

Алгоритм вычисления максимальной величины области абсолютной устойчивости

А.С. Алиев, А.И. Баркин

Аннотация. Приводится алгоритм вычисления максимальной области абсолютной устойчивости по величине сектора, ограничивающего нелинейность в обратной связи. Используется метод гармонического баланса по заданному числу гармоник. Прилагается программа в среде Matlab.

Ключевые слова: нелинейные системы управления, абсолютная устойчивость, частотные характеристики, метод гармонического баланса.

Введение

Впервые задача об абсолютной устойчивости была поставлена в середине прошлого века [1]. Её появление связано с исследованием динамики одного типа систем автоматического управления, широко распространенного в авиации и в других областях техники. В системах этого типа имеется одна нелинейность, точное описание которой неизвестно. Она определяется принадлежностью к некоторому достаточно широкому классу нелинейных функций. Остальная часть системы управления описывается линейными дифференциальными уравнениями.

Система называется абсолютно устойчивой, если она асимптотически устойчива при любых начальных отклонениях и при любых нелинейностях из рассматриваемого класса. Такое определение делает невозможным оценку устойчивости с помощью математического моделирования, т.к. невозможно смоделировать бесконечное множество нелинейностей, из которых состоит данный класс.

Для решения задачи об абсолютной устойчивости использовались функции Ляпунова и частотные методы. Последние, в свою очередь, оказались эквивалентными методу функций

Ляпунова вида квадратичных форм от координат системы. Теория абсолютной устойчивости основана на гарантированных оценках поведения динамической системы, приводящих к достаточным условиям устойчивости. Рабочие инструменты этой теории – это дедуктивные построения с использованием теорем, лемм и более или менее сложных доказательств.

В данной работе для оценки области устойчивости используется метод гармонического баланса, который обычно применяется для приближенного вычисления амплитуды и частоты автоколебаний в нелинейных системах управления. Он основан на разложении периодических решений в ряд Фурье, причем используется, как правило, только первый член ряда. Точность решения и область применимости гармонического баланса оценить довольно трудно. Тем не менее, он широко используется в практических расчетах, поскольку для систем, не имеющих «патологии», дает довольно точные оценки параметров автоколебаний при минимальных вычислительных затратах.

В данной работе показано, что несмотря на методологические отличия описанные выше подходы могут с успехом дополнять друг друга. В результате можно получить точные оцен-

ки области абсолютной устойчивости в пространстве параметров динамической системы.

1. Постановка задачи

Рассматривается система вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + b\xi, \\ \xi &= \varphi(\sigma, t), \\ \sigma &= c^T x, \end{aligned} \quad (1)$$

где $x \in R^n$, $\xi \in R^1$, $\varphi(\sigma, t)$ - скалярная функция, удовлетворяющая неравенству

$$0 \leq \varphi(\sigma, t)\sigma \leq k\sigma^2 \quad (2).$$

Система (1) является абсолютно устойчивой, если она асимптотически устойчива при любых начальных отклонениях и при любых нелинейных функциях из указанного выше класса (2). Будем считать матрицу A устойчивой, так как вследствие (2) система (1) должна быть устойчивой при $\xi \equiv 0$.

Хорошо известен [1,2] так называемый круговой частотный критерий абсолютной устойчивости: система (1) абсолютно устойчива, если выполняется условие:

$$\operatorname{Re} W(i\omega) + k^{-1} > 0, \quad \forall \omega \geq 0, \quad (3)$$

где $W(p) = c^T (A - pI)^{-1} b$ - передаточная функция линейной части системы (1).

Критерий (3) просто проверяется, поскольку имеет наглядную геометрическую интерпретацию и требует минимум знаний о системе. К сожалению, круговой критерий во многих случаях дает слишком осторожную оценку области устойчивости.

Известно, что круговой критерий является необходимым и достаточным условием существования функции Ляпунова из класса квадратичных форм. Поэтому возможность усиления критерия (т.е. расширения области устойчивости в области параметров системы (1)) можно связать с использованием других функций Ляпунова, например, форм четных степеней [3,4].

В данной работе используется другой подход, связанный с изучением поведения предельной системы, введенной Е.С. Пятницким в [5]. В этой работе было показано, что из совокупности систем с нелинейностями вида (2) «наихудшей» в смысле устойчивости является система с переменным коэффициентом

$\xi = u(t)z$, причем коэффициент $u(t)$ изменяется скачком и принимает только два значения $u(t) = 0$ и $u(t) = k$. Предельная система описывается следующими уравнениями.

$$\dot{x} = Ax + bu\sigma, \quad (4)$$

$$\dot{z} = -A^T z - cu\vartheta, \quad (5)$$

$$u = 0,5k(1 - \operatorname{sign}(\sigma\vartheta)), \quad (6)$$

$$\sigma = c^T x, \quad (7)$$

$$\vartheta = b^T z. \quad (8)$$

Теорема [5]. Для абсолютной устойчивости системы (1),(2) необходимо и достаточно, чтобы тривиальное решение системы (4)-(8) было асимптотически устойчиво в малом (по Ляпунову) при $\|x\| \cdot \|z\| > 0$.

До настоящего времени не существует аналитических способов исследования предельной системы общего вида. При численном интегрировании уравнений (4)-(8) выяснилось, что устойчивость приходится проверять перебором всех возможных $2n$ начальных условий. Такой перебор не дает полной гарантии устойчивости и практически его трудно осуществить.

В [6,7] показано, что в системах второго и третьего порядков при увеличении коэффициента k возникает симметричный периодический режим с двумя переключениями на полупериоде. Вполне возможно, что и для более широкого класса систем нарушение устойчивости также выражается в возникновении простых колебаний. Следует отметить, что возникающие при потере устойчивости периодические решения системы (4)-(8) неустойчивы по начальным условиям, что отличает их от обычных автоколебаний в нелинейных системах.

Поставим задачу приближенного определения минимальной величины $k = k^*$, при которой в системе возникают условия существования простых колебаний. Эффективность предлагаемого подхода подтверждается примерами, судя по которым полученные условия практически совпадают с достаточными условиями абсолютной устойчивости.

Допустим, что в системе (4)-(8) существует простой периодический симметричный режим с периодом $2T$ с двумя переключениями на полупериоде. Переключения происходят при прохождении сигналов $\sigma(t)$ и $\vartheta(t)$ через нуль.

При этом возможны два случая. В первом случае (Рис.1) на полупериоде $[0, T]$ сигнал $\xi = u\sigma(t) = 0$, если $0 \leq t \leq (1 - \gamma)T$, и $\xi = u\sigma(t) = k\sigma(t)$, если $(1 - \gamma)T < t \leq T$, где $0 \leq \gamma \leq 1$.

Во втором случае (Рис. 2) сигнал $\xi(t)$ сдвинут по времени относительно $\sigma(t)$ на половину периода: $\xi(t) = k\sigma(t)$, если $(0 < t \leq (1 - \gamma)T$, и $\xi(t) = 0$, если $(1 - \gamma)T < t \leq T$.

В любом случае имеет место симметрия: $\sigma(t + T) = -\sigma(t)$, $\xi(t + T) = -\xi(t)$.

Сигналы $\sigma(t)$ и $\xi(t)$ можно представить рядами Фурье:

$$\sigma(t) = \sum_{s=1}^{\infty} (A_{2s-1} \sin((2s+1)\omega t) + B_{2s-1} \cos((2s+1)\omega t)), \quad (8)$$

$$\xi(t) = \sum_{s=1}^{\infty} (y_{2s-1} \sin((2s+1)\omega t) + y'_{2s-1} \cos((2s+1)\omega t)), \quad (9)$$

где $\omega = \pi / T$.

По уравнениям баланса на входе и выходе линейного блока можно составить однородные уравнения относительно амплитуд A_{2s-1}, B_{2s-1} . Условие существования решения состоит при этом в равенстве нулю некоторого бесконечного определителя. Реально можно использовать лишь конечные отрезки рядов (8), (9).

2. Приближенное определение области устойчивости

В этом разделе рассматривается первое приближение рядов (8), (9), учитывающее только первые гармоники. Будет показано, что в этом случае существует простой геометрический подход к вычислению области устойчивости.

Положим в первом приближении

$$\sigma(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t), \quad (10)$$

$$\xi(t) = y_1 \sin(\omega t) + y'_1 \cos(\omega t). \quad (11)$$

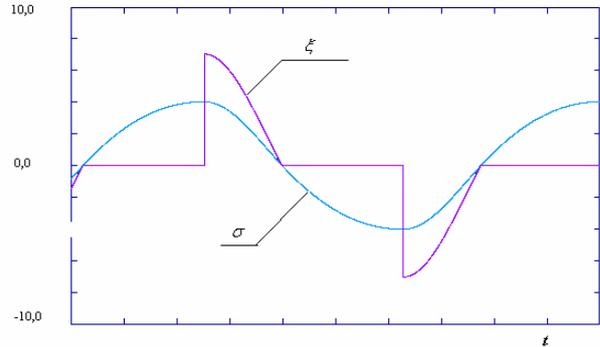


Рис.1.

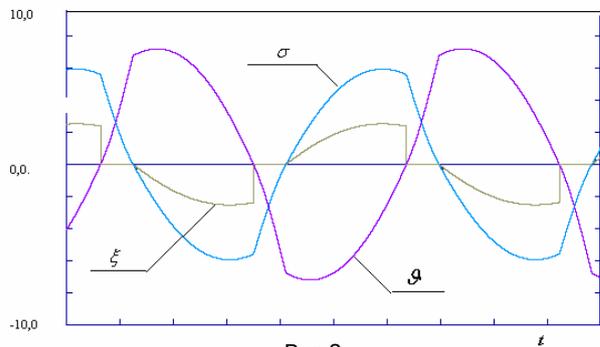


Рис.2.

Коэффициенты Фурье вычисляются по формулам

$$y_1 = \frac{2}{T} \int_s^r (A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)) \sin(\omega t) dt \quad (12)$$

$$y'_1 = \frac{2}{T} \int_s^r (A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)) \cos(\omega t) dt, \quad (13)$$

где $s = (1 - \gamma)T$, $r = T$ для первого типа колебаний и $s = 0$, $r = (1 - \gamma)T$ для второго типа. По формулам (12) и (13) получаем

$$y_1 = k(A(\gamma - u) + Bv) \quad (14)$$

$$y'_1 = k(Av + B(\gamma + u)), \quad (15)$$

где

$$u = \frac{\sin(2\pi\gamma)}{2\pi}, \quad v = \pm \frac{\cos(2\pi\gamma) - 1}{2\pi}, \quad (16)$$

причем знак коэффициента v определяется в зависимости от рассмотренных выше двух видов колебаний.

При входном сигнале (11) выходной сигнал линейной части записывается в виде

$$\sigma(t) = -|kW(i\omega)|(y_1 \sin(\omega t + \theta(\omega)) + y_1' \cos(\omega t + \theta(\omega))), \quad (17)$$

где $\theta(\omega) = \arg W(i\omega)$.

Обозначая $X = \operatorname{Re} W(i\omega)$, $Y = \operatorname{Im} W(i\omega)$, сравнивая (17) с (10) и учитывая (14) и (15), получаем уравнения гармонического баланса

$$A((\gamma - u)kX - vkY + 1) + B(vkX - (\gamma + u)kY) = 0, \quad (18)$$

$$A((\gamma - u)kY + vkX) + B(vkY + (\gamma + u)kX + 1) = 0 \quad (19)$$

Условие существования ненулевого решения однородной системы (18), (19) состоит в равенстве нулю определителя. Из этого условия после несложных тождественных преобразований получаем уравнение семейства окружностей по параметру γ :

$$\left(kX + \frac{\gamma}{\gamma^2 - u^2 - v^2}\right)^2 + (kY)^2 = \frac{u^2 + v^2}{(\gamma^2 - u^2 - v^2)^2}. \quad (20)$$

Дифференцируя (20) по параметру γ и выражая kX и kY через u и v , получим параметрическое уравнение огибающей семейства (20):

$$kX = -\frac{\gamma - u}{(\gamma - u)^2 + v^2}, \quad kY = \pm \frac{|v|}{(\gamma - u)^2 + v^2}. \quad (21)$$

Уравнение огибающей в другой форме было получено в [8] в предположении $B = 0$. Кривая (21) зависит от параметра γ и не зависит от знака коэффициента v , т.е. от типа колебаний. Область на комплексной плоскости $kW(i\omega)$, расположенная слева от кривой (21), определяет периодические режимы вида (10). Она является запретной для абсолютной устойчивости (Рис. 3).

В рамках сделанных предположений формулируется следующее

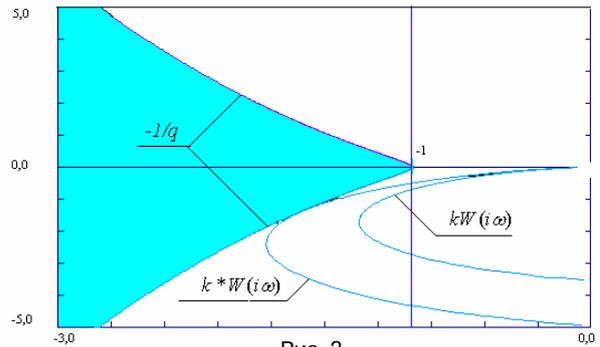


Рис. 3

Утверждение. Система (1), (2) абсолютно устойчива, если на комплексной плоскости частотная характеристика $kW(i\omega)$ не имеет общих точек с запретной областью.

Приведенное выше утверждение имеет простую графическую интерпретацию. Построим на комплексной плоскости кривую (21) по параметру $\gamma \in [0, 1]$ и годограф $kW(i\omega)$ по параметру $\omega \in [0, \infty)$, соответственно. Огибающая (21) имеет две ветви, соответствующие двум возможным типам колебаний. Величина k^* , равная тому значению k , при котором происходит касание частотной характеристики $kW(i\omega)$ и запретной области, приближенно определяет границу области абсолютной устойчивости. Точность решения тем больше, чем сильнее выражены фильтрующие свойства линейного блока. Отметим, что амплитуды A и B определяются начальными условиями и не могут быть получены из уравнений баланса.

3. Вычисление области устойчивости по заданному числу гармоник

Целью этого раздела является распространение изложенного выше подхода на общий случай с N гармониками в разложениях (8), (9). Пусть

$$\sigma(t) = \sum_{s=1}^N (A_{2s-1} \sin((2s-1)\omega t) + B_{2s-1} \cos((2s-1)\omega t)), \quad (22)$$

$$\xi(t) = \sum_{s=1}^N (y_{2s-1} \sin((2s-1)\omega t) + y'_{2s-1} \cos((2s-1)\omega t)) \quad (23)$$

По аналогии с (14), (15) получаем

$$\begin{aligned} y_1 &= A_1\psi_{1,1} + B_1\varphi_{1,1} + A_3\psi_{1,3} + B_3\varphi_{1,3} + \dots \\ &\quad + A_{2N-1}\psi_{1,2N-1} + B_{2N-1}\varphi_{1,2N-1}, \\ y'_1 &= A_1\varphi_{1,1} + B_1\mu_{1,1} + A_3\varphi_{3,1} + B_3\mu_{3,1} + \dots \\ &\quad + A_{2N+1}\varphi_{2N-1,1} + B_{2N-1}\mu_{1,2N-1}, \\ \dots\dots\dots \\ y_{2r-1} &= A_1\psi_{2r-1,1} + B_1\varphi_{2r-1,1} + A_3\psi_{2r-1,3} + B_3\varphi_{2r-1,3} + \dots \\ &\quad + A_{2N-1}\psi_{2r-1,2N-1} + B_{2N-1}\varphi_{2r-1,2N-1}, \\ y'_{2r-1} &= A_1\varphi_{1,2r-1} + B_1\mu_{1,2r-1} + A_3\varphi_{3,2r-1} + B_3\mu_{3,2r-1} + \dots \\ &\quad + A_{2N+1}\varphi_{2N-1,2r-1} + B_{2N-1}\mu_{2r-1,2N-1}, \\ \dots\dots\dots \\ y_{2N-1} &= A_1\psi_{2N-1,1} + B_1\varphi_{2N-1,1} + A_3\psi_{2N-1,3} + B_3\varphi_{2N-1,3} + \dots \\ &\quad + A_{2N-1}\psi_{2N-1,2N-1} + B_{2N-1}\varphi_{2N-1,2N-1}, \\ y'_{2N-1} &= A_1\varphi_{1,2N-1} + B_1\mu_{1,2N-1} + A_3\varphi_{3,2N-1} + B_3\mu_{3,2N-1} + \dots \\ &\quad + A_{2N+1}\varphi_{2N-1,2N-1} + B_{2N-1}\mu_{2N-1,2N-1} \end{aligned} \quad (24)$$

где коэффициенты вычисляются по следующим формулам

$$\psi_{r,s} = \frac{2}{T} \int_{(1-\gamma)T}^T \sin(r\omega t) \sin(s\omega t) dt, \quad (25)$$

$$\varphi_{r,s} = \frac{2}{T} \int_{(1-\gamma)T}^T \sin(r\omega t) \cos(s\omega t) dt, \quad (26)$$

$$\mu_{r,s} = \frac{2}{T} \int_{(1-\gamma)T}^T \cos(r\omega t) \cos(s\omega t) dt. \quad (27)$$

Очевидно, что $\psi_{r,s} = \psi_{s,r}$, $\mu_{r,s} = \mu_{s,r}$. Выражения для коэффициентов приведены в Приложении 1. Пределы интегрирования в (25)-(27) соответствуют первому типу колебаний. Для

второго типа колебаний изменяются только знаки коэффициентов $\varphi_{r,s}$. Однако это не оказывает влияния на описание области периодических колебаний (сравните с (20), (21)).

Составим уравнения гармонического баланса по N гармоникам. Аналогично с (18), (19) имеем

$$\begin{aligned} y_{2r-1}kX_{2r-1} - y'_{2r-1}kY_{2r-1} + A_{2r-1} &= 0, \\ y'_{2r-1}kX_{2r-1} + y_{2r-1}kY_{2r-1} + B_{2r-1} &= 0, \end{aligned} \quad r=1,2,\dots,N \quad (28)$$

где $X_s = \operatorname{Re} W(is\omega)$, $Y_s = \operatorname{Im} W(is\omega)$.

Используя (24), в (28) получим линейную однородную систему алгебраических уравнений относительно амплитуд A_{2r-1} и B_{2r-1} , $r = 1, 2, \dots, N$. Эта система имеет определитель

$$\det(kD + I_{2N}) = \det(k \begin{bmatrix} d_{1,1} & \dots & d_{1,2N} \\ \dots & \dots & \dots \\ d_{2N,1} & \dots & d_{2N,2N} \end{bmatrix} + I_{2N}), \quad (29)$$

где I_{2N} – единичная матрица размера $2N$, а элементы $d_{r,s}$ вычисляются по таблице ниже.

Условием существования периодического режима (23),(24) является равенство нулю определителя (29). Если при данном k не существует параметров γ, ω , при которых определитель (29) обращается в нуль, то можно считать, что граница области устойчивости еще не достигнута. Увеличивая k от нуля (при $k = 0$ система (1) устойчива и соответственно определитель (29) равен единице) и перебирая в допустимых пределах параметры γ и ω , получим величину максимального сектора абсолютной устойчивости как число $k = k^*$, при котором определитель (29) достигает нуля.

В приложении приводится описание программы, позволяющей вычислять число k^*

	s - нечетное	s - четное
r - нечетное	$d_{rs} = X_r\psi_{r,s} - Y_r\varphi_{s,r}$	$d_{rs} = X_r\varphi_{r,s-1} - Y_r\mu_{r,s-1}$
r - четное	$d_{rs} = X_{r-1}\varphi_{s,r-1} + Y_{r-1}\psi_{s,r-1}$	$d_{rs} = X_{r-1}\mu_{s-1,r-1} + Y_{r-1}\varphi_{r-1,s-1}$

при произвольном числе гармоник. Программа свободно распространяется и может быть предоставлена авторами по требованию.

4. Примеры вычислений

В литературе существует лишь несколько примеров систем второго и третьего порядков, для которых удаётся вычислить истинную границу области абсолютной устойчивости в пространстве параметров. Для этого методом припасовывания доказывается, что начиная с некоторого $k = k^*$ в системе возникает замкнутый цикл в фазовом пространстве. Ниже предложенный метод применяется к этим примерам.

Пример 1.

Пусть $W(p) = 1/(p^2 + p + 2)$. По круговому критерию получаем $k^* = 3,83$, при этом истинная величина сектора устойчивости $k^* \approx 6,985$ [9]. Ниже приводится таблица зависимости вычисленного по предлагаемому методу значения k от числа учтенных гармоник N .

N	1	2	3	4
k	7,04	6,96	7	6,986

Первое приближение дает ошибку 0,7%.

Пример 2.

Пусть

$W(p) = (p + 1)/(p^3 + 1,5p^2 + 3p + 2)$. По круговому критерию получаем $k^* = 2,2765$. В [9] методом припасовывания получено $k^* = 3,82695$. Приводим таблицу вычислений.

N	1	2	3	4
k	3,834	3,822	3,830	3,828

Ошибка первого приближения равна 0,2%.

Пример 3.

Пусть $W(p) = -\frac{p + 1}{p^2 + p + 1}$. По круговому критерию получаем $k^* = 0,75$, по методу припасовывания [10] имеем $k^* = 0,85$.

Используя метод гармонического баланса, получаем следующую таблицу.

N	1	2	3	4
k	0,838	0,844	0,849	0,851

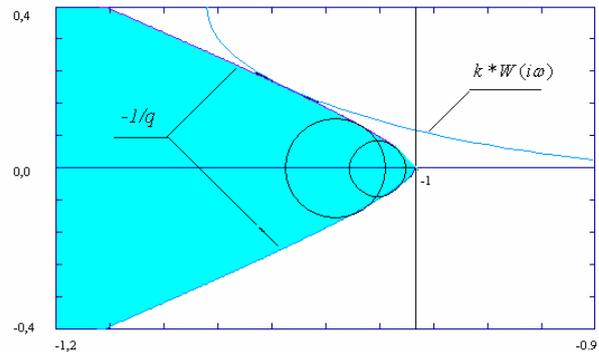


Рис. 4

Ошибка первого приближения составляет 1,5%. Увеличение ошибки несомненно связано с тем, что разность степеней знаменателя и числителя передаточной функции равна единице, что приводит к плохим фильтрующим свойствам. Однако и в этом неблагоприятном случае ошибка невелика. В данном примере решение уравнения баланса (12) достигается на верхней ветви кривой огибающей (Рис. 4), т.е. здесь реализуется второй из рассмотренных выше случаев взаимного расположения сигналов $\sigma(t)$ и $\xi(t)$.

Пример 4. В [11] рассматривалась система третьего порядка с симметричным сектором:

$$-k \leq \xi/\sigma \leq k \text{ и передаточной функцией}$$

$$W(p) = \frac{Q(p)}{G(p)},$$

где $Q(p) = -0,8166p^2 + 0,3486p - 0,5609$, $G(p) = p^3 + 1,126p^2 + 1,104p + 0,869$. Приведя эту задачу к рассмотренной выше форме

получим $W(p) = \frac{-2kQ(p)}{G(p) + kQ(p)}$. Используя метод гармонического баланса в первом приближении ($N = 1$) получаем $k^* = 0,9616$. Более точный расчет в соответствии с [11] дает $k^* = 0,8594$.

Ошибка первого приближения составляет 12%, что также, как и в предыдущем примере, связано с плохими фильтрующими свойствами линейной части. Ниже приведены результаты расчетов по нескольким гармоникам.

N	1	2	3	4
k	0,9616	0,8620	0,8603	0,8594

Заключение

Предложен способ получения оценки параметрической области устойчивости, базирующийся на применении метода гармонического баланса к предельной системе Пятницкого.

Разработана программа, позволяющая с любой точностью для систем любого порядка вычислять границу устойчивости по величине сектора нелинейности. Оценка границы устойчивости, полученная методом гармонического баланса, строго говоря, не является ни необхо-

димой, ни достаточной. Однако приведенные примеры говорят о том, что эта оценка очень близка к истинной границе устойчивости.

Во многих случаях достаточно точную границу устойчивости можно получить по первому приближению, допускающему простое и наглядное геометрическое решение задачи. Для вычисления оценки области устойчивости нужна только частотная характеристика линейного блока, которая может быть задана в виде массива экспериментальных данных.

Приложение 1

Выражения для коэффициентов $\psi_{rs}, \varphi_{rs}, \mu_{rs}$

Ниже все индексы r, s считаются нечетными, поскольку в частичных суммах Фурье (23), (24) присутствуют только нечетные гармоники.

$$\psi_{rs} = \frac{\sin((r-s)\pi\gamma)}{\pi(r-s)} - \frac{\sin((r+s)\pi\gamma)}{\pi(r+s)}, \quad r \neq s, \quad \psi_{rr} = \gamma - \frac{\sin(2\pi r\gamma)}{2\pi r}.$$

$$\varphi_{rs} = \frac{\cos((r+s)\pi\gamma) - 1}{\pi(r+s)} + \frac{\cos((r-s)\pi\gamma) - 1}{\pi(r-s)}, \quad r \neq s, \quad \varphi_{rr} = \frac{\cos(2\pi r\gamma) - 1}{2\pi r}.$$

$$\mu_{rs} = \frac{\sin((r+s)\pi\gamma)}{(r+s)\pi} + \frac{\sin((r-s)\pi\gamma)}{(r-s)\pi}, \quad r \neq s, \quad \mu_{rr} = \gamma + \frac{\sin(2\pi r\gamma)}{2\pi r}.$$

Приложение 2

Описание программы вычислений

Разработанная программа реализует схему вычислений п. 3 и определяет величину максимального сектора абсолютной устойчивости как число $k = k^*$, при котором определитель (29) достигает нуля.

Реализация сделана в среде Matlab и оформлена как независимое Windows-приложение. Внешний вид интерфейса программы представлен на Рис. 5.

Перед расчетом требуется задать следующие данные.

- Файл с частотной характеристикой (Input file). Это текстовый файл с тремя колонками чисел, разделённых пробелами или табуляторами. Первая колонка – значения частоты (ω), две других – действительная и мнимая части $W(j\omega)$. Предполагается, что значения частоты упорядочены по возрастанию.

- Начальное значение k , шаг по k и максимальное значение (панель k на Рис. 5). Максимальное значение служит для гарантированного останова программы, если не будет найден отрицательный определитель.

- Начальное и конечное значения для γ , а также количество значений на этом интервале (панель Gamma на Рис. 5). Шаг определяется отношением величины интервала к числу значений, задавая различное их число, можно регулировать точность поиска.

- Число гармоник (параметр Number of harmonics на Рис. 5).

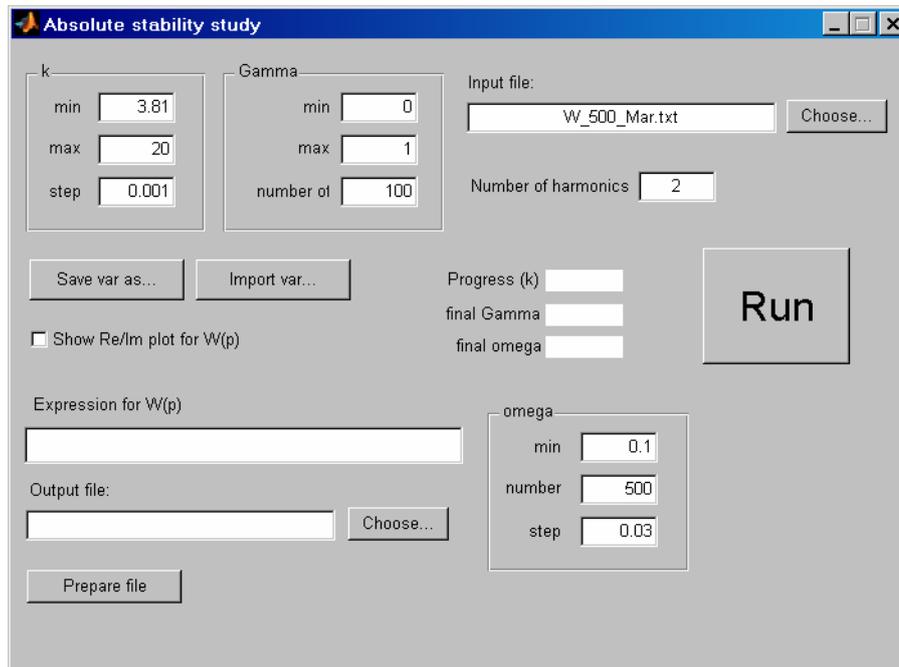


Рис. 5

По кнопке Run начиная с минимального k пробегаются все значения параметров Gamma (с вычисленным шагом) и частоты (из входного файла). Для них рассчитывается определитель (29) и при отрицательном значении результат выводится на экран и строится график зависимости определителя от частоты для того значения γ , при котором случилось первое отрицательное значение определителя.

В нижней части окна программы (Рис. 5) пользователь может задать выражение для $W(p)$ (если таковое имеется), по которому будет создан входной файл с частотной характеристикой $W(i\omega)$. Выражение задаётся как формула от p в стиле языка программирования Matlab, что в большинстве случаев совпадает с "естественной" записью. Для примеров 1-3 из п.4 эти выражения выглядят так:

- $1/(p^2+p+2)$
- $(p+1)/(p^3+1.5*p^2+3*p+2)$
- $-(p+1)/(p^2+p+1)$

На этих примерах видно, что умножение задаётся звёздочкой, а степень – символом "^".

Вместе с формулой требуется задать начальное значение частоты, количество значений в файле и шаг (панель omega на Рис.5). Затем по кнопке Prepare file в выбранный файл (Output file) запишется частотная характеристика, которую теперь можно использовать как входной файл для поиска отрицательного значения определителя (29).

При вычислениях X_s и Y_s в (28) значения $s\omega$ могут не совпадать с имеющимися во входном файле. В этом случае для значений между имеющимися частотами проводится линейная интерполяция значений действительной и мнимой части частотей характеристики, а для значений вне заданного интервала частот используется приближение гиперболой вида $F = \alpha / z^\beta$, причем коэффициенты α, β определяются отдельно для приближения действительной и мнимой частей.

В каждом случае используются два условия: в точке максимальной заданной частоты из входного файла гипербола и её производная совпадают со значениями приближаемой функции и её производной, соответственно. Производная приближаемой функции оценивается по двум последним значениям функции и частоты из входного файла.

Литература

1. Пятницкий Е.С. Новые исследования по абсолютной устойчивости систем автоматического регулирования // *АиТ*.1968.№6. С.5-36.
2. Либерзон М.Р. Очерки о теории абсолютной устойчивости // *АиТ*. 2006.№10.С.86-3
3. Баркин А.И., Зеленцовский А.Л., Пакшин П.В. Абсолютная устойчивость детерминированных и стохастических систем управления. М.: Изд-во МАИ, 1992.
4. Баркин А.И., Рокин Д.Н. Модернизация одного критерия абсолютной устойчивости // *АиТ*. 2008. №5.С.15-24.
5. Пятницкий Е.С. Абсолютная устойчивость нестационарных нелинейных систем // *АиТ*. 1970. №1.С.5-15.
6. Пятницкий Е.С., Рапопорт Л.Б. Существование периодических движений и критерии абсолютной устойчивости нелинейных нестационарных систем в трехмерном случае // *АиТ*.1991.№5.С. 68-79.
7. Рапопорт Л.Б. Антипериодические движения и алгебраический критерий абсолютной устойчивости нелинейных нестационарных систем в трехмерном случае. // *АиТ*.1993. №7. С. 38-54.
8. Баркин А.И. Системы с ключом и оценка области абсолютной устойчивости // *АиТ*.2009.№6.(в печати).
9. Margaliot M. Stability analysis of switched systems using variational principles: An Introduction // *Automatica* V. 42. (2006). 2059-2067.
10. Пятницкий Е.С., Молчанов А.П. Функции Ляпунова, определяющие необходимые и достаточные условия абсолютной устойчивости нелинейных нестационарных систем управления. II // *АиТ*.1986.№4.С. 5-15.
11. Вульф К., Шортен Р. О существовании периодических движений и максимальном размере сектора в задаче абсолютной устойчивости нелинейных нестационарных систем. // *АиТ*.2007.№8.С.68-77.

Алиев Александр Семенович. Старший научный сотрудник ИСА РАН. Окончил Московский институт инженеров железнодорожного транспорта в 1980 году. Кандидат технических наук. Имеет 12 научных работ. Область научных интересов – разработка прикладного программного обеспечения. E-mail: ali@isa.ru.

Баркин Александр Иванович. Ведущий научный сотрудник ИСА РАН. Окончил Московское высшее техническое училище им. Н. Баумана в 1962 году. Доктор технических наук, профессор. Имеет 50 научных трудов, в том числе 3 монографии. Область научных интересов – теория автоматического управления, нелинейные системы, устойчивость. E-mail: barkin@isa.ru.