  – управляющая переменная, которая представляет собой потребление на единицу капитала. Модель имеет микрооснования, учитывающие институты труда, такие, например, как эффективная заработная плата (efficiency wages), возможности вторичной занятости. Если неоклассические модели практически не объясняют динамику российской экономики, то fK-модель показывает наличие зон роста и зон спада, границы которых зависят от институциональных параметров.

В настоящей статье рассматривается возможность изменения параметра  $\alpha$  функции Кобба-Дугласа или CES-функции. Допускаются как изменения этого параметра во времени в одной стране, так и различия по этому параметру между странами. Ранее близкие вопросы рассматривались в [23, 24] применительно к двух- и трехфакторным функциям Кобба-Дугласа. Использование CES-функции дает нам возможность проследить влияние изменения

эластичности замещения факторов на направление технического прогресса.

Поскольку нет ни видимых теоретических причин, ни эмпирических данных, которые свидетельствовали бы о том, что технический прогресс состоит лишь в изменении того или иного конкретного параметра производственной функции и не касается других параметров, возможность изменения параметра  $\alpha$  представляется столь же интересной, как и возможность изменения коэффициентов эффективности  $A_K, A_L$ , исследовавшаяся в [14, 15].

Возможная экономическая постановка вопроса следующая. Пусть страна получает доступ к технологии (производственной функции), которая характеризуется параметром  $\alpha$ , или может выбрать значение  $\alpha$  из некоторого множества (технологического меню). Согласятся ли на определенное значение  $\alpha$  экономические агенты, имеющие несовпадающие интересы – владельцы труда (работники) и владельцы капитала («капиталисты»)?

## 1. Технический прогресс и изменение производственной функции

Изменения в характере социально-экономической динамики связаны, прежде всего, с изменениями технологии и, в частности, с несоответствием технологических изменений и существующих институтов. Наиболее распространенным способом описания технологических изменений долго было изменение коэффициента TFP, стоящего перед производственной функцией. Именно такой способ использовался в упоминавшихся уже работах Ф.Кидленда и Э.Прескотта. Однако такой подход не учитывает что технический прогресс может быть направленным. Страна может иметь в избытке тот или иной фактор производства, например, неквалифицированный труд, квалифицированный труд (или человеческий капитал), физический капитал, природные ресурсы. Эффективность использования избыточного фактора, зависит от эластичности замещения между факторами.

Если эластичность замещения высокая, технологические изменения будут направлены на

использование избыточного фактора. Скажем, человеческий капитал стекался в США, и одновременно технологии в США менялись в результате инноваций таким образом, что более интенсивно использовался человеческий капитал, а производство, требующее неквалифицированного труда, частично переносилось в другие страны.

Если эластичность замещения факторов низкая, то технологии будут модифицироваться таким образом, чтобы усиливался дефицитный фактор.

Почему важен вопрос о направлении технического прогресса? Во-первых, возможности технологических изменений определяют путь развития экономики страны. Скажем, в России популярной стала фраза о перепроизводстве специалистов с высшим образованием. Но такой «излишек» превратится в дефицит, если технологические изменения будут направлены на усиление роли человеческого капитала. Точно так же, значимость для экономики демографического фактора, зависит от того, каким будет направление технического прогресса. Во-вторых, чисто формально, характер экономической динамики, например, возможность устойчивого эндогенного роста или возможность сложной динамики, например, хаотических траекторий, определяется типом производственной функции, а он может изменяться благодаря технологическим изменениям.

Здесь возникает такая проблема: страны – технологические лидеры проводят технологические изменения с учетом того, какого рода ресурсы имеются у них в недостатке или избытке. Но затем технологии переносятся в другие страны, где наличие факторов производства совершенно иное, потому новые технологии могут оказаться неэффективными. В этой связи остро стоит вопрос о важности сохранения фундаментальной науки и НИОКР в России и о развитии производства на основе собственных технологий.

Другая проблема состоит в том, что при переносе технологий совсем не обязательно в стране-получателе технология будет использоваться в первоначальном виде. Большую роль играют институты; в частности, в фактически используемых технологиях могут воплощаться

интересы социальных групп («классов»), поскольку весь производственный процесс в значительной степени связан с экономическими, социальными и политическими институтами. «Социальные технологии» (термин Р.Нельсона [25]) используются в производственном процессе наравне с физическими технологиями. (Среди «социальных технологий» методы менеджмента, роль профсоюзов, доля, принадлежащая работникам в активах предприятия, разного рода неформальные институты и т.д.)

Выбор параметров производственной функции может происходить как на стадии НИОКР, так и на стадиях распространения инноваций, производства и даже на стадии распределения – производственная функция может быть изменена *de facto*, если это выгодно достаточно сильной группе агентов.

## 2. Производственные функции, интересы социальных групп и распределение дохода

Как известно, в случае совершенной конкуренции, распределение ВВП между владельцами факторов (капиталистами и работниками) совпадает с разложением производственной функции по теореме Эйлера:

$$F(K, L) = \frac{\partial F}{\partial K} K + \frac{\partial F}{\partial L} L.$$

Соответственно, доли владельцев факторов равны  $\theta_K = \frac{\partial F}{\partial K} \frac{K}{F}$ ,  $\theta_L = \frac{\partial F}{\partial L} \frac{L}{F}$ . Для функции Кобба-Дугласа эти доли составляют, соответственно,  $\alpha$  и  $1 - \alpha$ .

Для CES-функции, как нетрудно убедиться, доли владельцев факторов в доходе равны:

$$\theta_K = \frac{\alpha}{\alpha + (1 - \alpha) \left( \frac{A_L L}{A_K K} \right)^p},$$

$$\theta_L = \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha + \alpha \left( \frac{A_K K}{A_L L} \right)^p}.$$

Если эффективные значения факторов совпадают:  $A_K K = A_L L$ , то, как и для функции

Кобба-Дугласа, факторы получают доли  $\alpha$  и  $1 - \alpha$ . Если  $A_K K > A_L L$ , будем говорить, что капитал является избыточным фактором. Наоборот, при  $A_K K < A_L L$  избыточным фактором является труд. Видим, что при высокой эластичности замещения ( $\sigma > 1$  и, соответственно,  $0 < p < 1$ ) избыточный фактор получает повышенную долю дохода по сравнению с распределением  $\alpha : 1 - \alpha$ . Например, если труд избыточен, то  $\theta_L > 1 - \alpha$ . При низкой эластичности замещения ( $0 < \sigma < 1$  и  $p < 0$ ), наоборот, избыточный фактор получает пониженную долю дохода. Это говорит о том, что технический прогресс направлен на повышение эффективности фактора, который получает повышенную долю дохода [14, 15].

Социальные группы – *работники* и *капиталисты* соглашаются на увеличение/ уменьшение параметра  $\alpha$ , если при этом увеличивается их доход. Для функции Кобба-Дугласа доходы социальных групп равны:

$$\frac{\partial F}{\partial K} K = \alpha F(K, L), \quad \frac{\partial F}{\partial L} L = (1 - \alpha) F(K, L).$$

Для CES-функции доходы социальных групп составляют:

$$\frac{\partial F}{\partial K} K = \alpha F(K, L)^{1-p} (A_K K)^p,$$

$$\frac{\partial F}{\partial L} L = (1 - \alpha) F(K, L)^{1-p} (A_L L)^p.$$

Считаем далее, что в коротком периоде величины факторов  $K, L$  фиксированы.

### 2.1. Случай функции Кобба-Дугласа

Условием возрастания с ростом  $\alpha$  дохода капиталистов  $\alpha A L k^\alpha$  (где  $k = \frac{K}{L}$ ) является неравенство  $(\alpha k^\alpha)' > 0$ , эквивалентное следующему:  $1 + \alpha \ln k > 0$ .

Условием возрастания с ростом  $\alpha$  дохода работников  $(1 - \alpha) A L k^\alpha$  является неравенство  $[(1 - \alpha) k^\alpha]' > 0$ , эквивалентное  $(1 - \alpha) \ln k - 1 > 0$ .

Рассмотрим два случая: 1)  $0 < k < 1$ ;  
2)  $k > 1$ .

В первом случае условие возрастания дохода капиталистов эквивалентно неравенству  $\alpha < -\frac{1}{\ln k}$ . Однако это неравенство ограничивает область возрастания дохода лишь при  $0 < k < \frac{1}{e}$ , тогда как при  $\frac{1}{e} < k < 1$  оно выполняется автоматически и подходящими являются любые  $\alpha$  из промежутка  $0 < \alpha < 1$ . Условие возрастания дохода работников в этом случае имеет вид:  $\alpha > 1 - \frac{1}{\ln k}$ .

В втором случае условие возрастания дохода капиталистов выполняется автоматически, т.е. капиталисты безусловно поддерживают увеличение параметра  $\alpha$ . Условием возрастания дохода работников в этом случае является неравенство  $\alpha < 1 - \frac{1}{\ln k}$ , при этом допустимыми оказываются лишь точки  $k > e$ .

Из сказанного следует, что имеются две области, где интересы групп совпадают, т.е. капиталисты и работники заинтересованы в изменении параметра  $\alpha$  в одном и том же направлении:

а) В области

$$\Omega_0^\downarrow = \{(k, \alpha) : 0 < k < \frac{1}{e}, \alpha > -\frac{1}{\ln k}\}$$

обе социальные группы соглашаются на уменьшение параметра  $\alpha$ ;

б) В области

$$\Omega_0^\uparrow = \{(k, \alpha) : k > e, \alpha < 1 - \frac{1}{\ln k}\}$$

обе группы соглашаются на увеличение параметра  $\alpha$ .

Области совпадения интересов групп обозначены на Рис. 1 сонаправленными стрелками. В заштрихованной части полосы  $0 < \alpha < 1$  интересы расходятся: это поле для социальных конфликтов, вплоть до передела собственности, восстаний и гражданских войн – форма конфликта зависит от институтов в конкретное историческое время в конкретной стране.

Эта модель не противоречит наблюдаемой социально-экономической динамике. Например, постоянное увеличение доли капитала

в Западной Европе в 1990-2000-х годах объясняется тем, что с ростом капиталовооруженности  $k$  страны пришли в область  $\Omega_0^\uparrow$  (Рис. 1), где социальные группы заинтересованы в повышении доли капитала.

С помощью модели можно проследить траекторию гипотетической развивающейся страны. При низкой капиталовооруженности страна может находиться на границе области  $\Omega_0^\downarrow$ , затем, по мере роста капиталовооруженности, она вступает в зону социального конфликта, где распределение дохода между социальными группами зависит от их переговорной силы и других институтов. Во многих случаях можно ожидать, что доля труда возрастет. При дальнейшем повышении капиталовооруженности, страна вступает в область  $\Omega_0^\uparrow$ , где группы соглашаются на повышение доли капитала – часто, в частности, работники сами становятся держателями ценных бумаг.

### 2.2. Случай CES-функции

Случай CES-функции интересен, поскольку позволяет исследовать изменение областей совпадения интересов в зависимости от эластичности замещения факторов. Условием возрастания дохода капиталистов (вывод не приводится) является неравенство:

$$\frac{\alpha}{p} \left[ 1 - \left( \frac{A_K}{A_L} k \right)^p \right] < 1, \text{ где } k = \frac{K}{L}. \quad (1)$$

Условием возрастания дохода работников является неравенство:

$$\frac{(1-\alpha)}{p} \left[ 1 - \left( \frac{A_L}{A_K k} \right)^p \right] > 1. \quad (2)$$

Выделим два случая: 1)  $0 < k < \frac{A_L}{A_K}$ , т.е. труд является избыточным фактором; 2)  $k > \frac{A_L}{A_K}$ , т.е. капитал является избыточным фактором.

Пусть  $p < 0$ . В первом случае обратимся сначала к интересам капиталистов. В (1) левая часть положительна. Условие возрастания дохода капиталистов эквивалентно неравенству

$$\alpha < \frac{p}{1 - \left( \frac{A_K}{A_L} k \right)^p}. \quad (3)$$

Заметим, что функция, стоящая в правой части, возрастает по  $k$  и достигает значения 1 при  $k = a(p) = \frac{A_L}{A_K} (1-p)^{1/p}$ . Это значит, что

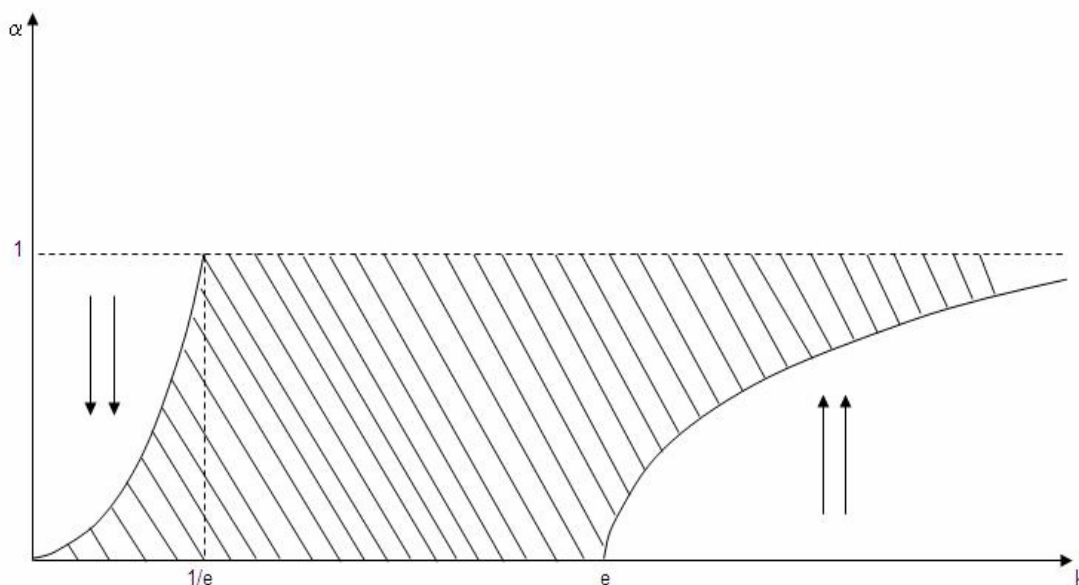


Рис. 1. Области совпадения и несовпадения интересов социальных групп в случае функции Кобба-Дугласа

при  $k \in (0, a(p))$  капиталисты заинтересованы в увеличении  $\alpha$  лишь при условии (3), а при  $k \in (a(p), 1)$  – безусловно. Что касается работников, в первом случае в левой части неравенства (2) стоит отрицательное число, т.е. неравенство (2) несовместно. Это означает, что, работники в данном случае заинтересованы в уменьшении параметра  $\alpha$ .

Во втором случае левая часть неравенства (1) отрицательна, т.е. (1) выполняется автоматически: капиталисты безусловно заинтересованы в увеличении параметра  $\alpha$ . Для работников перепишем неравенство (2) в виде:

$$\alpha < 1 - \frac{p}{1 - \left(\frac{A_L}{A_R k}\right)^p}. \tag{4}$$

Правая часть возрастает по  $p$  и меняет знак в точке

$$b(p) = \frac{A_L}{A_K} \left(\frac{1}{1-p}\right)^{1/p}.$$

При  $k \in \left(\frac{A_L}{A_K}, b(p)\right)$  работники заинтересованы в снижении  $\alpha$ , а при  $k > b(p)$  и условия (4) – в повышении  $\alpha$ .

Таким образом, для CES-функции при  $p < 0$  на плоскости  $(k, \alpha)$  (Рис.2) имеются

две области совпадения интересов социальных групп:

а) В области

$$\Omega_p^\downarrow = \left\{ (k, \alpha) : 0 < k < a(p), \alpha > \frac{p}{1 - \left(\frac{A_K}{A_L} k\right)^p} \right\},$$

обе социальные группы соглашаются на уменьшение параметра  $\alpha$ ;

б) В области

$$\Omega_p^\uparrow = \left\{ (k, \alpha) : k > b(p), \alpha < 1 - \frac{p}{1 - \left(\frac{A_L}{A_R k}\right)^p} \right\}$$

обе социальные группы соглашаются на увеличение параметра  $\alpha$ .

В остальной части полосы  $0 < \alpha < 1$  интересы социальных групп расходятся.

Пусть теперь  $0 < p < 1$ . В первом случае получаем условие возрастания доходов капиталистов (3). Левая часть неравенства (3) положительна, и почти все, что было сказано в случае «1» для  $p < 0$ , остается в силе. Отличие состоит в том, что теперь при  $k \rightarrow 0$  граничное значение  $\alpha$  приближается к  $p$ , а не к 0. Для работников левая часть неравенства (2) отрицательна, это противоречие означает, что работники заинтересованы в уменьшении параметра  $\alpha$ .

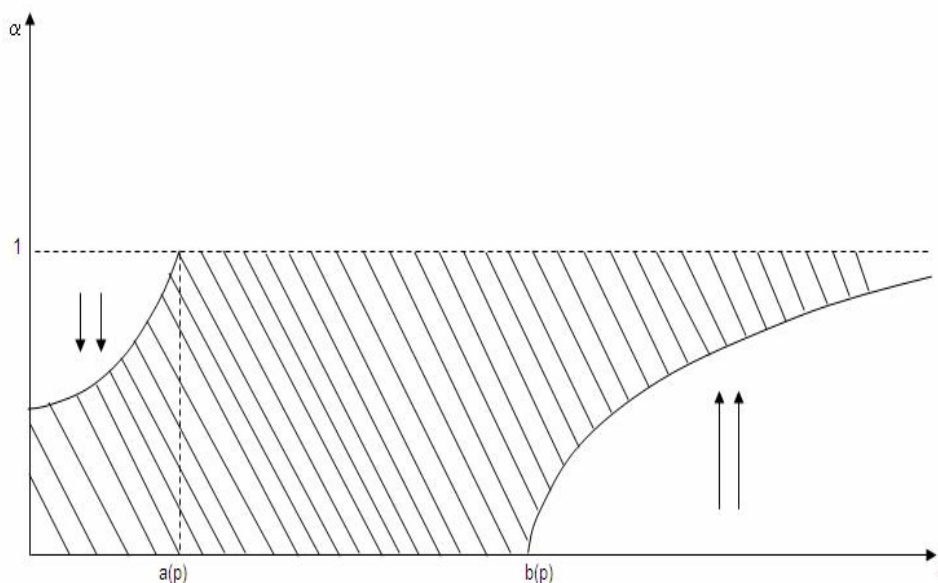


Рис. 2. Области совпадения и несовпадения интересов социальных групп в случае CES-функции при  $0 < p < 1$

В случае «2» капиталисты безусловно поддерживают увеличение  $\alpha$ . Для работников вновь приходим к неравенству (4). Область на плоскости  $(k, \alpha)$ , в которой работники заинтересованы в увеличении  $\alpha$ , описывается формально так же, как и в случае «2» для  $p < 0$ .

Таким образом, при  $0 < p < 1$  имеется две области совпадения интересов социальных групп (Рис. 2), которые формально описываются так же, как и при  $p < 0$ . В заштрихованной части полосы  $0 < \alpha < 1$  интересы социальных групп расходятся.

### 2.3. Последствия повышения эластичности замещения

Посмотрим, как изменяются области совпадения интересов социальных групп при изменении параметра  $p$  (и, соответственно, при изменении эластичности замещения факторов  $\sigma$ ).

Пусть сначала  $p < 0$ , причем модуль  $p$  велик – эластичность замещения факторов  $\sigma$  низка (т.е. CES-функция напоминает по своим свойствам функцию Леонтьева). В таком случае оба граничных значения  $a(p)$  и  $b(p)$  близки к 1. При возрастании параметра  $p$  и его приближении к 1, граница  $a(p)$  монотонно убывая, стремится к 0, а граница  $b(p)$  монотонно возрастая, расходится к  $+\infty$ . При этом обе области совпадения интересов  $\Omega_p^\downarrow$  и  $\Omega_p^\uparrow$  сжимаются.

С точки зрения направленности технологических изменений, полученные результаты можно интерпретировать следующим образом. В области  $\Omega_p^\downarrow$  страна относительно богата трудом, и технический прогресс в стране (изменение параметра  $\alpha$ ) при относительно низкой эластичности замещения направлен на использование этого избыточного и относительно дешевого фактора. Однако, возросшая эластичность замещения вносит различие в интересы социальных групп, и установившееся технологическое изменение прекращается. Аналогично, в области  $\Omega_p^\uparrow$  страна относительно богата капиталом, и технический прогресс направлен на использование этого избыточного фактора до

тех пор, пока не появляется различие в интересах социальных групп.

Эти результаты, в определенном смысле, дополняют выводы [14] относительно направленности технологических изменений. В [14] при рассмотрении модели изменения параметров эффективности факторов выделялись два эффекта: *эффект цены*, который создает стимул развивать технологии, используемые при производстве более дорогих товаров, использующих дефицитные факторы, и *эффект размера рынка*, благодаря которому выгодно развивать технологии, которые используют имеющиеся в избытке факторы. Эластичность замещения между факторами производства определяет, какой из этих эффектов сильнее и, тем самым, как технологическое изменение отвечает на экономическую ситуацию. Если эластичность замещения низка, то относительно сильнее эффект цены. Если эластичность замещения велика, то преобладает эффект размера рынка.

В нашем случае, технологические изменения состоят в изменении значения  $\alpha$ . Когда интересы социальных групп совпадают, они поддерживают эффект размера рынка, но, с ростом эластичности замещения, области совпадения интересов сжимаются, т.е. поддержка эффекта размера рынка ослабевает.

### 3. Следствия межстрановых различий в производственных функциях

Отказ от предположения о совпадении производственных функций в разнотипных странах приводит к неожиданным выводам. Например, С.Ребело [26], развивая идею Р.Лукаса [27], рассмотрел такую ситуацию. Имеются две условные страны - послевоенные США и Япония, которые, в его предположениях, имеют одну и ту же производственную функцию Кобба-Дугласа, одинаковые численности рабочей силы, но разные уровни капитала. Эта модель дает колоссальное различие в процентных ставках: капитал должен был бы устремиться в Японию, чего, однако не происходило по необъяснимым при указанных предположениях



причинам. Рассмотрим пример внимательнее, допуская различие в значениях параметра  $\alpha$ .

Итак, пусть имеется две страны, Япония и США с производственными функциями  $AK^{\alpha_J} L^{1-\alpha_J} = Ak^{\alpha_J} L$  и  $AK^{\alpha_{US}} L^{1-\alpha_{US}} = Ak^{\alpha_{US}} L$ . Мы находимся в начале 1950-х годов; труд предполагается одинаковым в двух странах, а выпуск в США в пять раз превышающим выпуск в Японии. Обозначим  $k_J$  - капиталовооруженность в Японии, а  $k_{US}$  - в США. Тогда  $k_{US}^{\alpha_{US}} = 5k_J^{\alpha_J}$ . Отношение предельных продуктов капитала в Японии и США равно

$$\frac{MPK_J}{MPK_{US}} = \frac{\alpha_J k_J^{\alpha_J-1}}{\alpha_{US} k_{US}^{\alpha_{US}-1}} = \frac{1}{5} \frac{\alpha_J k_{US}}{\alpha_{US} k_J}.$$

Для процентных ставок справедливы равенства:

$$r_J = MPK_J - \delta, \quad r_{US} = MPK_{US} - \delta,$$

где  $\delta$  - коэффициент износа, общий для двух стран. Таким образом,

$$r_J = (r_{US} + \delta) \frac{MPK_J}{MPK_{US}} - \delta.$$

Ребело в своем расчете полагает, что производственные функции в Японии и США совпадают:

$\alpha_J = \alpha_{US}$ . Тогда  $\frac{k_{US}}{k_J} = 5^{1/\alpha_{US}}$  и

$\frac{MPK_J}{MPK_{US}} = 5^{1/\alpha_{US}-1}$ . Если принять  $\alpha_{US} = 1/3$ , то

$\frac{MPK_J}{MPK_{US}} = 25$ . Принимая процентную ставку

США равной  $r_{US} = 0,065$ , а коэффициент износа  $\delta = 0,1$ , можно найти процентную ставку в Японии:  $r_J = 4,025$ . Это гигантская процентная ставка – более 400%.

Мы же поступим иначе. Принимая во внимание результаты цитированной уже статьи [4], будем считать, что  $\alpha_J > \alpha_{US}$ , что, по видимому, составляет типичное отличие развивающейся и развитой стран.

Представим отношение выпусков в США и Японии в виде:  $\frac{k_{US}^{\alpha_{US}}}{k_J^{\alpha_{US}}} \frac{1}{k_J^{\alpha_J - \alpha_{US}}} = 5$ . Тогда

$$\frac{k_{US}}{k_J} = 5^{1/\alpha_{US}} k_J^{\alpha_J/\alpha_{US}-1} = 125k_J^{3\alpha_J-1}, \text{ т.е. отношение}$$

капиталов в двух странах определяется не только отношением выпусков, но еще и уровнем капитала в Японии. Когда этот уровень мал, будет малым и отношение предельных продуктов капитала в двух странах.

Например, пусть  $\alpha_J = 2/3$ . Тогда  $k_{US} = 125k_J^2$ . Если  $k_J = 0,05$ , то

$$k_{US} = 0,3, \quad \frac{MPK_J}{MPK_{US}} = \frac{2}{5} \cdot 6 = 2,4.$$

Получается, что капитал в Японии в 6 раз меньше, чем в США, а не в 125 раз, как в [26]. Предельный продукт капитала в Японии в 2,4 раза больше, чем в США, а не в 25 раз. Соответственно, процентная ставка в Японии, при сделанных предположениях, составляет не 400%, а лишь 29%, что для столь грубой прикидочной модели представляется вполне допустимым. Этот пример показывает существенное отличие в выводах, которые могут быть сделаны при принятии или при отказе от предположения о совпадении производственных функций в двух странах.

## Литература

1. Solow R.M. A contribution to the theory of economic growth// Quarterly J. of Economics. – 1956, v. 70. – pp. 65-94.
2. Solow R.M. Technological Change and the Aggregate Production Function// Rev. of Economics and Statistics. – 1957, v. 39. – pp. 312-320.
3. Матвеев В.Д., Гуревич А.М.. Модели эндогенного роста, их развитие и перспективы// Экономические исследования: теория и приложения. – С.-Петербург, Европейский университет в С.-Петербурге, 2000. – с. 260-295.
4. Rodriguez F., Ortega D. Are capital shares higher in poor countries? Evidence from industrial surveys. Wesleyan Economics Working Papers, № 2006-023. – Middletown, Wesleyan University, 2006.
5. Kaldor N. Capital accumulation and economic growth// Lutz F.A., Hager D.C., eds. The theory of capital. – New York, St. Martin's Press, 1961.
6. Romer P.M. Capital accumulation in the theory of long-run growth// Barro R.J., ed. Modern business cycle theory. – Cambridge (MA), Harvard University Press, 1989. – ch. 2.
7. Easterley W. The elusive quest for growth: Economist's adventures and misadventures in the tropics. – Cambridge, London, MIT Press, 2002. Перевод на русский язык: У.Истерли. В поисках роста. Приключения и злоключения экономиста в тропиках. – М., ИКСИ, 2006.

8. de La Grandville O., Solow R.M. A conjecture on general means// *J. of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*. – 2006, v. 7(1). – article 3.
9. Duffy J., Papageorgiou C. A cross-country empirical investigation of the aggregate production function specification// *J. of Economic Growth*. – 2000, v. 5(1). – pp. 87-120.
10. Bentolila S., Saint-Paul G. Explaining movements in the labor share// *Contributions to Macroeconomics*. – 2003, v. 3(1). – pp. 1103-1136.
11. Gundlach E. The Solow model in the empirics of growth and trade// *Oxford Rev. of Economic Policy*. – 2007, v. 23(1). – pp. 25-44.
12. McQuinn K., Whelan K. Solow (1956) as a model of cross-country growth dynamics// *Oxford Rev. of Economic Policy*. – 2007, v. 23(1). – pp. 45-62.
13. Audretsch D.B. Entrepreneurship capital and economic growth// *Oxford Review of Economic Policy*. – 2007, v. 23(1). – pp. 63-78
14. Acemoglu D. Directed technical change// *Rev. of Economic Studies*. – 2002, v. 69. – pp. 781-809.
15. Acemoglu D. Labor- and capital augmenting technical change// *J. of the European Economic Association*. – 2003, v. 1, n. 1. – pp. 1-37.
16. Klump R., McAdam P., Willman A. The long-term success of the neoclassical growth mode// *Oxford Rev. of Economic Policy*. 2007, v. 23(1). – pp. 94-114.
17. Matveenko V. On a dual representation of CRS function by use of Leontief functions// *Proceedings of the 1st International Conference on Mathematical Economics, Non-Smooth Analysis, and Informatics*. – Baku, Institute of Mathematics, 1997. – pp. 160-165.
18. Rubinov A.M., Glover B.M. Duality for increasing positively homogeneous functions and normal sets// *Operations Res*. – 1998, v. 12, n. 2. – pp. 105-123.
19. Jones C.J. The shape of production function and the direction of technical change// *Quarterly J. of Economics*. – 2005, v. 120, n. 2. – pp. 517-549.
20. Матвеевко В.Д. Теория экономического роста и динамика российской экономики// Теория представлений, динамические системы. XI. Специальный выпуск. Сборник работ под ред. А.М. Вершика. Записки научных семинаров ПОМИ. – 2004, т. 312. – с. 215-238.
21. Matveenko V.D. Economic growth theory and the dynamics of the Russian economy// *J. of Mathematical Sciences*. – 2006, v. 133, n. 4. – pp. 1491-1503.
22. Матвеевко В.Д. Инвестиции, институты и экономический рост: исследование на основе fK-модели// Конкурентность и модернизация экономики. Кн. 1. – М., Издат. Дом ГУ-ВШЭ, 2004. – с. 226-238.
23. Матвеевко В.Д. Ресурсозависимость и экономическое развитие: пример России// Реформирование общественного сектора. Поиск путей повышения эффективности. Материалы 7-й Международной конференции, Ч. 2. – СПб: Издат. Дом СПбГУ, 2005. – с. 109-142.
24. Seater J.J. Share-altering technical progress// Finley L.A., ed. *Focus on economic growth and productivity*. – New York, Nova Publishers, 2005.
25. Nelson R.R. What makes an economy productive and progressive? What are the needed institutions? Inaugural Vernon W. Ruttan Lecture on Science and Development Policy. – Rochester, University of Minnesota, 2006.
26. Rebelo S. The role of knowledge and capital in economic growth. Working Papers, No. 149 – Helsinki, World Institute for Development Economics Research (WIDER), 1998.
27. Lucas R. Why doesn't capital flow from rich to poor countries?// *American Economic Rev.* – 1990, v. 80, N. 2 – pp. 92-96.

**Матвеевко Владимир Дмитриевич.** Родился в 1955 году. Окончил Ленинградский государственный университет в 1977 году. Доктор физико-математических наук. Автор 70 печатных работ и 2 монографий. Область научных интересов: модели экономической динамики, динамическое программирование, макроэкономика. Ведущий научный сотрудник Санкт-Петербургского экономико-математического института РАН, профессор Европейского университета в Санкт-Петербурге.