

Методы адаптации фрактальных архитектур

А.С.Семенов

Аннотация. Решение задачи оптимизации фрактальных архитектур при ограничениях, накладываемых на потоковую нагрузку, может быть рассмотрено с точки зрения адаптации между различными классами фракталов, которые позволяют строить архитектуры минимальным перебором. Для решения задачи разработаны методы адаптации: один-к-одному и один-ко-многим. Адаптация определяется как отображение между фракталами на основе TL-системы и обратимой TL-1-системы, которая служит соответственно моделью эволюции и редукции исследуемых архитектур систем. На примерах показывается применение разработанных методов.

Введение

Создание самоорганизующихся информационных систем тесно связано с возможностью адаптации архитектур программного обеспечения (ПО) и архитектур вычислительных систем. На примере эволюции операционных систем (ОС) рассмотрим, как происходил процесс адаптации архитектур.

ОС стали неотъемлемыми элементами компьютеров и расширяют возможности аппаратуры по управлению ресурсами компьютера: оперативной памяти, процессора и т.д. При разделении ресурсов потребовалось обеспечить быстрое переключение процессора с одной программы на другую, а также надежно защитить коды и данные программ. С этой целью примерно в середине 60-х годов в процессорах появился привилегированный и пользовательский режимы работы, специальные регистры для быстрого переключения между программами, система прерываний, а также средства защиты оперативной памяти [1]. В свою очередь это повлияло на развитие архитектур ОС. Появились послойные и микроядерные архитектуры.

Получившая в конце 1980-х годов широкое распространение для организации компьютеров в сеть архитектура клиент-сервер повлияла на становление сервис-ориентированного подхода к

разработке ПО. Архитектуры операционных систем адаптировались к изменяющимся требованиям и стали включать в себя сервисы, необходимые для организации сетевых вычислений.

Сервис-ориентированная методология разработки информационных систем широко применяется в настоящее время.

Появление мультиядерных процессоров [2] является следствием не только стремления к увеличению производительности вычислительных систем, но также результатом развития архитектур сетевых ОС, ядро которых поддерживает мультипоточковые режимы. Такая адаптация стала возможной в результате аппаратного и технологического развития в разработке информационных и вычислительных систем.

Рассмотрение эволюции архитектур вычислительных и программных систем с точки зрения их взаимной адаптации делает актуальным применение архитектурно-ориентированного подхода [3] к разработке самоорганизующихся систем.

В основе архитектурно-ориентированного подхода лежит архитектурная модель: компоненты + коннекторы = конфигурации. Архитектурная модель может быть расширена [4] и представлена в виде коммуникационной модели (модели соединения коннекторов) и модели репозитория компонент. В репозитории хранятся компоненты, которые соединяются в соот-

ветствии с выбранной коммуникационной моделью, формируя заданную конфигурацию.

Модель фрактоида [5-7] дополняет архитектурную модель динамикой и позволяет рассмотреть методы автоматической (без контроля программиста) адаптации как отображения между фрактоидами, построенными на основе одной числовой последовательности и единого алгоритма, но отличающимися оператором композиции. Такие фрактоиды названы в работе гомеоморфными. Методы адаптации гомеоморфных фрактоидов являются составной частью решения задачи о структурной динамике сети при ограниченной пропускной способности [8].

Работа состоит из трех разделов.

В первом разделе дается постановка задачи адаптации архитектуры ПО к топологии вычислительной системы: логическая сеть процессов адаптируется к физической сети процессоров. Дается определение мира фрактоидов, в котором все сущности, в том числе рассматриваемые сети, являются фрактоидами. Введены два метода адаптации для сетей с одинаковым количеством вершин: один-к-одному и один-ко-многим. Показывается сопряжение адаптации фрактоидов с оператором сдвига фрактальной алгебры. Дается определение обратимой TL^{-1} – системы.

Во втором разделе вводятся определения и приводятся алгоритмы и примеры построения гомеоморфных (подобных) фрактоидов на основе числового ряда 2^n : линейного массива, решетки и правильного гиперкуба.

В третьем разделе приведены примеры адаптации фрактоидов методами один-к-одному и один-ко-многим для линейного массива и правильного гиперкуба. Линейный массив размечается бинарным кодом, а гиперкуб кодом Грея.

Разработанные методы адаптации ориентированы на применение в самоорганизующихся вычислительных комплексах.

1. Сопряженность отображения адаптации с оператором сдвига

Под топологией вычислительных систем понимают способ соединения процессорных узлов между собой каналами передачи. Регулярные топологии вычислительных систем:

линейные массивы, двумерные решетки, n -мерные торы, гиперкубы и k - n решетки.

Рассмотрим отображение процесс-процессор между решеткой, состоящей из 8 процессоров, пронумерованной от 1 до 8 (Рис.1.a), и решеткой из 8 процессов, реализующих некоторый сценарий, помеченной от 'a' до 'h' (Рис.1.b). Будем считать, что при выполнении сценария не возникает переполнения коммуникаций и время, затрачиваемое на коммуникацию каналов между процессами выше, чем между процессорами. Будем различать два вида отображения: один-к-одному (1:1) и один-ко-многим (1:N).

При отображении один-к-одному единственный линк между процессорами соответствует единственному коммуникационному каналу между процессами Рис.1 с. При отображении один-ко-многим процессы отображаются произвольно в процессоры. В этом случае решетка процессоров несет до пяти коммуникационных каналов процессов (Рис.1 d., линк 1-5), что влияет на увеличение времени коммуникации.

Однако рассмотренные топологии являются статическими. Модель фрактоида позволяет определить их динамические аналоги.

Линки между процессами и коммуникационные каналы между процессами, согласно архитектурной модели [3,4], моделируются коннекторами Ct , где Ct - множество контейнеров, узлы решеток Cm - множеством компонент.

Соответственно $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}^n(p, S^n, e_{\mathcal{K}})$ и $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}^n(p, S^n, e_{\mathcal{P}})$ – фрактоид-решетка процессоров и фрактоид-решетка процессов. Фрактоиды моделируют эволюцию сетей, описываемых компонентами и коннекторами. Будем рассматривать все существующие сущности как элементы мира фрактоидов, что позволяет рассмотреть процесс адаптации как адаптацию между фрактоидами и использовать для этих целей фрактальную алгебру.

Определение 1. Мир фрактоидов \mathcal{F} - конечное множество всех существующих фрактоидов $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_{\mathcal{K}}, \dots, \mathcal{F}_{\mathcal{N}}\}$.

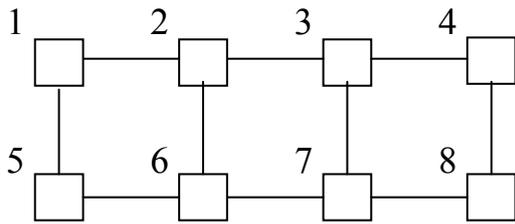
Определение 2. Уникально обратимая система итерированных операторов $S = \{\Xi \mid \rho_1, \dots, \rho_k\}$ называется фрактальной алгеброй, где ρ_1, \dots, ρ_k – множество уникально обратимых операторов сдвига \llcorner_n , разбиения \div , композиции $+$ и прототипирования \equiv [5,7].

Разреженность $Grid = F_{\mathcal{R}}^n - F_{\mathcal{P}}^n$ отражает использование компонент в объемлющих фрактоидах и характеризует вид отображения между ними. Будем различать разреженность для компонент $Grid_{Cm}$ и коннекторов $Grid_{Ct}$, в соответствии с указанным индексом.

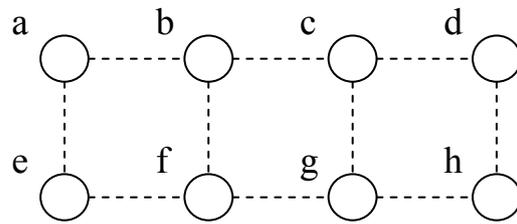
Определение 3. Если каждая компонента фрактоида из множества $Cm_{\mathcal{P}} \in \mathcal{P}_{\mathcal{P}}$ отображается в компоненту фрактоида из множества $Cm_{\mathcal{R}} \in \mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ и каждый коннектор из множества $Ct_{\mathcal{P}} \in \mathcal{P}_{\mathcal{P}}$ в кон-

нектор $Ct_{\mathcal{R}} \in \mathcal{P}_{\mathcal{R}}$. $Grid = F_{\mathcal{R}}^n - F_{\mathcal{P}}^n = 0$, $Grid_{Cm} = Cm_{\mathcal{R}} - Cm_{\mathcal{P}} = 0$, $Grid_{Ct} = Ct_{\mathcal{R}} - Ct_{\mathcal{P}} = 0$, (Рис.1 с.), то это отображение один-к-одному (1:1).

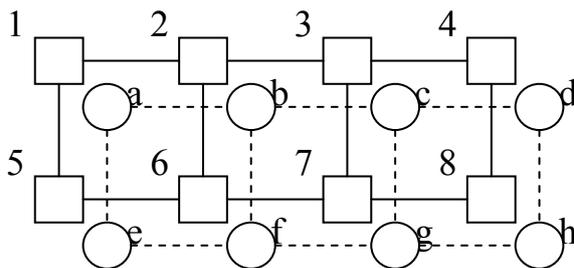
Определение 4. Если каждая компонента фрактоида из множества $Cm_{\mathcal{P}} \in \mathcal{P}_{\mathcal{P}}$ отображается в компоненту из множества $Cm_{\mathcal{R}} \in \mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ и N коннекторов из множества $Ct_{\mathcal{P}} \in \mathcal{P}_{\mathcal{P}}$ в один коннектор $Ct_{\mathcal{R}} \in \mathcal{P}_{\mathcal{R}}$, $Grid = 0$, $Grid_{Cm} = 0$, $Grid_{Ct} = Ct_{\mathcal{R}} - Ct_{\mathcal{P}} < 0$, (Рис.1.d.), то это отображение коннекторов один-ко-многим (1:N).



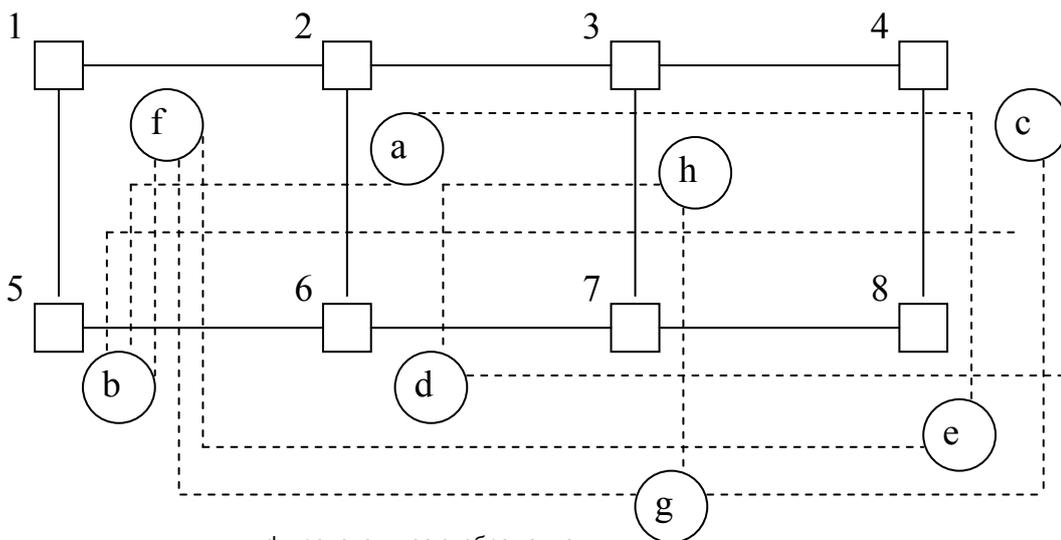
а. решетка процессоров 2x4



б. решетка процессов 2x4



с. отображение 1:1



д. произвольное отображение

Рис. 1. Отображение процесс-процессор

При $Grid_{Cm} > 0$ разреженный фрактоид $\mathcal{F}_\Phi \subset \mathcal{F}_\mathcal{R}$ отображается в объемлющий, при $Grid_{Cm} < 0$ объемлющий фрактоид отображается в разреженный $\mathcal{F}_\mathcal{R} \subset \mathcal{F}_\Phi$. Разреженные фрактоиды с $Grid_{Ct} > 0$, по производительности эквивалентны объемлющим. $Grid_{Cm}$ и $Grid_{Ct}$ задают ограничения на отображение.

Рассмотрим отображения 1:1 и 1:N. Для отображения Рис. 1.d процесс-процессор $Grid_{Cm} = 0$, $0 \geq Grid_{Ct} \geq -4$.

Определение 5. Адаптация $\mathcal{A}: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ в мире фрактоидов – отображение между фрактоидами.

Теорема 1. Оператор сдвига $\llcorner_n: \Xi \rightarrow \Xi$ отображает фрактоид \mathcal{F}_m в \mathcal{F}_l один-к-одному 1:1, если фрактоиды имеют подобные \mathcal{TL} – системы и равные начальные условия.

Доказательство. Построим образец e_l и e_m в структурном пространстве Ξ . Пусть $p^0 = ct_1$, $ct_1 \in Ct$ – множество контейнеров, моделирующих коннекторы. Выполним два шага разбиения:

$$\begin{aligned} p^0 &= ct_1 \\ p^1 &= p^0 \div 2 = p^{1_1} \cup p^{1_2} \\ p^2 &= p^{1_1} \div 2 \cup p^{1_2} \div 2 = \\ &= p^{1_1} p^{2_1} \cup p^{1_1} p^{2_2} \cup p^{1_2} p^{2_1} \cup p^{1_2} p^{2_2} \end{aligned}$$

Пусть $e_l = p^{1_1} p^{2_1} \cup p^{1_1} p^{2_2}$, $e_m = p^{1_2} p^{2_1} \cup p^{1_2} p^{2_2}$. На Рис. 2 для образцов e_l и e_m пунктирной линией показан коннектор, компоненты изображены квадратом.

Известно, что для подобных \mathcal{TL} – систем степень разреженности $Grid = \mathcal{F}_l - \mathcal{F}_m$, инвариантна при одновременном изменении размерности n [7]. Поэтому достаточно показать, что отображение между образцами e_l и e_m , задающими равные начальные условия, – есть отображение 1:1.

Образцы e_l и e_m подобны, что следует из результата оператора разбиения \div , тогда результат выполнения оператора сдвига $e_l \llcorner_1 e_m$, т.е. каждой компоненте и коннектору из e_m есть однозначное соответствие в e_l .

Следствие 1. Между решетками фрактоидов процессора $\mathcal{F}_\mathcal{R}(p, S, e_\mathcal{R})$ и процесса $\mathcal{F}_\Phi(p, S, e_\Phi)$ (Рис.1) существует отображение 1:1, $Grid = 0$, если их \mathcal{TL} – системы подобны и начальные условия равны.

Как будет показано далее, для адаптации фрактоидов важен не только механизм развития, но и механизм редукции. Обратимая \mathcal{TL}^{-1} – система позволяет динамически моделировать редукцию архитектуры системы.

Определение 6. Обратимая \mathcal{TL}^{-1} – система $\mathcal{TL}^{-1} = (\mathcal{V}, \mathcal{U}^{-1}, \mathcal{P}^{-1}, \mathcal{A}, \mathcal{T}^{-1})$ для $\mathcal{TL} = (\mathcal{V}, \mathcal{U}, \mathcal{P}, \mathcal{A}, \mathcal{T})$ определяет:

\mathcal{P}^{-1} – конечное множество обратимых правил $\{p^{-1_1}, p^{-1_2}, \dots, p^{-1_n}\}$ такое, что каждому обратимому правилу $p^{-1_i} \in \mathcal{P}^{-1}$ соответствует правило $p_i \in \mathcal{P}$, если вместо продукции \rightarrow подставлено

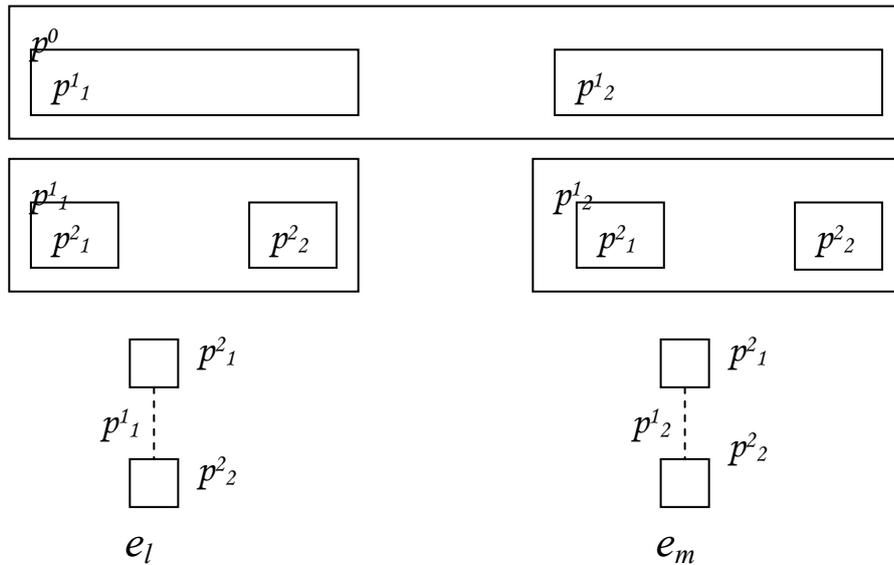


Рис.2. Построение образцов e_l и e_m в структурном пространстве

присвоение \leftarrow . Например, для правила $G \rightarrow CG$ обратимое правило $G \leftarrow CG$.

\mathcal{T}^{-1} - конечное множество обратимых шаблонов $\{t^{-1}_1, t^{-1}_2, \dots, t^{-1}_k\}$ такое, что каждому шаблону $t_j \in \mathcal{T}$ соответствует обратимый шаблон $t^{-1}_j \in \mathcal{T}^{-1}$, если вместо терминальных символов шаблона \mathcal{U} подставлены символы обратимых операторов фрактальной алгебры \mathcal{U}^{-1} .

Например, задан шаблон t_j для построения фрактоида \mathcal{F}_Q гиперкуба $Q_n = Q_{n-1} + Q_{n-1}$. Обратимый шаблон t_j^{-1} имеет вид $Q_{n-1} = Q_n \div \beta_n$.

Определение 7. Отображение \mathcal{A} , действующее на \mathcal{F} , сопряжено по отношению к оператору сдвига \ll , действующему на структурное пространство Ξ , если существует гомеоморфизм (подобие) \mathcal{TL} , то есть взаимно однозначное бинепрерывное отображение \mathcal{TL} из \mathcal{F} в Ξ , при $Grid_{cm} = 0$, такое, что приведенная ниже диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{\mathcal{A}} & \mathcal{F} \\ \mathcal{TL} \downarrow & & \downarrow \mathcal{TL} \\ \Xi & \xrightarrow{\gg} & \Xi \end{array}$$

Это означает, что $\gg \circ \mathcal{TL}(\mathcal{F}) = \mathcal{TL} \circ \mathcal{A}(\mathcal{F})$ для всех $\mathcal{F} \in \mathcal{F}$. Заменяем правый сдвиг левым, $\mathcal{A}(\mathcal{F}) = \mathcal{TL}(\mathcal{F}) \circ \ll \circ \mathcal{TL}^{-1}$, где \mathcal{TL}^{-1} - обратимая \mathcal{TL} -система. Фрактоиды, построенные гомеоморфными \mathcal{TL} -системами, гомеоморфны.

2. Построение гомеоморфных фрактоидов

Определим гомеоморфные фрактоиды: линейный массив, решетку и гиперкуб как фрактоиды с подобными \mathcal{TL} -системами (и обратной \mathcal{TL}^{-1} - системой), основывающиеся на едином числовом ряде.

Теорема 2. Гомеоморфные фрактоиды: решетка, линейный массив и гиперкуб основываются на едином числовом ряде, а подобные \mathcal{TL} - системы отличаются только оператором композиции $+$.

Доказательство. Рассмотрим числовой ряд 2^n . Из теоремы 1 следует, что если подобные \mathcal{TL} -системы имеют равные начальные условия, то между ними отображение 1:1, а образцы e_p (Рис. 3) подобны $e_p = \mathcal{M}_1 = \mathcal{L}_1 = \mathcal{Q}_1$. Фрактоиды размера n , при равных начальных условиях, имеют равное количество компонент $Grid = 0$.

Следовательно, для построения разных структур должны быть использованы разные правила соединения компонент оператором композиции $+$.

Следствие 2. Правила соединения компонент коннекторами при выполнении оператора композиции $+$ зависят от вида фрактоида. Фрактоиды размера n , для числового ряда 2^n , имеют количество компонент $k \times m = 2^n$, где k - количество коннекторов оператора композиции $+$, $m = 2^n / k$.

Определение 8. Оператор композиции $+$ фрактоида $\mathcal{F}^{k \times m}$ соединяет слоем бисекции β_n на шаге n соответствующие компоненты k коннекторами, $k = |\beta_n|$. Для линейного массива $k = 1 = |\beta_n|$ и решетки $2 \times 2^{n-1}$, $k=2=|\beta_n|$ слой бисекции инвариантен к n . Для гиперкуба $k=2^{n-1}=|\beta_n|$.

При построении фрактоидов в структурном пространстве Ξ слой бисекции β_n на шаге n соединяет самоподобные компактные подмножества. $\beta_n \subset Ct$ - множество коннекторов, $\beta_n \neq \emptyset$. Соединение осуществляется при выполнении операции композиции $+$ так, что $p_i + p_j = p_i \cup \beta_n \cup p_j = p_n$.

Определение 9. Гомеоморфный фрактоид $\mathcal{F}_M 2 \times 2^{n-1}(\mathcal{M}, S^n, e_p)$ решетки \mathcal{M} , $n \geq 1$, строится системой S^n с n шагами итерации из образца e_p . Образец $e_p = e_l = e_m$ (Рис. 2).

На Рис. 3 а. компоненты изображены квадратами, коннектор - штрих-пунктирной линией. Фрактоид $\mathcal{F}_M 2 \times 2^{n-1}$, при $n=2$, получен композицией 2-х соответствующих компонент. Образец e_l прототипируется в \mathcal{P}_1 , затем $\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_1 + \mathcal{P}_1$, $n=2$, $k=2$, $m=2$, $k \times m = 2 \times 2^{n-1} = 4$.

Определение 10. Гомеоморфный фрактоид $\mathcal{F}_L 1 \times 2^n(\mathcal{L}, S^n, e_p)$ линейного массива \mathcal{L} , $n \geq 1$, строится системой S^n с n шагами итерации из образца e_p . Образец $e_p = e_l = e_m$. Фрактоид $\mathcal{F}_L 1 \times 2^n$, при $n=2$, получен композицией одной соответствующей компоненты. Образец e_l прототипируется в \mathcal{P}_1 , затем $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1 + \mathcal{P}_1$, $n=2$, $k=1$, $m=4$, $k \times m = 1 \times 2^n = 4$.

Определение 11. Гомеоморфный фрактоид $\mathcal{F}_Q 2^{n-1} \times 2(Q, S^n, e_p)$ n -мерного гиперкуба Q , $n \geq 1$, строится системой S^n с n шагами итерации из образца e_p . Образец $e_p = e_l = e_m$. Фрактоид $\mathcal{F}_Q 2^{n-1} \times 2$, при $n=2$, получен композицией 2-х соответствующих компонент. Образец e_l прототипируется в \mathcal{P}_1 , затем $\mathcal{Q}_2 = \mathcal{Q}_1 + \mathcal{P}_1$, $n=2$, $k=2$, $m=2$, $k \times m = 2^{n-1} \times 2 = 4$.

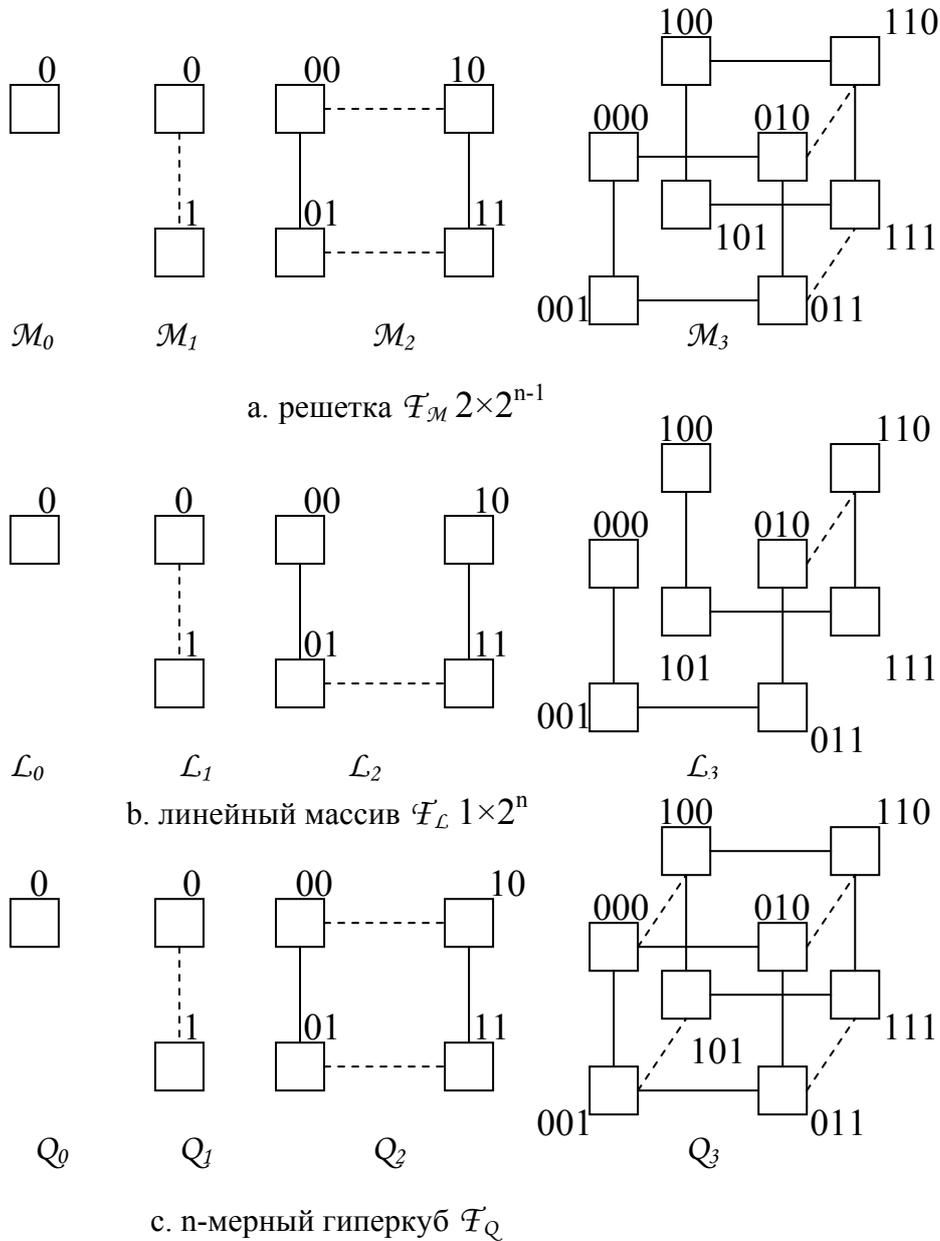


Рис.3. Построение гомеоморфных фрактоидов

Система S^n гомеоморфных фрактоидов $\mathcal{F}k \times m$ (C, S, e_p) включает \mathcal{TL} - и обратимую \mathcal{TL}^{-1} систем:

$\mathcal{TL} = (\mathcal{V}, \mathcal{U}, \mathcal{P}, \mathcal{A}, \mathcal{T}) = (\{G, C\}, \{+, ""\}, \{G \rightarrow GC, C \rightarrow GC\}, \{axiom_0 = "", axiom_1 = G, axiom_2 = C, axiom_3 = e_p\}, \{template = axiom_1 + axiom_2\})$

Алгоритм 1. Построение $\mathcal{F} k \times m$ (C, S, e_p) : строки, объектной структуры, размеченной кодом Грея, графа (Рис. 3).

Вход:

$axiom_0 = ""$ – ставим в соответствие S_0

$axiom_1 = G$

$axiom_2 = C$

$template = (axiom_1 + axiom_2)$ – слово, порожа-

емое правилами грамматики

$\mathcal{P} = \{G \rightarrow GC, C \rightarrow GC\}$ – правила грамматики

$axiom_3 = e_p$ – образец

Выход:

C – размеченная объектная структура и ее граф
word

Инициализация:

level=3 – размерность C_n - 3 для Рис. 3

word = template

$n = 1 - L(word) = 1$ - значение слова от терминала
слева

$C_n = axiom_3$

Шаги:

for $i=2$ to level – построить объектную структуру
размерности level

$n = i$ – размер фрактоида соответствует $L(word)$

$\mathcal{P}_{n-1} \equiv C_{n-1}$ – прототипировать C_{n-1} в образце \mathcal{P}_{n-1}

$M(C_n) = (M(C_{n-1}) \ll \ll^{n_0}) +^k (M(\mathcal{P}_{n-1}) \ll \ll^{n_1})$

– разметить и соединить k соответствующих
компонент

rule(word) – сгенерировать следующее слово

end for

$\mathcal{T}L^{-1} = (\mathcal{V}, \mathcal{U}, \mathcal{P}^1, \mathcal{A}, \mathcal{T}^1) = (\{G, C\}, \{\div, "\}, \{G \leftarrow GC, C \leftarrow GC\}, \{axiom_0 = "\}, axiom_1 = G, axiom_2 = C, axiom_3 = e_p, axiom_4 = C_n\}, \{template^1 = axiom_1 +^1 axiom_2\})$

Алгоритм 2. Редукция $\mathcal{F} k \times m (C, S, e_p)$: строки, объектной структуры, размеченной кодом Грея, графа (Рис. 3).

Вход:

$axiom_0 = "$ – ставим в соответствие C_0

$axiom_1 = L(word)$ – левая часть слова от терминала

$axiom_2 = R(word)$ – правая часть слова от терминала

template¹ = ($axiom_1 +^{-1} axiom_2$) – слово, порождаемое обратимым оператором композиции

$\mathcal{P}^1 = \{G \leftarrow GC, C \leftarrow GC\}$ – обратимые правила грамматики

Выход:

C_n – размеченная объектная структура и ее граф

Инициализация:

level – требуемая размерность C_n , level ≥ 2

word⁻¹ = word

$C_n = axiom_4$

n – размерность объекта, $n \geq level$

Шаги:

for n reverse to level – декрементный цикл по n

rule(word⁻¹) – получить предыдущее слово

$C_{n-1} = C_n +^{-1k} C_{n-1}$ – редукция объекта, используется обратимый оператор композиции

$(M(C_{n-1}) \ll \ll^n)$ – сделать разметку в соответствии с размерностью n
end for

3. Методы адаптации:

один-к-одному и один-ко-многим

Рассмотрим два метода адаптации между гомеоморфными фрактоидами: один-к-одному и один-ко-многим для коннекторов. Будем полагать, что компоненты в этих двух методах отображаются 1:1.

Покажем сопряжение адаптации гомеоморфных фрактоидов с оператором сдвига, действующим на структурное пространство, примеры адаптации и построения фрактоидов из подфрактоидов.

Отображение один-к-одному. Отображение адаптации сопряжено с оператором сдвига. Представим алгоритм адаптации двух гомеоморфных фрактоидов следующим образом.

Алгоритм 3. Алгоритм адаптации гомеоморфных фрактоидов $\mathcal{F}_m k_1 \times m_1 (C_1, S_1, e_p) \in \mathcal{G}$ к $\mathcal{F}_l k_2 \times m_2 (C_2, S_2, e_p) \in \mathcal{G}$ использует сопряженность с оператором сдвига $\ll \ll$:

$$\mathcal{A}(\mathcal{F}_m) = \mathcal{T}L(\mathcal{F}_l) \circ \ll \ll \circ \mathcal{T}L^{-1}(\mathcal{F}_m),$$

где $\mathcal{T}L^{-1}(\mathcal{F}_m) = C_1$, $\mathcal{T}L(\mathcal{F}_l) = C_2$ (алгоритм 2), тогда $\mathcal{A}(\mathcal{F}_l) = C_2 \ll \ll C_1$ при равных начальных условиях (теорема 1), оператор сдвига $\ll \ll$ отображает фрактоид \mathcal{F}_m в \mathcal{F}_l один-к-одному 1:1.

Определение 12. Обратимое отображение \mathcal{A}^{-1} – это отображение такое, что, если $\mathcal{A}(\mathcal{F}_m) = \mathcal{T}L(\mathcal{F}_l) \circ \ll \ll \circ \mathcal{T}L^{-1}(\mathcal{F}_m)$, то $\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{F}_m) = \mathcal{T}L^{-1}(\mathcal{F}_l) \circ \ll \ll^{-1} \circ \mathcal{T}L(\mathcal{F}_m)$, где $\ll \ll^{-1}$ обратимый оператор сдвига, тогда $\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{F}_m) = \mathcal{T}L^{-1}(\mathcal{F}_m) \circ \ll \ll \circ \mathcal{T}L(\mathcal{F}_l)$

Если $\mathcal{T}L(\mathcal{F}_l) = e_p$ и $\mathcal{T}L^{-1}(\mathcal{F}_m) = e_p$, то $\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = e_p$, где e_p образец, задающий начальные условия гомеоморфных фрактоидов.

Рассмотрим примеры адаптации между гомеоморфными фрактоидами. Будем обозначать самоподобные множества (архитектуры): L – линейный массив, M – решетка, Q – куб, а также используем их в качестве индексов соответствующих фрактоидов.

Пример 1. Адаптировать \mathcal{A} : $\mathcal{F}_M 2 \times 2^{n-1} (M, S, e_p) \rightarrow \mathcal{F}_Q 2^{n-1} \times 2 (Q, S, e_p)$, при $n=3$ построить обратимое отображение \mathcal{A}^{-1} .

Шаг 1. Построить $\mathcal{F}_M 2 \times 4(\mathcal{M}, \mathcal{S}, e_p)$ и $\mathcal{F}_Q 4 \times 2(Q, \mathcal{S}, e_p)$ (алгоритм 1).

Шаг 2. $\mathcal{A}(\mathcal{F}_M) = \mathcal{TL}(\mathcal{F}_Q) \circ \ll \circ \mathcal{TL}^{-1}(\mathcal{F}_M)$, где $\mathcal{TL}^{-1}(\mathcal{F}_M) = \mathcal{M}_3$, $\mathcal{TL}(\mathcal{F}_Q) = \mathcal{Q}_3$, $\mathcal{A}(\mathcal{F}_M) = \mathcal{Q}_3 \ll \mathcal{M}_3$, $Grid_{ct} = 2$. На Рис. 4 толстой линией выделена решетка, встроенная в гиперкуб.

Шаг 3. $\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{F}_M) = \mathcal{TL}^{-1}(\mathcal{F}_Q) \circ \ll^{-1} \circ \mathcal{TL}^{-1}(\mathcal{F}_M) = \mathcal{M}_3 \ll \mathcal{Q}_3$, $Grid_{ct} = -2$.

Пример 2. Адаптировать $\mathcal{A}: \mathcal{F}_L 1 \times 2^n(\mathcal{L}, \mathcal{S}, e_p) \rightarrow \mathcal{F}_M 4 \times 2^{n-2}(\mathcal{M}, \mathcal{S}, e_p)$, $n=4$, построить обратимое отображение \mathcal{A}^{-1} .

Шаг 1. Для построения $\mathcal{F}_M 4 \times 2^{n-2}(\mathcal{M}, \mathcal{S}, e_p)$ построим образец $e_p = \mathcal{F}_M 2 \times 4(\mathcal{M}, \mathcal{S}, e_p)$ (Рис.3.а), затем фрактал $\mathcal{F}_M 4 \times 4(\mathcal{M}, \mathcal{S}, \mathcal{F}_M)$ (Рис.5 а). Построим $\mathcal{F}_L 1 \times 16(\mathcal{L}, \mathcal{S}, e_p)$ (Рис.5.б).

Шаг 2. $\mathcal{A}(\mathcal{F}_L) = \mathcal{TL}(\mathcal{F}_M) \circ \ll \circ \mathcal{TL}^{-1}(\mathcal{F}_L)$, где $\mathcal{TL}(\mathcal{F}_M) = \mathcal{M}_2$, $\mathcal{TL}^{-1}(\mathcal{F}_L) = \mathcal{L}_4$, (алгоритм 3), тогда $\mathcal{A}(\mathcal{F}_L) = \mathcal{M}_2 \ll \mathcal{L}_4$, $Grid_{ct} = 9$ (Рис. 5.с), толстой линией выделен линейный массив, встроенный в решетку.

Шаг 3. $\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{F}_L) = \mathcal{TL}^{-1}(\mathcal{F}_M) \circ \ll^{-1} \circ \mathcal{TL}^{-1}(\mathcal{F}_L) = \mathcal{L}_4 \ll \mathcal{M}_2$, $Grid_{ct} = -9$ (Рис. 5 d), толстые линии соответствуют коннекторам линейного массива, пунктирная линия – бисекция линейного массива на шаге 4, штрих-пунктирные линии – коннекторы решетки, отсутствующие в линейном массиве.

Теорема 3. Фрактал-решетка $\mathcal{F}_m 2 \times 2^{n-1}(\mathcal{M}, \mathcal{S}, e_p)$ с шириной слоя бисекции $\beta_w=2$ и $n \geq 4$ преобразуется в гомеоморфный фрактал решетку $\mathcal{F}_m 2^{n-2} \times 2^m(\mathcal{M}, \mathcal{S}, \mathcal{F}_m)$, где $m=2$, т.к. $2 \times 2^{n-1} = 2^{n-2} \times 2^2 = 2^n$,

с шириной слоя бисекции $\beta_w = 2^{n-1} \div 2 = 2^{n-2}$, эквивалентным количеством компонент и образцом, определяемым обратимой $\mathcal{TL}^{-1}(\mathcal{F}_m)$ системой, при $level = n-1$. Такой образец будем называть подфракталом.

Доказательство. $\mathcal{TL}^{-1}(\mathcal{F}_m)$ при $level = n-1$, $\mathcal{F}_m 2 \times 2^{n-2}(\mathcal{M}, \mathcal{S}, e_p)$. Пусть ширина слоя бисекции $\beta_w = 2^{n-2}$, тогда $\mathcal{F}_m 2^{n-2} \times 2(\mathcal{M}, \mathcal{S}, e_p)$ - фрактал с эквивалентным количеством компонент. Подставим его как образец в $\mathcal{F}_m 2^{n-2} \times 2^m(\mathcal{M}, \mathcal{S}, \mathcal{F}_m)$, где m -размер фрактала, при $m = 1$ – это образец. Так как $level = n-1$, то положим $m = 2$, тогда $\mathcal{F}_m 2^{n-2} \times 2^2(\mathcal{M}, \mathcal{S}, \mathcal{F}_m)$ имеет эквивалентное количество компонент, что и исходный фрактал.

Рассмотрим два примера применения теоремы 3.

Пример 3. Построить фрактал для примера 2, $\mathcal{F}_M 4 \times 2^{n-2}(\mathcal{M}, \mathcal{S}, e_p)$.

Представим фрактал как $\mathcal{F}_M 2^{n-2} \times 2^m(\mathcal{M}, \mathcal{S}, \mathcal{F}_m)$. Пусть ширина слоя бисекции $\beta_w = 2^{n-2} = 4$, $n=4$, $m = n-2=2$, тогда фрактал с эквивалентным количеством компонент $\mathcal{F}_M 2^{n-2} \times 2^2(\mathcal{M}, \mathcal{S}, e_p)$. Определим подфрактал: при $m = 1$, $n=4$, $e_p = \mathcal{F}_m 2 \times 2^{n-2}(\mathcal{M}, \mathcal{S}, e_p)$.

Пример 4. Преобразовать фрактал-решетку $\mathcal{F}_m 2 \times 8(\mathcal{M}, \mathcal{S}, e_p)$ (Рис.6 а) в фрактал-решетку с $\beta_w = 4$.

Пусть заданный фрактал-решетка $\mathcal{F}_m 2 \times 2^{n-1}(\mathcal{M}, \mathcal{S}, e_p)$ с $\beta_w=2$, $n = 4$, тогда $\mathcal{F}_m 2^{n-2} \times 2^m(\mathcal{M}, \mathcal{S}, \mathcal{F}_m)$ при $m=2$, где $\mathcal{F}_m 2^{n-2} \times 2(\mathcal{M}, \mathcal{S}, e_p)$ (Рис.6.б).

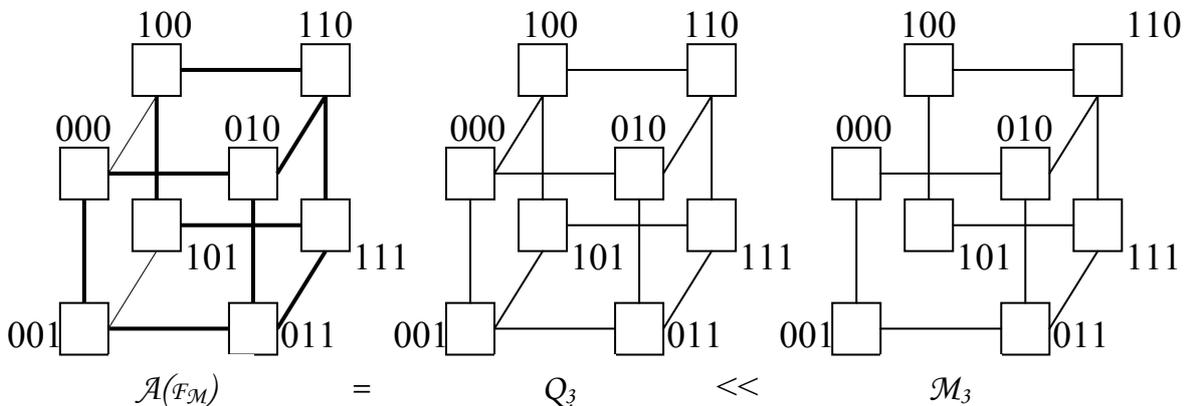


Рис .4. Адаптация между гомеоморфными фракталами

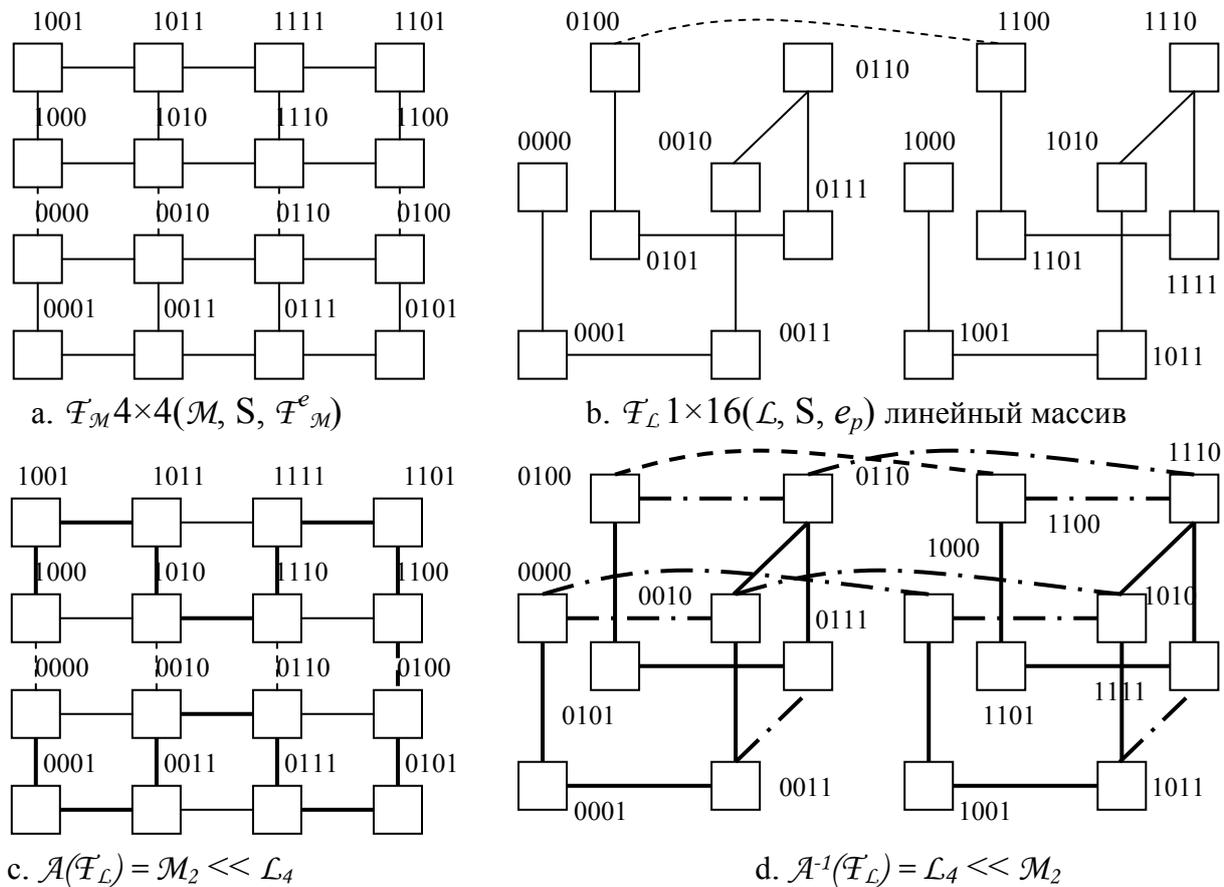


Рис.5. Адаптация между гомеоморфными фрактоидами

Следствие 3.1. Гомеоморфные фрактоиды решеток с эквивалентным количеством компонент отличаются шириной слоя бисекции β_w , если образец – это подфрактоид, удовлетворяющий равным начальным условиям фрактоида (теорема 1).

Следствие 3.2. Гомеоморфные фрактоиды классифицируются по увеличению ширины слоя бисекции β_w : линейный массив $\beta_w=1$, решетка 2×8 $\beta_w=2$, решетка 4×4 $\beta_w=4$, другие решетки, гиперкубы $\beta_w = 2^n/2$, при $n > 0$.

Отображение один-ко-многим. Отображение $\mathcal{A} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ по коннекторам не обязательно взаимно однозначное.

Определение 13. Отображение $\mathcal{A} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$, действующее на \mathcal{F} , хаотично, если выполняются следующие условия: \mathcal{A} обладает существенной зависимостью от начальных условий, транзитивно и периодически.

Теорема 4. Если отображение $\mathcal{A} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$, сопряженное по отношению к оператору сдвига хаотично на \mathcal{F} , то и оператор сдвига хаотичен $\ll: \Xi \rightarrow \Xi$ на структурном пространстве.

Доказательство. Покажем, что \mathcal{A} удовлетворяет:

1. Условию существенной зависимости от начальных условий. Пусть заданы образцы $e_l = p^l_1$ - получен на первом шаге и $e_m = p^l_1 p^2_1 \cup p^l_2 p^2_2$ - получен на втором шаге разбиения (Рис. 2). Выполним сдвиг $e_l \neq e_l \ll_1 e_m$, так как \mathcal{A} сопряжено с \ll , то начальные значения из Ξ , действуют на \mathcal{A} .

2. Условию транзитивности. Пусть образцы e_l и e_m построены разбиением структурного пространства Ξ . Если последовательность сдвигов (их замыкание) равно Ξ , то они транзитивны. На Рис.2 построены образцы $e_l = p^l_1 p^2_1 \cup p^l_1 p^2_2$ и $e_m = p^l_2 p^2_1 \cup p^l_2 p^2_2$, применим операторы сдвига \ll_K к e_l и e_m :

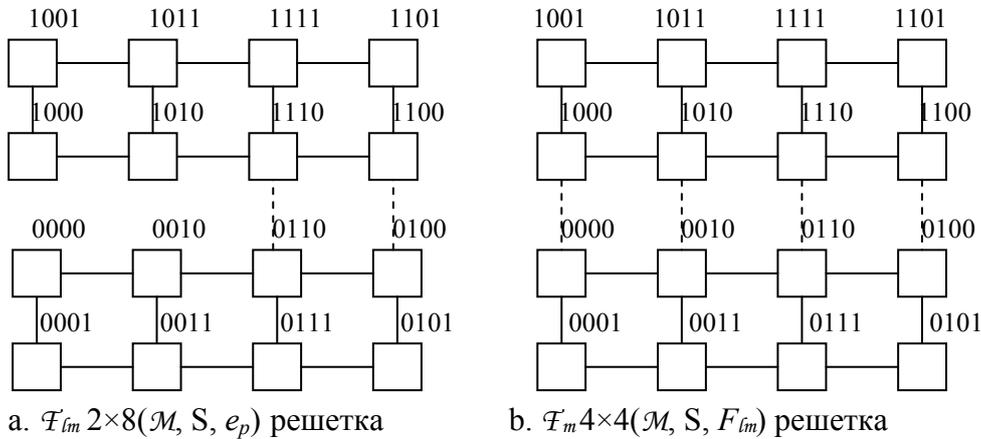


Рис.6. Преобразование решеток

$$\begin{aligned}
 e_i: p^1_1 p^2_1 \ll_1 p^1_1 p^2_2 = p^1_1 \\
 e_m: p^1_2 p^2_1 \ll_1 p^1_2 p^2_2 = p^1_2 \\
 e_l = e_i \ll_1 e_m = p^1_1 \ll_1 p^1_2 = p^1_1 \\
 p^0 \ll_1 p^1_1 = p^0 \in \Xi
 \end{aligned}$$

3. Условию периодичности. Компонента $ct_i \in Ct$ фрактоида размера n после сдвига \ll есть компонента фрактоида размера n отображения A . TL-системы периодична по n . Компоненты TL^{-1} -системы ведут себя периодически при сдвиге \ll (цикл алгоритма 2).

В силу указанных условий и определения адаптации, оператор сдвига хаотичен на структурном пространстве $\ll: \Xi \rightarrow \Xi$.

Теорема 5. Если сдвиг \ll является сюръективным отображением (отображение на, т.е. область значений \ll есть все множество $C \subset \Xi$), то отображение $A: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ не обязательно взаимно однозначное.

Доказательство. Диаграмма коммутативна в том смысле,

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{F} & \xrightarrow{A} & \mathcal{F} \\
 TL \downarrow & & \downarrow TL \\
 C & \xrightarrow{\gg} & C
 \end{array}$$

что $\gg \circ TL(\mathcal{F}) = TL \circ A(\mathcal{F})$ для всех $\mathcal{F} \in \mathcal{F}$, заменим правый сдвиг левым, $A(\mathcal{F}) = TL(\mathcal{F}) \circ \ll \circ TL^{-1}$.

Рассмотрим отображение при $Grid_{Cm} = 0$, $Grid_{Ct} > 0$. Оператор сдвига \ll отображает каждую компоненту фрактоида $TL^{-1}(\mathcal{F})$, помеченную битовым кодом, в компоненту фрактоида TL , помеченную этим же битовым кодом, коннектор фрактоида TL в один и более коннекторов $TL^{-1}(\mathcal{F})$.

Оператор сдвига должен реализовать алгоритм отображения между коннекторами. Алгоритмы 4 и 5 реализуют отображение между коннекторами гиперкуба и линейного массива.

Алгоритм 4. Отображение коннектора ct на коннекторы фрактоида гиперкуба, расположенного между бинарными метками компонент m_s - метка источника и m_d - метка назначения, $m_s, m_d \in \mathcal{F}_Q$, длиной n -бит, по размерности n , где n - позиция наименьшего значимого не нулевого бита m_s хог m_d . По слою бисекции β_n определяется направление движения к следующей метке.

Вход:

$$\mathcal{F}_Q, ct$$

m_s, m_d -- бинарные метки длиной n -бит

Выход:

\mathcal{F}_Q -- объектная структура гиперкуба с отображенными коннекторами

Инициализация:

m_s, m_d -- присвоение начальных значений

Шаги:

$m = m_s$ хог m_d , хог - побитовая операция исключающего ИЛИ

$n = \text{length}(m)$ -- минимальное расстояние между компонентами m_s и m_d

$Ct = ct \div n$ -- разбиение коннектора, подконнектору присваивается индекс $1..n$

$n = \text{Min1}(m)$ -- размерность для движения к следующей метке

while ($n \neq 0$)

$m_i = M(\mathcal{F}_Q, n)$ -- следующая метка по размерности n

```

cti = Ct (FQ , ms , mi) -- коннектор между
компонентами
cti << ctn -- отобразить коннектор ctn на cti
ms = mi
m = ms хог md
n = Min1 ( m ) -- определить размерность
end while
    
```

Шаг 1. Рассмотрим фрактоид гиперкуба размерности n=3. Пусть m_s = 011, m_d = 100, 011 хог 100 = 111, число несовпадающих разрядов (расстояние) равно 3; ct – коннектор фрактоида линейного массива, связывающий компоненты, помеченные идентичными метками. Ct=ct÷n={ct₁, ct₂, ct₃}.

Шаг 2. Двигаемся по размерности n=1, слой бисекции β₁. Функция getM(F_Q, n) определяет метку m_i=010, функция getCt(F_Q, m_s, m_i) определяет коннектор ct_i, связывающий компоненты m_s и m_i, ct_i << ct₁.

Шаг 3. m = 010 хог 100 = 110, n=2. m_i = 000, ct_i << ct₂.

Шаг 4. m = 000 хог 100 = 100, n=3. m_i = 100, ct_i << ct₃.

В этом смысле отображение реализует отношение один-ко-многим.

В случае, когда оператор сдвига << отображает Ф на единственную компоненту, он не удовлетворяет условиям существенной зависимости, даже если для А оно выполняется.

Пример 1. Адаптировать А: F_L(L, S, e_p)→F_Q(Q, S, e_p), построить обратимое отображение А⁻¹. Фрактоид линейного массива F_L строится по шаблону L_n=L_{n-1}+1 и размечается двоичным кодом.

Фрактоид F_Q размечается кодом Грея.

Шаг 1. Построим фрактоиды F_Q, n=3. Размер и разметка F_L кратна 2ⁿ.

Определение 14. Фрактоид F_L(L, S, e_p) линейного массива L, n≥1, строится системой Sⁿ с n шагами итерации из образца e_p = p¹₁, полученного на первом шаге разбиения (Рис. 2), по шаблону L_n = L_{n-1} + P₁, P₁ – помечен единичным битом, + - композиция предыдущей компоненты и прототипируемой P₁. На первом шаге построения P₁ прототипируется из e_p. Разметка кодом – побитовое сложение L_n = L_{n-1} + P₁ (Рис. 7 а).

```

TL = (V, U, P, A, T) = ((G, C), {+, ""}, {G → GC},
{axiom0="", axiom1=G, axiom2=C, axiom3=ep}, {template =
axiom1 + axiom2})
    
```

```

TL-1 = (V, U, P1, A, T1) = ((G, C), {÷, ""}, {G ← GC},
{axiom0="", axiom1=G, axiom2=C, axiom3=ep, axiom4=Ln},
{template-1 = axiom1 +1 axiom2})
    
```

Фрактоид F_Q(Q, S, e_p) иллюстрирует Рис. 3.с.

Шаг 2. TL(F_Q)=Q₃, TL(F_L) = L₈, тогда A(F_L) = Q₃ << L₈, при сдвиге коннекторов применяется алгоритм 4. Рис. 7.б иллюстрирует Grid_{Cm} = 0, 0 ≤ Grid_{Ct} ≤ 3, пунктирные линии соответствуют коннекторам линейного массива, линии – коннекторам гиперкуба.

Шаг 3. A(F_L)⁻¹ = L₈ << Q₃, при сдвиге коннекторов применяется алгоритм 5.

Алгоритм 5. Отображение коннектора ct на коннекторы фрактоида линейного массива между m_s, m_d ∈ F_L, где m_s, m_d соответственно бинарные метки компонент источника и назначения длиной n-бит. Отображение осуществляется по размерности 1.

Вход:

F_L, ct

m_s, m_d -- бинарные метки длиной n-бит

Выход:

F_L -- объектная структура линейного массива с отображенными коннекторами

Инициализация:

m_s, m_d -- присвоение начальных значений

Шаги:

m = m_s хог m_d -- хог - побитовая операция исключающего ИЛИ

n = N (m) -- минимальное расстояние между компонентами m_s и m_d

Ct = ct ÷ n -- разбиение коннектора, подконнектору присваивается индекс 1..n

for (j=1; j <= n; j++)

m_i = M (F_L, 1) -- следующая метка

ct_i = Ct (F_L, m_s, m_i) -- коннектор между компонентами

ct_i << ct_j -- отобразить коннектор ct_j на ct_i

m_s = m_i

end for

Коннектор линейного массива от метки 011 до 110 несет шесть коннекторов гиперкуба (Рис. 7 а), пунктирные линии соответствуют

коннекторам гиперкуба, линии – коннекторам линейного массива. $Grid_{cm} = 0, -1 \geq Grid_{ct} \leq -5$.

Заключение

Разработаны методы адаптации 1:1 и 1:N при неоднозначном отображении коннекторов для гомеоморфных фрактоидов, основанных на числовом ряде 2^n . Методы адаптации позволяют подойти к решению задачи о структурной

динамике сети при ограниченной пропускной способности. Коннекторы фрактальной архитектуры могут быть нагружены потоками. Каждый коннектор имеет верхнюю и нижнюю границу пропускной способности. Методы адаптации применяются в случае, если требуется уменьшить поток по коннектору, пропускная способность которого меньше требуемой. В этом случае, например метод адаптация линей-

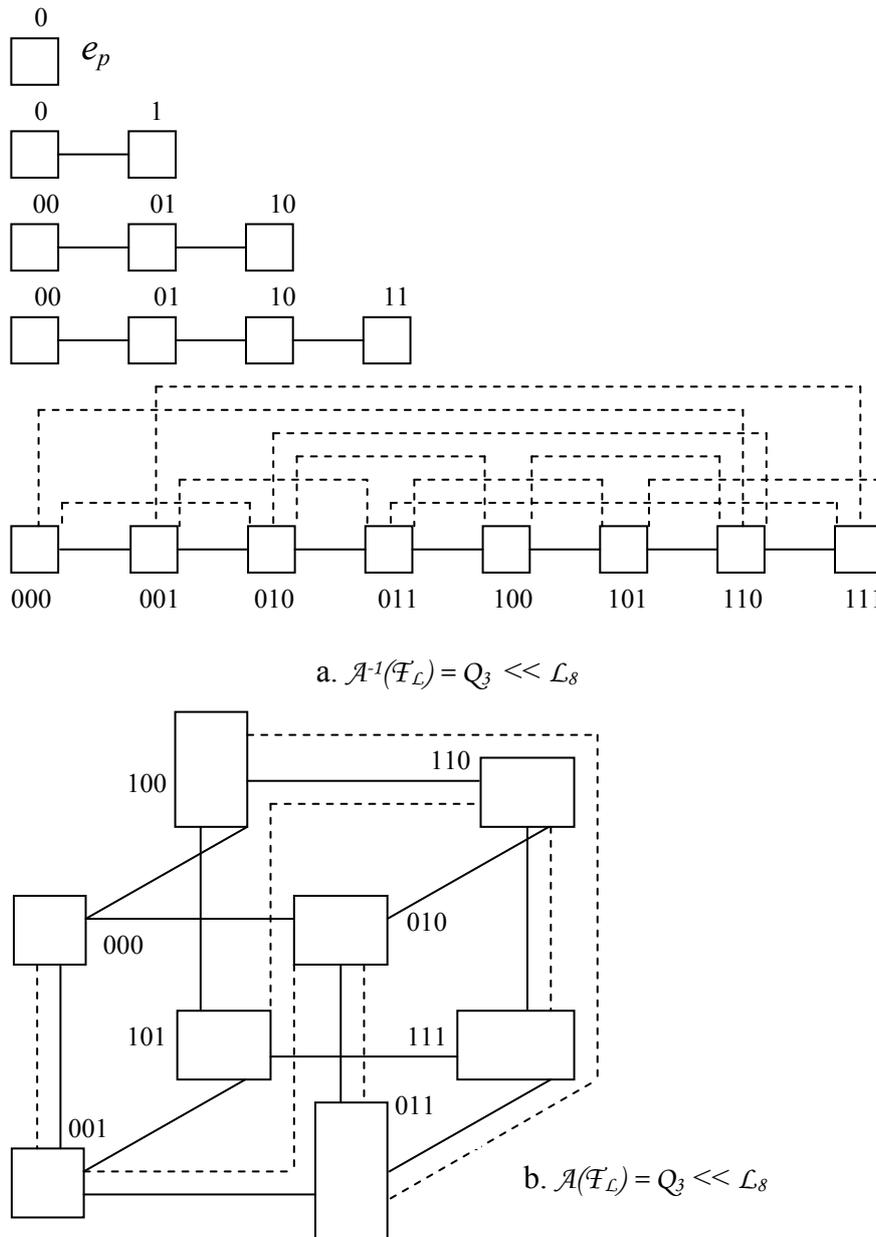


Рис. 7. Адаптация 1:N линейного массива и гиперкуба

ного массива в решетку или решетки в куб дает дополнительные коннекторы, которые служат для минимизации потока.

Кроме того, возможность построения фрактоида решетки из подфрактоида, позволяет увеличить ширину бисекции, что также необходимо для решения поставленной задачи.

Литература

1. В.Г. Олифер, Н.А. Олифер. Сетевые операционные системы». СПб.: Питер, 2001.
2. Обзорение по мультиядерной технологии. Multi-Core Technology Overview.
www.dell.com/content/topics/topic.aspx/global/products/pedge/topics/en/multi_core_main?c=us&l=en&s=gen
3. А.С. Семенов. Архитектурно-ориентированный подход к моделированию информационных систем // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2006. № 11.
4. А.С. Семенов. Анализ информационных систем на основе расширенной архитектурной модели // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2007. № 6.
5. А.С. Семенов. Фрактальная алгебра как основа фрактальной парадигмы программирования // Информационные технологии и вычислительные системы. – М.: №2, 2006.
6. А.С. Семенов. Построение класса фрактальных систем по шаблону на примере дерева Фибоначчи // Информационные технологии и вычислительные системы. – М.: №2, 2005.
7. А.С. Семенов. Фрактальное построение n-мерных гиперкубовых архитектур в структурном пространстве // Информационные технологии и вычислительные системы. – М.: №2, 2007.
8. А.С. Семенов. "Оптимизация фрактальных архитектур" // тезисы докладов. Вторая международная конференция "Системный анализ и информационные технологии" (САИТ'2007) г. Обнинск, 2007 г. Том 1.

Семенов Александр Сергеевич. Окончил МАИ в 1982 г. Докторант МАИ, кандидат физико-математических наук, доцент. Область научных интересов – развитие общей и прикладной теории фрактоидов для моделирования дискретных систем.