

# Компьютерные комбинаторно-топологические построения и их преобразования

Г.Г.Рябов, В.А.Серов

**Аннотация.** В настоящее время в области использования компьютерных геометрико-топологических структур сошлились интересы таких областей, как теоретическая физика, компьютерное зрение, моделирование химического и биологического синтеза на молекулярном уровне, нанотехнологии и других. С другой стороны, насущные задачи развития самих компьютерных систем и управления ими (GRID-системы, системы клеточных автоматов и др.) требуют более глубокого понимания параллелизма и самоорганизации, во многом определяемых геометрико-топологическими структурами. Инструментальная система на базе моделей таких структур представлена в статье как вариант прототипа комбинаторного топологического процессора, который в качестве сопроцессора суперкомпьютера значительно расширяет вычислительные возможности.

## Введение

За последние три десятилетия в области компьютерного моделирования произошло беспрецедентное расширение фронта исследований дискретных геометрико-топологических структур. Такие структуры являются основой формирования среды для применения численных методов самого различного характера (поэтому часто используется термин «вычислительная среда»). Большое влияние на эти работы оказывают выдающиеся достижения в математике XX века, непосредственно связанные с топологией, геометрией и алгеброй, широкое освещение которых дано в [5].

Тем не менее представляется, что один из определяющих рычагов современного научно-технического прогресса - вычислительная математика и техника - еще недостаточно испытал на себе влияние столь фундаментальных достижений, несмотря на широкое использование сеточных методов и богатый набор методов решения задач на графах.

При всем разнообразии проблем, решаемых в этой области, следует отметить черты, имеющие общий характер.

1. Для больших научно-технических проектов (климатический прогноз, аэродинамика летательных аппаратов, томографические задачи, конструирование новых лекарств и т.д.) размеры сеток, кубических комплексов и других геометрически-топологических структур в настоящее время достигают диапазона  $10^8$ - $10^9$ . Но уже сейчас актуален диапазон  $10^{10}$ - $10^{12}$ .

2. В самих структурах возрастает необходимость учета все большего числа особенностей геометрико-топологического характера.

3. В ряде случаев требуются оперативные (часто в процессе непосредственного компьютерного моделирования) преобразования структур с сохранением определенных инвариантов (в общем случае, управление изменениями некоторых характеристик).

Таким образом, создание и пополнение эффективных инструментальных средств на компьютерах, реализующих геометрико-топо-

логические построения, с возможным последующим использованием методов и операций для аппаратной реализации, является сегодня одной из самых актуальных задач.

Основная цель данной статьи - рассмотреть вариант методики создания таких инструментальных средств не с точки зрения максимального охвата возможных построений, а с точки зрения сочетания точной компьютерной интерпретации фундаментальных понятий и методов и использования свойств симметрии (в самом широком понимании) для организации представления, хранения и преобразований соответствующих данных в компьютере. Хотя предлагаемый инструментальный комплекс носит экспериментальный характер и принятые ограничения при построении моделей весьма значительны, однако узловые вопросы «вложения» в компьютер в первую очередь интерпретации генерации и преобразования геометрико-топологических структур на этом фоне будут выглядеть достаточно рельефно.

### Близкие по идеологии работы

Работы в указанной области и соответствующие публикации исчисляются тысячами. Поэтому здесь мы ограничимся ссылками на работы, которые относятся к направлениям, получившим устойчивые названия «дискретная дифференциальная геометрия» и «двоичная геометрия и топология». К первому направлению относятся работы, проводимые во многих центрах, среди которых выделяются Калтех, МТИ, Лос-Аламос, ИММ РАН и другие ведущие центры, традиционно работающие в области математической физики. Ко второму направлению относятся работы, проводимые в десятках центров, организующим звеном которых является Университет в Окленде (Новая Зеландия). Их прежде всего характеризуют исследования геометрико-топологических форм изображений.

В целом излагаемый ниже подход ближе ко второму направлению и опирается на следующие результаты: аксиоматика *конечных топологий*, наиболее полно изложенная в [6], модели *глобальной полиэдризации* (триангуляции), предложенные в [10], модели и алгоритмы сжа-

тия (*скелетонирования*) [9], *метрические аппроксимации* на решеточных и клеточных структурах [11,17], синтез и преобразования *триангулированных и клеточных структур* [15], *вариационные методы на тетраэдральных структурах* [14], *звездные подразбиения и бизвездные преобразования* [13]. Фундаментальной основой данной работы в целом является труд Л.С. Понтрягина «Основы комбинаторной топологии»[1].

### Неформальные положения

Создание удобного «материала» для конструирования на компьютере геометрико-топологических структур можно грубо сравнить с использованием различных материалов и инструментов для ваения и зодчества. При этом физическая гибкость материала (глина, воск и т.п.) может и не быть определяющей при наличии специальных инструментов и навыков обработки более твердых материалов (гранит, мрамор). Аналогично и *кусочно-линейные структуры симплициальных комплексов*, несмотря на свою «негладкость», при наличии соответствующих инструментов преобразования и масштабируемости могут оказаться весьма эффективными для компьютерного использования. Более того, такие построения можно сравнить с «кристаллическими», поскольку симплексы на целых точках (вершинах) и примитивных (без внутренних целых точек) ребрах можно рассматривать как строительные кристаллы, а комплексы - как блоки, «цементирующие» такие кристаллы-кирпичи. От компьютерного представления, хранения и обработки этих конечных элементов в связи с общим комбинаторным характером задач во многом зависит эффективность применения инструментальных средств.

Саму генерацию структуры можно рассматривать как частный случай последовательных преобразований, управляемых по определенным правилам, и поэтому нужно четко описать критерии и элементы такого управления. В самом общем виде подразумевается управление преобразованиями с контролем над связностью и топологическими инвариантами (характеристика Эйлера-Пуанкаре и др.).

Часто важен учет определенных метрических соотношений в таких структурах для практических задач, в связи с чем возникает необходимость метрического инструмента в структурах-моделях невыпуклых фигур.

Существенным является также удобство операций с триангулированными структурами, связанными с огромным разнообразием прикладных задач.

Схему взаимодействия основных областей, привлекаемых к созданию инструментальных средств, можно условно представить в виде (Рис. 1).

Общую идеологию излагаемой инструментальной системы можно грубо описать следующим образом.

1. Комбинаторно-топологические построения реализуются на базе *симплициальных комплексов* с вершинами в *целых точках* и ребрами, соответствующими *примитивным векторам*. Производится предварительная полидризация (триангуляция) пространства.

Задание множества вершин на таком триангулированном пространстве определяет симплициальный геометрический комплекс (часто можно не задавать матрицы инцидентности, но они могут быть легко получены). При различной «окраске» вершин можно рассматривать несколько комплексов и их взаимное расположение. Линейные преобразования на базе *унимодулярных матриц* комплексов легко реализуются без вывода за рамки множеств целых точек и примитивных векторов. Основными элементарными преобразованиями топологического характера комплексов являются *расширение* и *сжатие* как присоединение или изъятие из комплекса вершины (а в нашей конструкции и соответствующих симплексов) с учетом связности и иных инвариантов. Основным (конечным) элементом анализа здесь является *звезда-комплекс* вершины-кандидата на



Рис. 1. Схема

присоединение или изъятие из комплекса. Предложен и реализован метод табличного хранения всех вариантов ответов на топологический анализ звезды-комплекса вершины. Управляемая последовательность по каким-либо критериям расширений (или сжатий) может быть во многих случаях (при отсутствии пересечений звезд-комплексов вершин) параллельно исполняемой.

2. Геометрия чисел. На базе целых точек  $\mathbf{Z}^n$  и примитивных ребер для каждой точки  $\mathbf{R}^n$  строится решеточный веер, аналог построения веера Фарея для  $\mathbf{R}^2$  из примитивных ребер, соответствующих *несократимым дробям* в *последовательности Фарея* [2,3]. На ребрах, порождающих веер, вводится метрика - для каждой пары целых точек расстояние между ними равно длине кратчайшего пути по ребрам веера (в случае преград этот путь обходит их). Разработан алгоритм построения веера (*веерная триангуляция*) по заданной относительной погрешности между длиной «реберной ломаной» и евклидовой длиной между целыми точками.

3. Алгебра. Во многих случаях используются свойства линейных преобразований, в том числе и определяемых целочисленными

унимодулярными матрицами (свойство сохранения объемов) [4].

Вариант генерации некоторого симплициального комплекса можно условно представить как последовательность следующих действий:

- задание (одного из набора) варианта триангуляции пространства (с определенным видом комплексов-звезд вершин);
- задание комплексов-запретов (преград), которые не могут быть включены в генерируемый комплекс;
- задание «затравки» в виде некоторого начального комплекса;
- задание функции управления расширением (сжатием), зависящей от метрических, объемных соотношений и режимов запрещения при этом склеек и разрывов или допущения их при определенной регламентации (например, по числу склеек).

Остановка процесса таких расширений и сжатий может быть задана различными критериями, такими, например, как достижение определенного объема или попадания некоторых метрических соотношений в заданную область. Возможна также остановка процесса по достижении «расширяющегося комплекса» границ общей модели.

### Цело-точечные триангуляции на плоскости

Этот раздел можно рассматривать как конструктивный и наглядный показ основных идей, развитие которых актуально для более высоких размерностей.

Пусть  $S \subset \mathbf{R}^2$ ,  $S = \{0 < x < m; 0 < y < n\}$ ;  $m, n \in \mathbf{Z}$ . Вершинами триангуляции служат целые точки  $(x) \in \mathbf{Z}^2 \cap S$ . Обозначим через  $U_p$  множество всех возможных ребер (отрезков), соединяю-

щих целые точки и соответствующих примитивным векторам с максимальным модулем координат  $\leq p$ .

Вектор с целочисленными координатами является примитивным, когда модули его координат есть взаимно простые числа. Отсюда следует, что ребра из  $U_p$  не содержат внутренних целых точек.

В дальнейшем в этом разделе рассматриваются триангуляции на множествах  $\mathbf{Z}^2$  и  $U_p$  для ограниченного  $S$ , которые обозначаются как  $T(S, U_p)$ . Решаются задачи:

1. генерации и преобразования триангуляций; классификации триангуляций;
2. триангуляции симплициальных комплексов;
3. преобразования симплициальных комплексов и управления преобразованиями.

Эти вопросы рассматриваются здесь с точки зрения возможной компьютеризации. Поэтому процесс триангуляции  $S$  может рассматриваться как последовательная процедура соединения пар целых точек (вершин триангуляции) из  $S$  ребрами из  $U_p$ . При этом: не допускаются пересечения ребер и процедура заканчивается, когда нельзя дополнительно провести ни одного ребра из  $U_p$  без пересечения уже проведенных.

Такая процедура всегда заканчивается, поскольку всегда есть возможность «добрать» концовку триангуляции на ребрах с длинами отрезков 1 и  $\sqrt{2}$ . На Рис. 2 (а) показана триангуляция для  $S(m=4, n=5)$  на ребрах  $U_3$ .

Рассмотрим два вида *перестроек* триангуляций - единичная *монотонно-убывающая* (M) и единичная *монотонно-возрастающая* (M+) [16].

В первом случае в конкретной  $T(S, U_p)$  отыскивается ребро с максимальным  $p$  (оно является большей диагональю в параллелограмме, об-

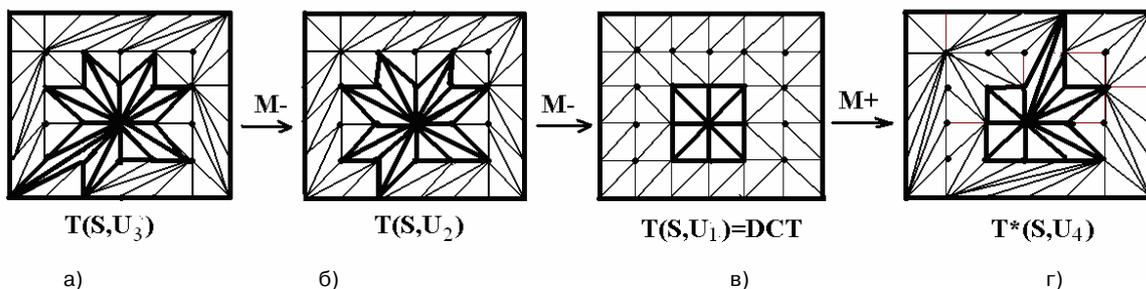


Рис.2. Триангуляция на плоскости (а) и M- и M+ перестройки (б, в, г)

разованном ребрами со строго меньшим  $p$ ) и заменяется на меньшее ребро (с меньшим  $p$ ) в этом параллелограмме. Такой параллелограмм всегда существует в силу единственности представления несократимых правильных дробей как медианной суммы соседних членов в последовательности Фарея [2,3].

Применяя последовательно такие  $M$ -преобразования, мы приходим к  $T(S, U_1)$ , когда все ребра будут иметь длину 1 или  $\sqrt{2}$  (Рис. 2 в):

$$T(S, U_p) \xrightarrow{M-} T(S, U_{p-1}) \rightarrow \dots \rightarrow T(S, U_1) \quad (1)$$

Такие триангуляции  $T(S, U_1)$  будем называть *диагонально-каноническими* (DCT) и каждой из них можно поставить в соответствие матрицу  $m \times n$  из нулей и единиц. Нулем обозначено одно направление диагонали в каждом квадрате, а единицей-ортогональное ему направление диагонали. Такой матрицей для  $T(S, U_p)$  на Рис.2 будет:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Число таких матриц для  $S(m \times n)$  равно  $2^{mn}$ .

Поскольку любую  $T(S, U_p)$  последовательно  $M$ -преобразования можно однозначно привести к некоторой  $T(S, U_1)$ , то матрица также определяется однозначно. Все  $T(S, U_p)$  с одной матрицей будем считать *одним классом*.

Единичная монотонно-возрастающая перестройка  $M+$  в параллелограмме заменяет меньшую диагональ на большую. Применяя последовательно  $M+$  преобразования, например, к  $T(S, U_1)$  из (1), из-за неоднозначности выбора параллелограммов получим последовательность триангуляций, отличную от (1):

$$T(S, U_1) \xrightarrow{M+} T^*(S, U_2) \rightarrow \dots \rightarrow T^*(S, U_p^*) \quad (2)$$

Процесс останавливается, когда в  $T^*(S, U_p^*)$  ребра всех параллелограммов достигают размера наименьшей диагонали. Такую триангуляцию считаем одной из тупиковых. Еще раз отметим, что эти преобразования не выводят из одного класса.

Таким образом, если требуется сгенерировать некоторую  $T(S, U_p)$  (естественно, с учетом допустимого заданного  $p$ ) и заданного класса с помощью заданной матрицы, то последовательность действий будет аналогична (2). Заметим, что классы обладают различными комбинаторными возможностями продвижения по цепочке  $M+$  преобразований. Так, если все строки и столбцы матрицы состоят из кодов 1010... или 0101..., то это уже тупиковая форма, не допускающая  $T(S, U_p)$  с  $p > 1$ .

Каждую  $T(S, U_p)$  можно рассматривать как геометрический симплицальный комплекс, и каждой внутренней точке  $x \in S$  соответствует *подкомплекс-звезда*  $star(x)$ , который является множеством всех треугольников (с их вершинами и сторонами), имеющих эту общую вершину. На Рис.2 показаны более жирными линиями звезды точки (3,2) при различных  $T(S, U_p)$ .

Среди множества всех диагонально-канонических триангуляций (DCT) возможны только 6 (с учетом поворотов и зеркальных отображений) неконгруэнтных типов звезд, которые состоят соответственно из 4,5,6,7 и 8 треугольников (Рис. 3) Заметим, что из них комбинаторно-неэквивалентны 5 типов, поскольку 3-й и 4-й типы бизвездно эквивалентны. Ниже на Рис. 3 показаны двойственные им многоугольники.

Среди DCT отметим те, которые для всех внутренних точек имеют один и тот же тип звезды. Такие DCT реализуются на типах  $St3$  или  $St4$ . Для  $St4$  такую триангуляцию естественно назвать *транслируемой* (совмещение звезд при любом параллельном переносе на целочисленный вектор), а для  $St3$  просто конгруэнтной. Возможны и другие периодические DCT на парах и тройках типов звезд, которые в данной статье не рассматриваются.

На  $T(S, U_p)$  как на комплексе можно задать подкомплекс через подмножество целых точек  $S_1 \subset S$ . В такой подкомплекс входят все ребра, инцидентные вершины которых в  $S_1$  и все треугольники, вершины и ребра которых вошли в подкомплекс. Целые точки из  $S_2 = S \setminus S_1$  также образуют подкомплекс. Обозначим соответствующие подкомплексы как  $K_1 = K(S_1)$  и  $K_2 = K(S_2)$ . Пусть  $K_1$  и  $K_2$  связные. Множество всех ребер  $U_p$  можно представить в виде:

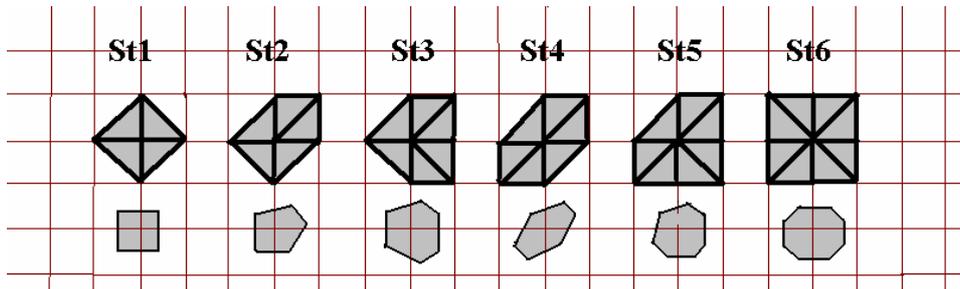


Рис. 3. Шесть неконгруэнтных типов звезд в DCT

$U_p = U_1 \cup U_2 \cup U_3$ , где  $U_1 \subset K_1$ ,  $U_2 \subset K_2$ .

$U_3$  - ребра, инцидентные вершины которых принадлежат разным подкомплексам. Такое множество ребер иногда называется водоразделом.

На образованной структуре можно задать единичные операции «расширения» (D+) и «сжатия» (C-). Расширение - добавление к множеству  $S_1$  одной целой точки  $x$  из  $S_2$  (расширение  $S_1$  и сжатие  $S_2$ ) такое, что сохраняется связность комплексов  $K_1^* = K(S_1 \cup x)$  и  $K_2^* = K(S_2 \setminus x)$ . Аналогична операция сжатия [16].

Поскольку нарушение связности (склейка или разрыв) может произойти только в  $star(x)$ , анализ корректности (в смысле сохранения связности) предполагаемого преобразования проводится только на элементах из  $star(x)$ . Алгоритмы такого анализа можно найти в [16]. Здесь лишь подчеркнем, что число различных вариантов расположения вершин из  $K_1$  и  $K_2$  в  $star(x)$  равно  $2^{r+1}$ , где  $r+1$  - число вершин в звезде. Поэтому для  $r < 30$  все варианты можно заранее просчитать и ответы о возможности преобразования без склеек и разрывов таблично задать в оперативной памяти современных desktop-компьютеров, не говоря уже о кластерных суперкомпьютерах.

На Рис. 4 показаны примеры единичного расширения-сжатия и последовательности таких расширений-сжатий, приводящей к ситуации, когда расширение  $K_1$  (темная окраска) дальше невозможно без разрыва  $K_2$ .

Выбор точек расширения и сжатия может определяться различными целевыми функциями, зависящими как от общих геометрических и топологических свойств «конструируемого» комплекса (полиэдра), так и от «локальных» конфигураций соседних звезд. Целевые функции,

опирающиеся на метрические соотношения для невыпуклых полиэдров, как правило, требуют более точной аппроксимации евклидовой метрики, нежели метрика на кратчайших путях, проходящих по ребрам триангуляций  $T(S, U_p)$ .

Общий подход к аппроксимациям такого рода состоит в рассмотрении более широкого набора примитивных векторов и построении на нем для каждой целой точки  $Z_2$  решетчатого веера. Для случая плоской решетки рассмотрим последовательности Фарея несократимых правильных дробей  $\Phi(k)$ . Каждой несократимой правильной дроби  $a/b$  поставим в соответствие вектор  $((0,0);(b,a))$ , который является примитивным с евклидовой длиной  $\sqrt{a^2 + b^2}$ . Тогда для заданного  $\Phi(k)$  и точки  $(0,0)$  векторы, соответствующие всем дробям из  $\Phi(k)$ , образуют в секторе  $(0; \pi/4)$  одну восьмую часть веера, которая естественными симметриями отображается на  $(0; 2\pi)$ . Объединение всех секторов есть все  $R^2$ , и веер считается полным. Распространив такое построение для каждой целой точки, можно рассматривать его как неориентированный граф со взвешенными (евклидовой длиной) ребрами. Расстояние между двумя целыми точками определяется, как кратчайший путь по взвешенным (евклидовой длиной) порождающим веер ребрам. В [12] показано, как с увеличением порядка  $k$  последовательностей Фарея длина ломаной (кратчайшего пути по ребрам веера) между двумя целыми точками стремится к евклидовой длине. Такой метод позволяет определить расстояния между целыми точками, когда запрещен проход отрезка евклидовой прямой между ними при наличии преграды, которая отображается как дефект в графе, образованном веерами.

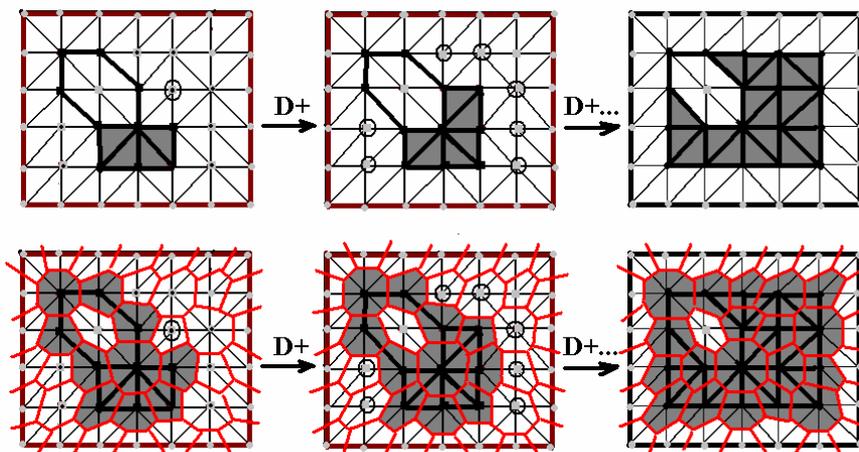


Рис 4. Результаты последовательного расширения «темного» комплекса (верхний ряд) и соответствующая картина в двойственных многоугольниках (нижний ряд)

## Более высокие размерности

**Триангуляции и звезды.** Роль диагонально-канонической триангуляции как исходной структуры, способной порождать процедурами перестроек, расширений и сжатий широкий набор триангуляций для случая **R2**, побуждает к попыткам экстраполяции этого подхода на более высокие размерности. Однако уже для **R3** возникают особенности, на которых следует остановиться.

Для **R2** звезду вершины в DCT можно рассматривать как объединение (стыковку) треугольников, образованных проведенными диагоналями в смежных квадратах. При этом для правильности расположения симплексов в комплексе требуется только правильное примыкание квадратов, имеющих общую эту точку.

Для **R3** кубы вокруг вершины звезды (как октанты в **R3**), поделенные диагоналями триангуляции, должны не только быть правильно триангулированы и не просто примыкать друг к другу квадратными гранями, но и иметь в них совпадающие диагонали.

Рассмотрим для единичного куба некоторый вариант проведения диагоналей в его гранях. Тогда каждой вершине поставим в соответствие число диагоналей, инцидентное ей. Такое число может принимать значения  $i=0,1,2,3$ . Если обозначить количество вершин с соответствующими значениями через  $z_0, z_1, z_2, z_3$ , то для них

должны быть выполнены следующие *диофантовы уравнения*:

$$\sum z_i = 8; \text{ (число вершин)}$$

$$\sum i z_i = 12; \text{ (число граней} \times 2).$$

Общее множество решений этой системы  $\{(0,6,0,2), (2,0,6,0), (1,3,3,1), (2,2,2,2), (0,4,4,0), (4,0,0,4)\}$ . Для всех решений, кроме  $(0,4,4,0)$ , существуют неконгруэнтные триангуляции куба. На Рис.4 показаны все пять типов неконгруэнтных триангуляций, четыре из которых являются комбинаторно-эквивалентными (6 составных тетраэдров, каждый объемом  $1/6$ ) и одна состоит из 5 тетраэдров (4 тетраэдра объемом  $1/6$  и один  $1/3$ ).

Любая звезда в DCT **R3** может быть правильным объединением только этих типов. Ряд полиэдров, соответствующих звездам триангуляций куба, представлен на Рис.4. Среди них третий и четвертый - невыпуклые.

Каноническая триангуляция куба во всех октантах порождает звезду-комплекс, которой соответствует кубододекаэдр, гомеоморфный ромбододекаэдру [16]. Для **R3** в инструментальной системе этот комплекс играет определяющую роль и его параметры, как полиэдра: имеют: вершин-15, ребер-50, граней-48, симплексов-24, объем-4, а как кубододекаэдра - вершин-14, ребер-36(24), граней 24(12). В скобках показаны числа без учета триангуляции граней-параллелограммов (Рис.5).

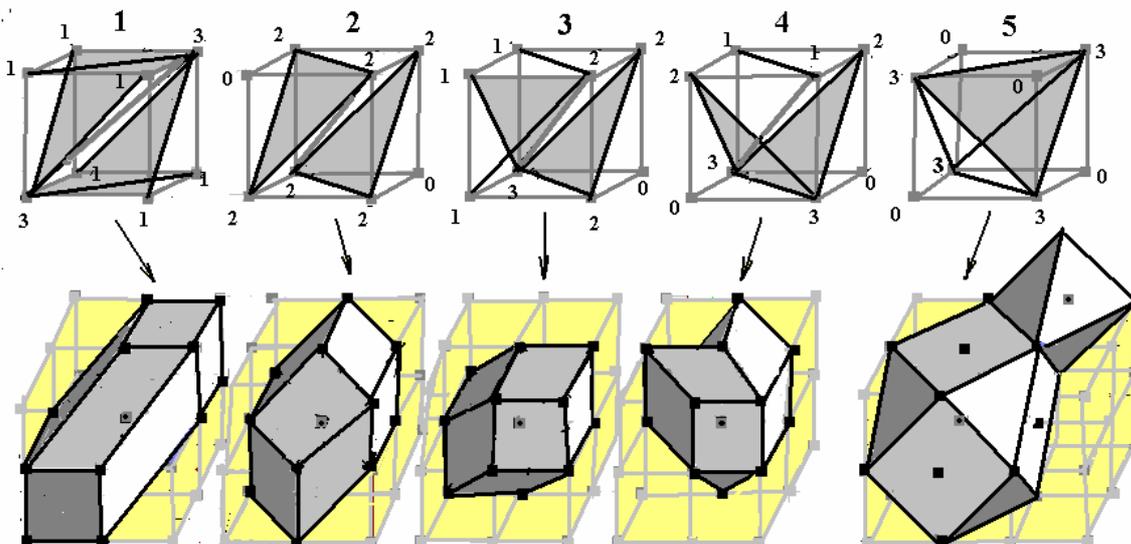


Рис.4. Неконгруэнтные триангуляции куба и соответствующие полиэдры звезд

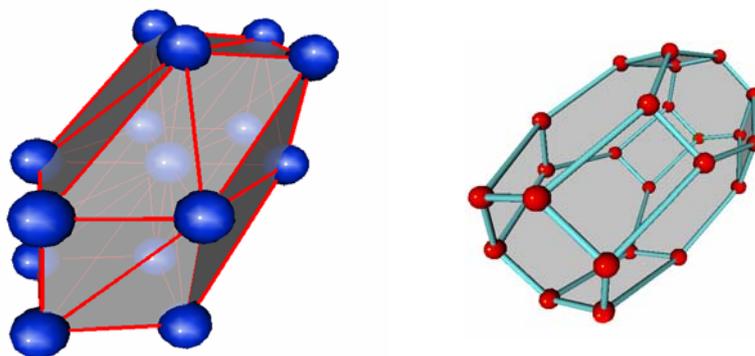


Рис.5. Кубододекаэдр, гомеоморфный ромбододекаэдру и двойственный ему многогранник, гомеоморфный усеченному октаэдру

Каноническая триангуляция куба, определяемая в некоторых работах и для более высоких размерностей как примитивная триангуляция [8] порождает на  $R^n$  звездчатую структуру, транслируемую на любой целочисленный вектор. Некоторые характеристики транслируемых звезд для ряда размерностей представлены в следующей таблице.

	2d	3d	4d	5d	6d
Число вершин	7	15	31	63	127
Число симплексов	6	24	132	960	8880

Примитивной триангуляция n-куба по определению [8] является тогда, когда все симплексы имеют объем, равный  $1/n!$ . Генерация

примитивной триангуляции  $R^n$  может основываться на предложенном в [8] методе путей симплексов, связывающем каждую подстановку из симметрической группы порядка n с конкретным симплексом на n-кубе. Так, для  $R^3$  ниже приведены соответствия между подстановками и множеством вершин соответствующих симплексов:

- $(1\ 2\ 3) \rightarrow (0,0,0);(1,0,0);(1,1,0);(1,1,1);$
- $(1\ 3\ 2) \rightarrow (0,0,0);(1,0,0);(1,0,1);(1,1,1);$
- $(2\ 1\ 3) \rightarrow (0,0,0);(0,1,0);(1,1,0);(1,1,1);$
- $(2\ 3\ 1) \rightarrow (0,0,0);(0,1,0);(0,1,1);(1,1,1);$
- $(3\ 1\ 2) \rightarrow (0,0,0);(0,0,1);(1,0,1);(1,1,1);$
- $(3\ 2\ 1) \rightarrow (0,0,0);(0,0,1);(0,1,1);(1,1,1).$

Другой способ основывается на отображениях n-куба с «большой» диагональю на себя

(проекции в подпространства, связанные с гранями всех размерностей куба) [20].

В нашем случае мы расширяем класс рассматриваемых триангуляций до триангуляций на примитивных векторах нормы  $r=1$ . Так, в пятом типе разбиения куба для **R3** не все объемы симплексов равны, поэтому он не подпадает под принятое определение примитивной триангуляции.

Для **R3** в инструментальной системе были выбраны триангуляции со звездами, соответствующими каноническому разбиению куба (1-ый тип) и 5-ому типу разбиения, полиэдры которых выпуклы и центрально симметричны.

### Кубические комплексы и триангуляции

Кубические комплексы с вершинами в целых точках и ребрами единичной длины часто используются для представления геометрико-топологических форм (или их фрагментов) в воксельном виде. В этом случае квадратные грани, лежащие на границах этих комплексов, образуют 2-многообразие. Проведение диагоналей в этих квадратах образует некоторую триангуляцию поверхности. На «плоских» участках (параллельных координатным плоскостям), состоящих из нескольких смежных квадратных граней, могут быть применены монотонные преобразования, описанные выше.

Рассмотрим следующую задачу. Пусть задан некоторый связный замкнутый кубический комплекс, граничные квадратные грани которого произвольно триангулированы диагоналями. Можно ли построить правильную 3d триангуляцию при любой такой поверхностной триангуляции?

На этот вопрос можно дать отрицательный ответ, т.к. выше было отмечено, что одному из решений системы диофантовых уравнений (0,4,4,0) и, следовательно, типу проведения диагоналей в гранях не соответствует никакая триангуляция куба на целых точках.

Однако для многих практически значимых типов кубических комплексов, когда в кубе на границе комплекса заданы диагонали лишь в трех (граничных) гранях, всегда есть способ задать при этих условиях правильную 3d триангуляцию для всего комплекса.

### Решеточный веер и евклидовы приближения

Изложение в этом разделе в основном опирается на понятия веера в **Rn**. Оно практически полностью заимствовано из [13]. Пусть **Rn**-евклидово пространство и **Zn**  $\in$  **Rn** – стандартная целочисленная решетка. Для набора векторов  $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \dots, \mathbf{l}_s \in \mathbf{Rn}$  определяется порожденный ими выпуклый многогранный конус  $\sigma$  как:

$$\Sigma = \{r_1 \mathbf{l}_1 + \dots + r_s \mathbf{l}_s \in \mathbf{Rn}; r_i > 0\}.$$

Выпуклый многогранный конус является выпуклым полиэдром и поэтому определены грани выпуклого многогранного конуса. Порождающие векторы в нашем случае примитивны, поэтому конус  $\sigma$  является рациональным, строго выпуклым. Веером  $\Sigma$  называется такой набор из конусов, что грань каждого конуса содержится в  $\Sigma$ , и пересечение любых двух конусов из  $\Sigma$  является гранью каждого из них. Веер  $\Sigma$  в **Rn** называется полным, если объединение всех конусов из  $\Sigma$  есть все **Rn**.

В каждом конусе полного веера кратчайший путь между вершиной конуса и целой точкой  $x$ , внутренней для многогранного угла при вершине конуса, по ребрам решетки порождающих векторов обозначим через  $L$ .

Определим относительную погрешность между длиной этого пути и евклидовым расстоянием между этими точками:

$$\Delta_i = L - L_e / L_e.$$

Тогда максимум этой величины по всем целым точкам  $x$ , внутренним для того же многогранного угла, можно определить как относительную погрешность для этого конуса.

$$\Delta(C) = \max_i \Delta_i.$$

Для каждого конуса эта погрешность может быть различной, поэтому для всего полного веера относительную погрешность определим как:

$$\Delta(\Sigma) = \max_c \Delta(C).$$

Задача состоит в том, чтобы построить набор порождающих векторов полного веера такой, что  $\Delta(\Sigma) < \Delta_0$ , где  $\Delta_0$  - заданная величина погрешности.

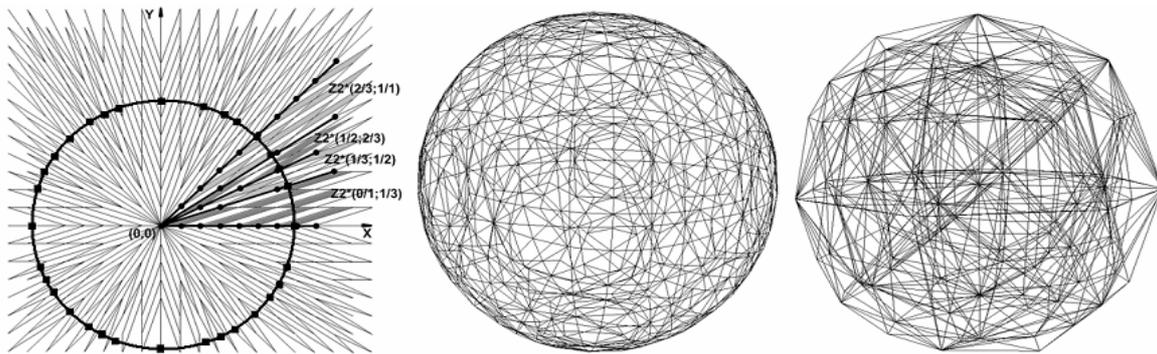


Рис.6. Решеточный 2d веер Фарея, проекции 3d веера на сферу и 4d веера внутрь шара

На основе итерационной процедуры над унимодулярными матрицами, строками которых являются порождающие (для конусов) примитивные векторы, в [19] построен алгоритм генерации такого набора. Так для **R3** итерационная процедура рассматривается вначале внутри трехгранного угла, образованного гранями, определяемыми тройками точек  $((0,0,0);(1,0,0);(1,1,0)); ((0,0,0);(1,0,0);(1,1,1)); ((0,0,0);(1,1,0);(1,1,1))$ , что соответствует 1/48 части сферы. Проекция этих граней на сфере с центром в  $(0,0,0)$  образуют сферический треугольник, которому соответствует матрица

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Если внутри этого угла  $\Delta(\Sigma) > \Delta_0$ , то происходит разбиение угла (максимальной стороны сферического треугольника). Складываются строки матрицы, относящиеся к этой стороне, в нашем случае 1-я и 3-я строки, образуя новую целую точку в веере  $(2,1,1)$ . В результате исходный треугольник разбит на два с соответствующими унимодулярными матрицами:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Разбиение продолжается до тех пор, пока не выполнится условие:  $\Delta(\Sigma) < \Delta_0$ . Затем полученное построение зеркальными отображениями и поворотами распространяется на всю сферу, т.е. образуется полный веер.

На Рис.6 показаны проекции ребер и граней конусов соответствующих полных вееров на

поверхность сферы (**R2,R3**) и внутрь шара для **R4** (для различных  $\Delta_0$ ).

### Инструментальная система

В инструментальной системе как в прототипе комбинаторного топологического процессора реализуются следующие основные макрооперации:

1. настройка системы по размерности (2d,3d,4d), размерам общей решетки и заданному типу звезды-полиэдра;
2. генерация решеточного веера по заданной погрешности  $\Delta$  [16];
3. отображения множества преград-дефектов в симплициально-решеточную модель;
4. прогон метрической волны -маркирование вершин при поиске кратчайших путей от множества-источника и построение *эквилистантного графа* (множество достижимых вершин с пометками и ребра, по которым реализуются кратчайшие пути до источника) [12];
5. сжатие и расширение симплициальных комплексов без нарушения связности по заданным условиям [14];
6. выделение триангулированной границы в симплициальном комплексе;
7. перевод данных в OpenGL и VRML для визуализации.

При использовании компьютеров desktop они должны удовлетворять следующим требованиям:

- допустимые размеры решеток до 200x200x200;
- за счет использования симметрий в памяти может храниться по одной копии симплициального комплекса (полиэдра) и 1/48-ой  $(1/2^3 3!)$  час-

ти решеточного веера (сокращение памяти для хранения по отношению к использованию вещественной арифметики более чем в 100 раз);

- за счет табличного хранения в оперативной памяти всех возможных ( $2^{14}=16\text{Кбит}$ ) ситуаций на границе полиэдра операция топологического анализа по связности выполняется за один такт (общее сокращение операций для 3d более 100 раз).

В качестве этюдного примера вариационной задачи рассмотрим следующую ее постановку: построить триангулированную сферу минимального радиуса как множество целых точек, удаленное на равное расстояние (с учетом обхода заданных преград) от заданного центра  $(x, y, z)$  при заданной  $\Delta$ -относительной погрешности отличия от евклидовой метрики и при условии, что на сфере нет элементов преград. При данной постановке выполняются последовательно все макрооперации топологического процессора 1-2-3-4-5-6-7. Для решетки  $50 \times 50 \times 50$ , центра  $(21, 18, 21)$  и двух преград-параллелепипедов на решение этой задачи на PC (Intel Celeron 2,66 GHz, 512 Mb RAM) потребовалось по макрооперациям: 1-3<0,01 с; 4-33с; 5-61с; 6-29 с; 7-1с. Один из возможных вариантов решения показан на Рис.7 а. На Рис.7 также показаны сгенерированные с помощью системы (расширение и сжатие при заданной целевой функции) структуры незамкнутого тора и приближения к минимальной поверхности Шварца.

## Заключение

Работа над симплициально-решеточными моделями в рамках инструментальной системы показала следующее.

1. При определенных допущениях возможно резкое сокращение памяти (примерно в 100 раз) для хранения геометрико-топологических структур такой же сложности.

2. При использовании примитивных и других транслируемых триангуляций за счет табличного хранения результатов топологического анализа комплекса-звезды компьютерное время при реализации преобразований может быть сокращено для 3d случая примерно в 100 раз (для более высоких размерностей еще больше).

3. Для суперкомпьютеров возможно глубокое распараллеливание счета при одновременной обработке непересекающихся комплексов.

4. Для ряда задач возможен подход к их решению как генерации на симплициальной решетке отметок о всех возможных метрических решениях и последующего топологически корректного «вырезания» одного из приемлемых решений (самоорганизация процесса решения) [18].

5. Целочисленные симплициально-решеточные модели естественно допускают дальнейшие произвольные линейные преобразования и использование более универсальных (но более емких по памяти) форм хранения и обработки данных.

В целом представляется, что микропроцессорная реализация комбинаторно-топологичес-

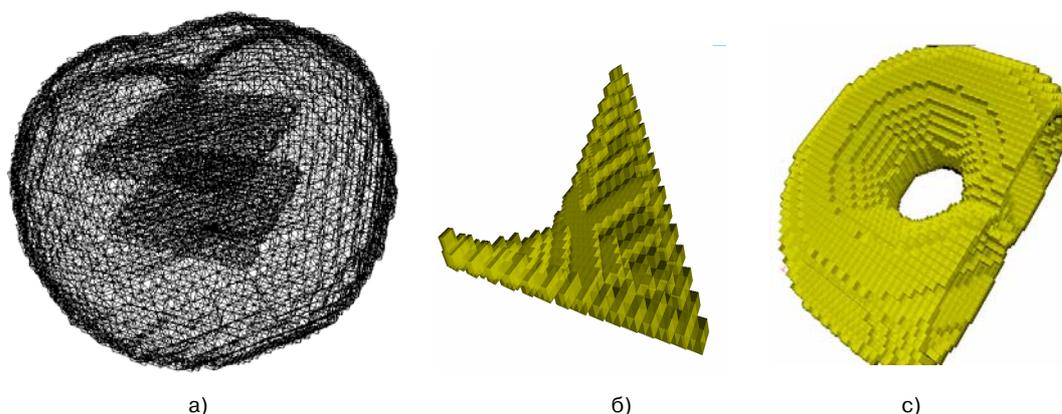


Рис.7. Триангулированная «сфера» с центром между прямоугольными преградами (а), приближение к поверхности Шварца (б), незамкнутый тор (с)

ких построений и преобразований (в качестве сопроцессора) поможет значительно расширить возможности современных суперкомпьютеров.

Авторы выражают благодарность Е.П. Велихову, Д.В. Аносову, Л.Н. Королеву, Б.Н. Четверушкину, Ю.М. Давыдову, А.В. Тихонравову, Г.И. Рузайкину, А.Н. Томилину за внимание и обсуждения изложенной выше тематики.

## Литература

1. Понтрягин Л.С. Основы комбинаторной топологии. М., Наука, 1974
2. Касселс Дж. Введение в геометрию чисел. М. Мир. 1965
3. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел. М. Мир. 1974
4. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. М., МГУ, 1999
5. Новиков С.П. Топология. Москва-Ижевск. РХД. 2002
6. Kovalevsky V.A. Finite topology as applied to image analysis // Computer Vision, Graphics and image Processing. 1989.46/141-161
7. Рябов Г.Г. Модели коммутационных свойств конструкций ЭВМ. М., ИТМ и ВТ, 1989
8. Steingrimsson E. Permutations Statistics of Indexed and Poset Permutations. Proc. MIT. 1992
9. Couprie M., Bertrand G. Simplicity surfaces: a new definition of surfaces in  $Z^3$ . // Proc. of SPIE. 1998.3454. 40-51
10. Kenmochi Y., Imiya A. Discrete polyhedrization of lattice point set // LNCS, Springer Berlin/Heidelberg. 2001/2243.150-167.
11. Strand R., Borgefors G. Weighted distance transforms for volume images digitized in elongated voxel grids // Pattern Recognition Letters. 2004.25, № 5.571-580
12. Рябов Г.Г. Маршрутизация на решетчато-клеточных структурах // Вычислительные методы и программирование. МГУ. 2004.3322.164-175.
13. В.М.Бухштабер, Т.Е.Панов. Торические действия в топологии и комбинаторике. М.МЦНМО 2004.
14. Alliez P., Cohen-Steiner D., Yvinec M., Desbrun M. Variational tetrahedral meshing // Proc. SIGGRAPH. 2005.24. №3. 617-625
15. Четверушкин Б.Н. и др. Пакет прикладных программ GIMM для решения задач гидродинамики на многопроцессорных вычислительных системах. // М. Математическое моделирование. т.17 №6 2005 58-74
16. Рябов Г.Г. Метрические и топологические волны на решетках. Изд. МГУ. 2005
17. Klette R., Li F. Shortest paths in a Cuboidal World // LNCS, Springer Berlin, Heidelberg. 2006.4040.415-429
18. Г.Г.Малинецкий. С.А.Науменко. Вычисления на ДНК. Эксперименты. Модели. Алгоритмы. Инструментальные средства. // Информационные технологии и вычислительные системы. №1, 2006, 5-27
19. Рябов Г.Г., Серов В.А. Отображения целочисленных множеств и евклидовы приближения // Вычислительные методы и программирование. МГУ 2007.т.8 №1, 10-19
20. Ryabov G. Serov V. Simplicial-Lattice Model and Metric-Topological Constructions. Proc. conf. Pattern Recognition and Information Processing –PRIP 2007, v.2.135-140.

**Рябов Геннадий Георгиевич.** Заведующий лабораторией методов компьютерной визуализации НИВЦ МГУ. Окончил мехмат МГУ. Профессор, член-корр. РАН, автор более 90 научных трудов. Область научных интересов - автоматизация проектирования вычислительных систем, компьютерные методы комбинаторной топологии, научно-техническая визуализация.

**Серов Владимир Александрович.** Научный сотрудник НИВЦ МГУ. Окончил МФТИ в 2003 г, автор 5 научных работ. Круг научных интересов - параллельные вычисления, научно-техническая визуализация.