Систематический обзор четких одномерных функций принадлежности интеллектуальных систем

Е.А. Халов

Аннотация. Приводится наиболее полный обзор и систематизация одномерных функций принадлежности, используемых при построении нейро–нечетких систем для решения задач управления промышленными технологическими процессами и техническими объектами.

Ключевые слова: функция принадлежности, нечеткое подмножество, носитель, ядро нечеткого подмножества, сигмоидные и гауссовы функции.

Введение

Функция принадлежности (ФП) — одна из важнейших характеристик нечеткого подмножества, позволяющая адекватно оперировать не только количественными величинами, но и качественными понятиями. Благодаря этому интеллектуальные системы, к которым относятся системы управления сложными техническими объектами и технологическими процессами (ТП), при функционировании которых преобладает качественная составляющая получаемой от них технологической информации, строятся с привлечением нечеткой логики и основных положений теории нечетких подмножеств с использованием особого математического аппарата, присущего функциям принадлежности.

Отметим, что качественная информация зачастую совсем не учитывается при выработке решений и формировании команд управления ТП. От того, насколько точно ФП отражает качественную составляющую информации — данные замеров параметров ТП и накопленные знания оператора (эксперта), во многом зависит адекватность нечеткой модели и качество управления ТП. Все имеющееся многообразие ФП можно разделить на две основные категории — четкие и нечеткие (интервально–значные) ФП [1, 2] (Рис. 1). Графическая интерпретация таких ФП представлена в примере на Рис. 2. Кроме того, по количеству одновременно представляемых переменных различают одномерные и многомерные (*n*–мерные) ФП. Теперь перейдем к определению таких понятий теории нечетких подмножеств, как собственно нечеткое подмножество, функция принадлежности, носитель и ядро нечеткого подмножества, нечеткая переменная.

Основные понятия теории нечетких подмножеств. Следуя Л. Заде [3], нечеткое подмножество $\tilde{X}$ на базовом множестве $\mathbf{X}$ есть совокупность упорядоченных пар $\tilde{X} = \{x, \mu_{\tilde{X}}(x)\}$, где $\mu_{\tilde{X}}(x)$ — характеристическая функция, именуемая функцией принадлежности и задающая для каждого элемента $x \in \mathbf{X}$ число из $M_{\tilde{X}} = [0,1]$, характеризующее степень принадлежности элемента *x* подмножеству $\tilde{X}$ [4].

Носителем $\tilde{X}_0$ нечеткого подмножества $\tilde{X}$ является некоторая часть базового множества $\mathbf{X}$, для которой значения ФП $\mu_{\tilde{X}}(x)$ положительны: $\tilde{X}_0 = \{x | \mu_{\tilde{X}}(x) > 0, x \in \mathbf{X}\}$.

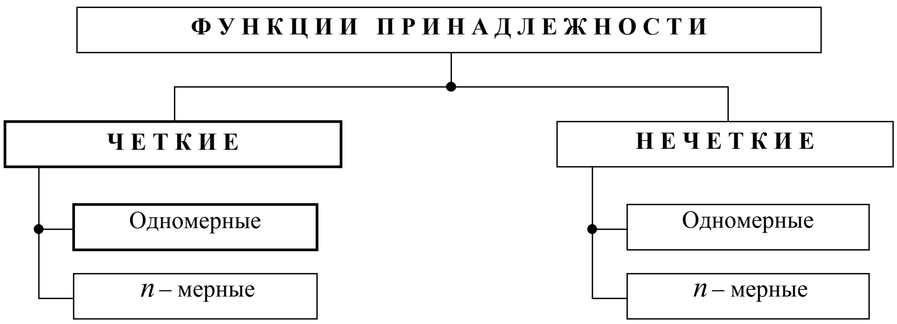

Рис. 1. Обобщенная классификация функций принадлежности

Носитель $\tilde{X}_0$ содержит все результаты измерений в рамках оцениваемого параметра ТП. Так, при оценке температуры, носителем $\tilde{X}_0$ может служить отрезок вещественной оси, где единицей измерения выступают градусы Цельсия. В практических задачах носители нечетких подмножеств ограничены. Например, носителем нечеткого подмножества рабочих режимов ТП может служить четкое подмножество — интервал $[d_1, d_2]$, на котором $\mu_{\tilde{X}}(x) \neq 0$.

Ядром $\tilde{X}_0$ нечеткого подмножества $\tilde{X}$, по аналогии с его носителем, представляется совокупность следующих элементов базового множества $\mathbf{X}$: $\tilde{X}^0 = \left\{x \middle| \mu_{\tilde{X}}(x) = 1, x \in \mathbf{X}\right\}$.

В теории нечетких подмножеств выделяют нечеткие подмножества, которые определяются на оси действительных чисел. В одномерном случае — $x \in \mathbf{R}^1$, где $\mathbf{R}^1$ — одномерное арифметическое пространство; в общем случае — $x \in \mathbf{R}^n$. Выбор арифметического пространства $\mathbf{R}^n$ обусловлен тем, что в теории управления с переменными x обычно связывают значения нескольких физических величин (температуру, давление и т.д.), которые получают с измерительных датчиков, установленных на объекте управления. Если область значений одномерного отображения $\mu_{\tilde{X}}(x) \in [0,1] \subset \mathbf{R}^1$, то $\mu_{\tilde{X}}(x)$ именуют одномерной функцией принадлежности. Отметим, что ФП в области своего определения не должна иметь разрывов, поэтому базовое множество $\mathbf{X}$, заданное на множестве чисел $\mathbf{R}^1$, также должно быть непрерывным [5].

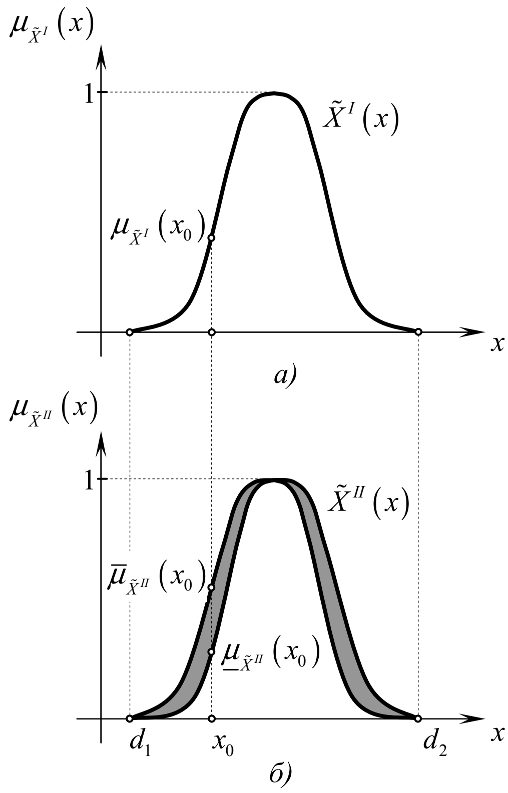

Рис. 2. Примеры четкой(*а*) и нечеткой (*б*) функций принадлежности

Завершая описание основных понятий теории нечетких подмножеств, отметим, что большинству ТП свойственны так называемые НЕ–факторы, предложенные Нариньяни [6] — неопределенность, неоднозначность и неясность, поэтому представление неточно заданных параметров в виде нечетких величин посредством ФП позволяет наиболее полно учесть не только количественную, но и качественную информацию о протекающем ТП [7, 8].

С учетом сведений, изложенных выше, указанные НЕ–факторы можно формализовать следующим образом:

- неопределенность имеет место тогда, когда базовое (универсальное) множество $\mathbf{X}$ состоит более чем из одной точки: $\mathbf{X} = \{x\}$;

- неоднозначность присутствует всякий раз, когда функция принадлежности имеет более одного локального максимума [9], т.е. когда для произвольных элементов $x_1 \in \mathbf{X}$, $x_2 \in \mathbf{X}$ и параметра $\lambda \in [0,1]$ выполняется условие $\mu_{\tilde{X}}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \max\{\mu_{\tilde{X}}(x_1), \mu_{\tilde{X}}(x_2)\}$;

- неясность или нечеткость соответствует тому факту, что функция принадлежности принимает значения в интервале: $\mu_{\tilde{X}}(x): \mu_{\tilde{X}} \to [0,1]$.

Иными словами, неясные или нечеткие категории возникают в том случае, когда представления эксперта о параметрах и явлениях протекающего ТП выражаются с помощью недостаточно определенных качественных оценок. Решение данной проблемы на современном этапе заключается в представлении ряда ограничений в нечеткой форме, — т.е. в виде ФП, позволяющих формализовать знания эксперта при анализе качественной информации и описании неопределенностей, присущих ТП, что дает возможность получать устойчивое решение в условиях погрешности информации и нечеткости существующих производственных ограничений.

Смысловые трактовки ФП существенно различаются. С одной стороны, она интерпретируется как субъективная (зависящая от эксперта) мера неопределенности, а с другой стороны — как вероятностная характеристика. Анализ и сравнение этих двух подходов приводятся в работах [3, 10, 11], выявляя недостаток второго подхода. Промежуточные значения $\mu_{\tilde{X}}(x)$ из $M_{\tilde{X}}$ не следует трактовать в вероятностном смысле, так как степень принадлежности элемента к нечеткому подмножеству не обязана иметь статистическую природу.

Вместе с тем, исследователями отмечается субъективность функции принадлежности в отличие от объективности вероятностной характеристики. Тем не менее в качестве таких функций можно использовать функции распределения вероятностей, нормированные определенным образом [12]. Таким образом, в зависимости от типа нечетких переменных можно также выделить и два способа их построения — статистический и нестатистический [11].

Виды и свойства функций принадлежности. Неотъемлемым этапом решения задач управления ТП является первоначальный выбор вида и параметров ФП, а также дальнейшая модификация этих параметров с помощью различных алгоритмов идентификации. Следовательно, важным представляется вопрос о видах и свойствах используемых ФП. В связи с этим обстоятельством дальнейшее рассмотрение посвятим четким (в смысле получаемых величин) одномерным ФП, поскольку именно они получили наибольшее распространение в нечетких интеллектуальных системах благодаря своей внятной геометрической интерпретации и несложному алгоритмическому и графическому представлению при помощи современных программных средств. На Рис. 3 представлена обобщенная классификационная схема наиболее распространенных четких одномерных ФП. Примечательно, что большинство из них применяются в качестве передаточных функций в нейронных сетях, что служит косвенным свидетельством их взаимосвязи с системами нечеткой логики [13]. Конкретный вид ФП определяется на основе различных дополнительных предположений о ее свойствах (симметричность, монотонность, непрерывность первой производной и т.д.) с учетом специфики имеющейся неопределенности, условий протекания ТП, числа “степеней свободы” в функциональной зависимости [14, 15].

В крайнем случае, когда вид ФП заранее не известен, ее оценку также можно выполнить по принимаемым ею крайним значениям на конечном множестве опорных точек. В этом случае ФП будет определена с помощью “поясняющего примера”. В практических приложениях применяются методы определения параметров функций принадлежности по выборкам и результатам опроса экспертов [10, 16], на основании априорной информации, в которую входят ограничения на эти функции [17, 18], а также нейросетевыми методами [19].

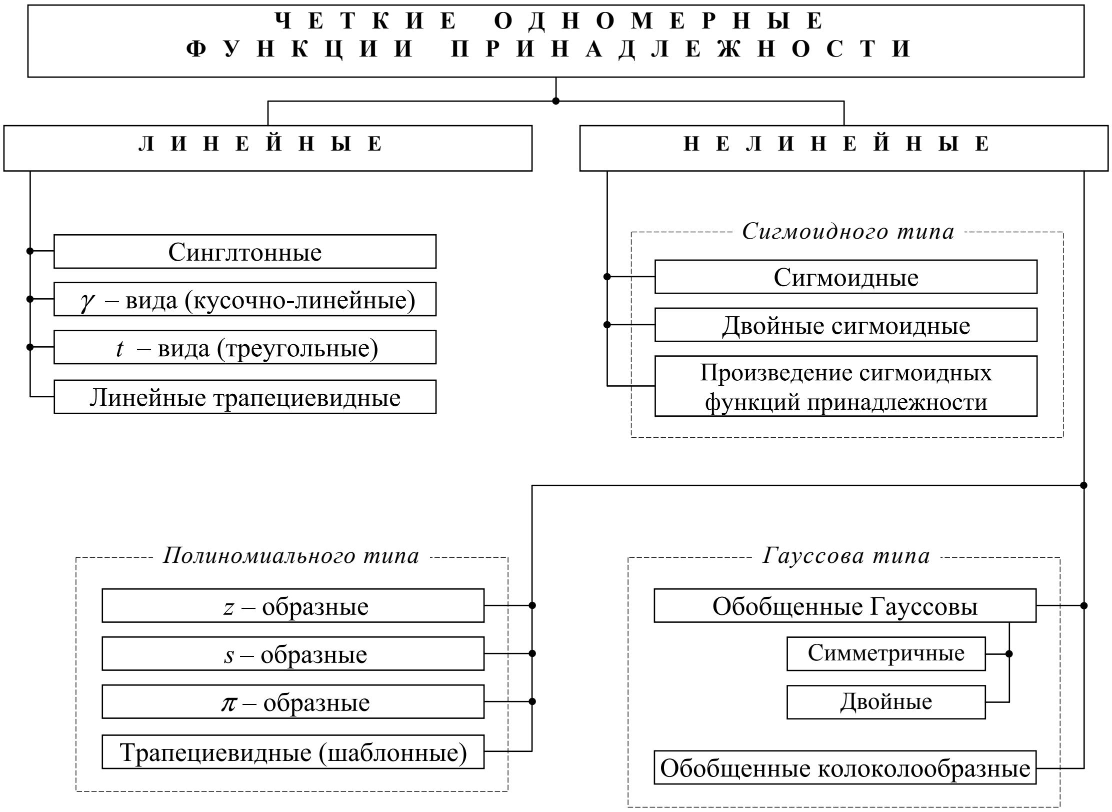

Рис. 3. Обобщенная классификация функций принадлежности

Теперь рассмотрим основные структурно–геометрические вариации, характерные для ФП с континуальным носителем $\tilde{X}_0$ [20, 21] на базовом множестве $\mathbf{X}$: унимодальную, мультимодальную, субнормальную, нормальную и амодальную структуры ФП (Рис. 4).

Унимодальная (одноэкстремальная) функция принадлежности $\tilde{X}_1$ (Рис. 4) на носителе $\tilde{X}_0$ должна удовлетворять условию вида

$$\exists x_0 \in \mathbf{X},\ \forall x_1, x_2 \in \mathbf{X}:$$
$$\left[x_0 \le x_1 \le x_2 \Rightarrow X(x_0) \le X(x_1) \le X(x_2), \right.$$
$$\left. x_0 \ge x_1 \ge x_2 \Rightarrow X(x_0) \ge X(x_1) \ge X(x_2) \right],$$

т.е. содержать единственный максимум в области своего носителя $\tilde{X}_0$. Другими словами, унимодальная ФП монотонна по обе стороны относительно точки своего экстремума.

Мультимодальная (многоэкстремальная) функция $\tilde{X}_2$ (Рис. 4), наоборот, должна содержать более одного максимума на носителе $\tilde{X}_0$ в соответствии с выражением:

$$\left(\exists x_i \in \tilde{X}_0\right)\left(\forall x < x_i\right)\left(\forall x > x_i\right)\left(\mu_{\tilde{X}}(x_i) \le \mu_{\tilde{X}}(x)\right),$$
$$i = \overline{1, n},\ n > 1 .$$

Субнормальная функция принадлежности $\tilde{X}_3$ характеризуется условием, исключающим наличие ядра $\tilde{X}_0$ на интервале ее носителя $\tilde{X}_0$: $\left(\forall x \in \tilde{X}_0\right)\left(\mu_{\tilde{X}}(x) < 1\right)$. Напротив, ФП является нормальной, если на интервале носителя $\tilde{X}_0$ существует ядро, т.е. $\left(\forall x \in \tilde{X}_0\right)\left(\mu_{\tilde{X}}(x) = 1\right)$. Наконец, нечеткое подмножество является пустым, если $\mu_{\tilde{X}}(x) = 0$ для всех $x \in \mathbf{X}$.

Амодальная функция принадлежности $\tilde{X}_4$ отличается от всех рассмотренных выше ФП полным отсутствием максимумов в области носителя $\tilde{X}_0$ и асимптотическим приближением к максимально возможному значению величины степени принадлежности $\mu_{\tilde{X}}(x) \to 1$:

$$\left(\forall x \in \tilde{X}_0\right)\left(\forall \varepsilon > 0\right) \exists x_1 \in \left(x-\varepsilon; x\right) \cap \tilde{X}_0, \\ \exists x_2 \in \left(x; x+\varepsilon\right) \cap \tilde{X}_0 : \\ \left(\mu_{\tilde{X}}(x_1) > \mu_{\tilde{X}}(x)\right) \vee \left(\mu_{\tilde{X}}(x_2) > \mu_{\tilde{X}}(x)\right).$$

Теперь сформулируем ряд общих свойств, которым должна удовлетворять любая ФП на носителе $\tilde{X}_0$:

- функция принадлежности должна быть непрерывной, т.е. $\forall x_0 \in \tilde{X}_0 \ \exists \lim\limits_{x \to x_0} \mu_{\tilde{X}}(x) = \mu_{\tilde{X}}(x_0)$;

- функция принадлежности должна монотонно возрастать или монотонно убывать, либо частично монотонно возрастать и монотонно убывать (Рис. 4);

- любая функция принадлежности должна выполнять отображение интервала носителя $\tilde{X}_0$ (диапазон значений технологического параметра) в единичный отрезок: $\tilde{X} : \tilde{X}_0 \to [0,1]$;

- на всем интервале своего носителя $\tilde{X}_0$ ФП $\tilde{X}$ является выпуклой (Рис. 5), если выполняется неравенство $\forall x_1, x_2, x_3 \in X : x_1 \le x_2 \le x_3 \Rightarrow$ $\Rightarrow \mu_{\tilde{X}}(x_2) \ge \min\left(\mu_{\tilde{X}}(x_1), \mu_{\tilde{X}}(x_3)\right)$ либо невыпуклой — в случае невыполнения данного неравенства.

Кроме того, может существовать такое значение $c \in [a,b]$, что на интервале $[a,c]$ ФП выпуклая, а на интервале $[c,b]$ — невыпуклая. Отметим, что условие выпуклости обязательно должно соблюдаться при построении нечетких чисел. Теперь перейдем к вопросу аналитического представления кривых, характеризующих одномерные четкие ФП интеллектуальных систем.

Среди четких ФП можно выделить два основных класса — линейных и нелинейных [1, 10, 11, 22–24], описываемых обобщенной зависимостью следующего вида:

$$\mu_{\tilde{X}}(x) = f(x, \mathbf{d}), \tag{1}$$

где $\mathbf{d}$ — вектор настраиваемых параметров d_i, $1 \le i \le 6$.

При построении нейро–нечетких моделей и систем управления технологическими объектами важную роль играют такие характеристики ФП, как ядро, носитель и настраиваемые параметры, позволяющие управлять положением опорных точек. Их априорная настройка позволяет уменьшить время, затрачиваемое на идентификацию параметров ФП. Однако ввиду того, что обучение нечеткой модели может проводиться как градиентными, так и неградиентными методами, выявляется еще один существенный недостаток линейных функций принадлежности — невозможность применения методов оптимизации, использующих производные. Это, впрочем, не помешало их широкому использованию в алгоритмах интеллектуальных систем.

Теперь проведем систематизацию ФП этих двух классов, используемых в системах нечеткого вывода, на основании доступных отечественных и западных публикаций и наиболее популярного профессионального инструментария — пакетов FuzzyTech, MatLab [21], FuzzyExpert, CubiCalc и Rule Maker в соответствии с классификационной схемой, приведен-

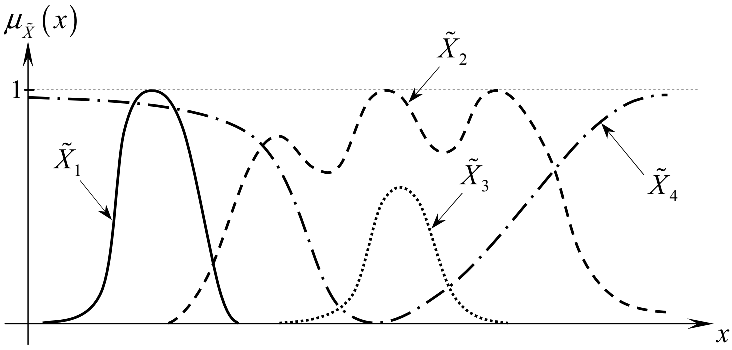

Рис. 4. Структурно–геометрические вариации одномерных функций принадлежности

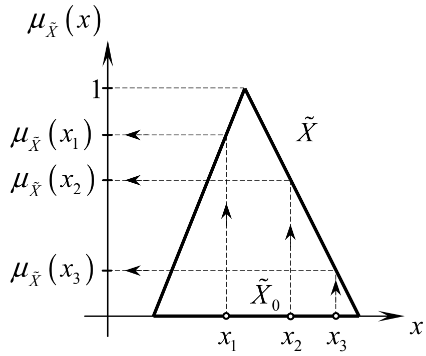

Рис. 5. Пример выпуклой функции принадлежности

ной на Рис. 3, и обзорной работой [27]. Начнем систематизацию с класса линейных функций принадлежности.

Класс линейных ФП (Рис. 3) представлен в работах сравнительно малым набором аналитических выражений, в основном взаимно отличающихся количеством настраиваемых параметров. Среди них наиболее простыми являются функции γ–вида (кусочно–линейные), t–вида (треугольные) и трапециевидные [18, 25], а также синглтонные функции принадлежности.

Очевидным достоинством линейных ФП является простота программной реализации и вычисления значений функционала. Напротив, существенное ограничение указанных ФП состоит в недостаточном количестве "степеней свободы", т.е. настраиваемых параметров d_i, $i=\overline{1,4}$. Отрицательное следствие этого факта - невозможность формирования сложной зависимости вида $\mu_{\tilde{X}}(x)\in[0,1]$, $x\in\mathbf{X}$, при помощи одиночной функции принадлежности. Устранение указанного ограничения достигается путем разбиения параметрических интервалов входных переменных системы нечеткого вывода и генерацией дополнительных правил [7, 26].

Все линейные функции принадлежности формируются с использованием кусочно–линейной аппроксимации и имеют весьма простую структуру. Для линейных функций принадлежности характеристики ядра $\tilde{X}^0$, носителя $\tilde{X}_0$ и параметров d_i приведены в Табл. 1.

Как можно видеть из представленной таблицы, ФП γ–вида является нормальной, имеет ядро и некомпактный носитель [28–30]. Функция t–вида содержит компактный носитель и одноточечное ядро; используется для представления нечетких чисел LR–типа [13, 29–35]. Трапециевидная ФП, как и функция γ–вида, является нормальной и имеет ядро, но отличается наличием компактного носителя; позволяет представлять нечеткие интервалы [36–39].

Далее перейдем к рассмотрению более обширного класса — нелинейных ФП, представленных в большинстве работ выражениями (2)–(12). Некоторые из них представляют собой линейные комбинации различных типов нелинейных ФП, что увеличивает количество степеней свободы ФП. Среди класса нелинейных ФП можно выделить три подкласса функций (Рис. 3), содержащих выражения сигмоидных, полиномиальных кривых и функций распределения Гаусса. Отметим, что вышеуказанные виды линейных ФП, а также подавляющее большинство нелинейных ФП современных систем нечеткого вывода (исключая некоторые виды ФП, описываемых при помощи специальных индикаторов), подробно рассмотрены в работе [27].

Подкласс сигмоидных ФП

Сигмоидная ФП имеет два параметра d_1, d_2, и широко используется не только в нечетком выводе, но и в качестве функции активации [40] в моделях нейронных сетей (Рис. 6 а):

Табл. 1. Характеристики линейных функций принадлежности

Вид линейной функции принадлежности	Количество параметров	Компоненты вектора $\mathbf{d}$ (параметры настройки)	Наличие ядра $\tilde{X}^0$	Интервал носителя $\tilde{X}_0$
Синглтонная	1	d_1	$\tilde{X}^0=\{x\in\tilde{X}:x=d_1\}$	$\tilde{X}_0=\{x\in\tilde{X}:x=d_1\}$
γ – вида (тип 0)	2	d_1, d_2	$\tilde{X}^0=\{x\in\tilde{X}:x\le d_1\}$	$\tilde{X}_0=\{x\in\tilde{X}:x\le d_2\}$
γ – вида (тип 1)	2	d_1, d_2	$\tilde{X}^0=\{x\in\tilde{X}:x>d_2\}$	$\tilde{X}_0=\{x\in\tilde{X}:x>d_1\}$
t – вида (треугольная)	3	d_1, d_2, d_3	$\tilde{X}^0=\{x\in\tilde{X}:x=d_2\}$	$\tilde{X}_0=\{x\in\tilde{X}:d_1<x<d_3\}$
Линейная трапециевидная	4	d_1, d_2, d_3, d_4	$\tilde{X}^0=\{x\in\tilde{X}:d_2<x<d_3\}$	$\tilde{X}_0=\{x\in\tilde{X}:d_1<x<d_4\}$

$$\mu_{\tilde{X}}(x)=\frac{1}{1+\mathbf{e}^{-d_2(x-d_1)}}, \qquad (2)$$

где d_1 — точка центра симметрии функции принадлежности на оси x, $\mu_{\tilde{X}}(d_1)$=0.5;

d_2 — коэффициент пологости, определяющий наклон функции принадлежности.

Графики сигмоидной (Рис. 6 а) и кусочно–линейной ФП γ–вида подобны между собой, но сигмоидная ФП дифференцируема на всей области своего определения, что позволяет применять градиентные алгоритмы для идентификации ее параметров d_1 и d_2 [35, 41].

Двойная сигмоидная ФП (Рис. 6 б) характеризуется аналитическим выражением вида [21]:

$$\mu_{\tilde{X}}(x)=\frac{1}{1+\mathbf{e}^{-d_2(x-d_1)}}-\frac{1}{1+\mathbf{e}^{-d_4(x-d_3)}}, \qquad (3)$$

где d_1, d_3 — точки центров симметрии левой и правой частей ФП на оси x, $\mu_{\tilde{X}}(d_1)=0.5$, $\mu_{\tilde{X}}(d_3)=0.5$; d_2, d_4 — коэффициенты пологости левой и правой частей ФП.

Как следует из выражения (3), данная ФП описывается разностью двух сигмоидных функций принадлежности и так же, как функция из выражения (2), дифференцируема на всей области своего определения. Кроме того, она имеет два дополнительных параметра, или “степеней свободы” d_3, d_4, что позволяет точнее производить идентификацию ее параметров.

Произведение сигмоидных ФП (Рис. 7) выражается аналитической зависимостью

$$\mu_{\tilde{X}}(x)=\frac{1}{1+\mathbf{e}^{-d_2(x-d_1)}}\cdot\frac{1}{1+\mathbf{e}^{-d_4(x-d_3)}}, \qquad (4)$$

в которой присутствуют четыре параметра настройки, позволяющие осуществлять раздельную настройку верхней и нижней частей сигмоидной кривой, тем самым регулируя в широких пределах степень насыщения данной функции. В то же время сигмоидная ФП (2) обладает меньшей гибкостью, т.к. предполагает одновременное изменение пологости всей кривой (Рис. 6 а).

Следует отметить, что при сочетаниях параметров $d_1 = d_3$, $d_2 = d_4$ данная ФП приобретает вид обычной сигмоиды из выражения (2).

Любая нелинейная ФП, характеризующая нечеткое подмножество $\tilde{X}$, в свою очередь также может быть охарактеризована множествами точек, составляющими ядро $\tilde{X}^0$ и носитель $\tilde{X}_0$. Для нелинейных ФП, рассматриваемых в данной работе, области определения ядра и носителя приведены в Табл. 2. Рассмотренные выше ФП, определяемые выражениями (2)–(4), имеют некомпактные носители $\tilde{X}_0=\pm\infty$, поскольку асимптотически стремятся к значениям $\mu_{\tilde{X}}(x)=\{0,1\}$, а также являются субнормальными из–за отсутствия точек, составляющих ядро.

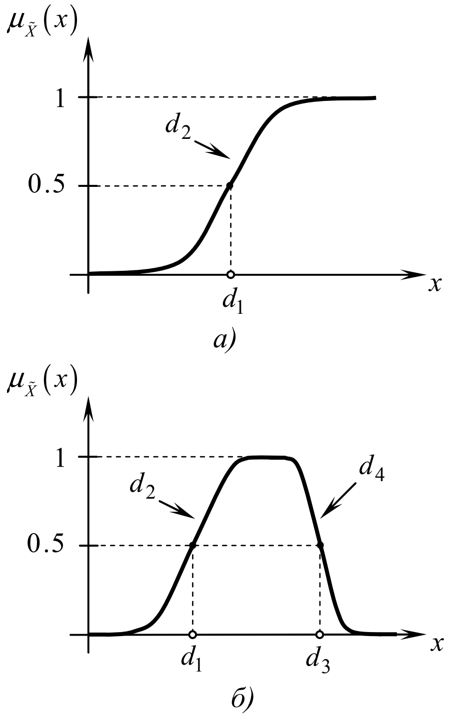

Рис. 6. Сигмоидная (*а*) и двойная сигмоидная (*б*) ФП

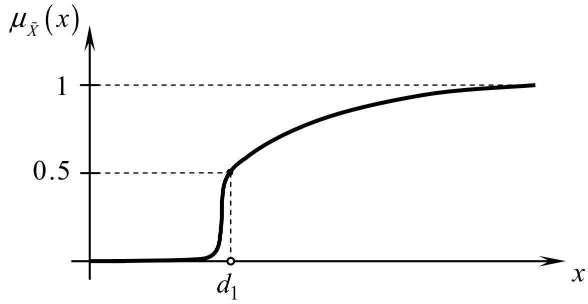

Рис. 7. Произведение сигмоидных функций принадлежности

Табл. 2. Характеристики нелинейных функций принадлежности

Вид нелинейной функции принадлежности	Количество параметров	Компоненты вектора $\mathbf{d}$ (параметры настройки)	Наличие ядра $\tilde{X}^0$	Интервал носителя $\tilde{X}_0$
Сигмоидная	2	d_1, d_2	$\tilde{X}^0 = \varnothing$ (субнормальное)	$\tilde{X}_0 = \pm\infty$ (некомпактный)
Двойная сигмоидная	4	d_1, d_2, d_3, d_4		
Произведение сигмоидных	4	d_1, d_2, d_3, d_4		
Обобщенная Гауссова	3	d_1, d_2, d_3	$\tilde{X}^0 = \left\{x \in \tilde{X} : x = d_1\right\}$	
Симметричная Гауссова	2	d_1, d_2		
Двойная Гауссова	4	d_1, d_2, d_3, d_4	$\tilde{X}^0 = \left\{x \in \tilde{X} : d_1 \le x \le d_3\right\}$	
Обобщенная колоколообразная	3	d_1, d_2, d_3	$\tilde{X}^0 = \left\{x \in \tilde{X} : x = d_1\right\}$	
z – образная	2	d_1, d_2	$\tilde{X}^0 = \left\{x \in \tilde{X} : x \le d_1\right\}$	$\tilde{X}_0 = \left\{x \in \tilde{X} : x \le d_2\right\}$
s – образная	2	d_1, d_2	$\tilde{X}^0 = \left\{x \in \tilde{X} : x \ge d_2\right\}$	$\tilde{X}_0 = \left\{x \in \tilde{X} : x \ge d_1\right\}$
π – образная	4	d_1, d_2, d_3, d_4	$\tilde{X}^0 = \left\{x \in \tilde{X} : d_2 \le x \le d_3\right\}$	$\tilde{X}_0 = \left\{x \in \tilde{X} : d_1 \le x \le d_4\right\}$
Трапециевидная (шаблонная)	6	d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6	$\tilde{X}^0 = \left\{x \in \tilde{X} : d_3 < x \le d_4\right\}$	$\tilde{X}_0 = \left\{x \in \tilde{X} : d_1 \le x < d_6\right\}$

Следующий подкласс ФП, служащий для представления неточно заданных параметров ТП в виде нечетких величин, содержит семейство функций принадлежности на основе функций распределения Гаусса: обобщенной, симметричной, двойной гауссовой, а также обобщенной колоколообразной. Перейдем к рассмотрению ФП данного подкласса.

Подкласс гауссовых ФП

Обобщенная гауссова функция принадлежности (Рис. 8 а) используется в качестве радиальной базисной функции в RBF–сетях, но из–за структурного подобия RBF–сетей и нечетких систем [42] нашла применение в нечетких системах [43, 44].

Данная ФП выражается простой экспоненциальной зависимостью следующего вида:

$$\mu_{\tilde{X}}(x) = \mathbf{e}^{-\left(\frac{(x-d_1)}{d_2}\right)^{2d_3}}, \qquad (5)$$

где d_1 — координата точки смещения центра симметрии кривой на оси x;
d_2 — коэффициент широты (вариация);
d_3 — коэффициент пологости.

При подборе параметра d_2 обобщенная функция Гаусса (5) образует вид треугольной или трапециевидной ФП. На ее основе строятся другие модификации ФП, используемые в RBF–сетях [45] и нейро–нечетких системах [11, 36, 46–48, 49], например, в системе FUNCOM [50]:

- симметричная гауссова функция принадлежности, определяемая выражением (5) при значении параметра $d_3 = 1$ (Рис. 8 б), и описываемая выражением вида

$$\mu_{\tilde{X}}(x) = \mathbf{e}^{-\left(\frac{(x-d_1)}{d_2}\right)^{2}}; \qquad (6)$$

- двойная гауссова функция принадлежности [51], в выражении которой используются специальные условия, именуемые индикаторами (Рис. 9 а) следующего вида

$$\mu_{\tilde{X}}(x) = \left(\mathbf{e}^{-\frac{(x-d_1)^2}{2\cdot d_2^2}} \cdot 1(x \le d_1) + \left(1 - 1(x \le d_1)\right)\right) \times \\ \times \left(\mathbf{e}^{-\frac{(x-d_3)^2}{2\cdot d_4^2}} \cdot 1(x \ge d_3) + \left(1 - 1(x \ge d_3)\right)\right), \qquad (7)$$

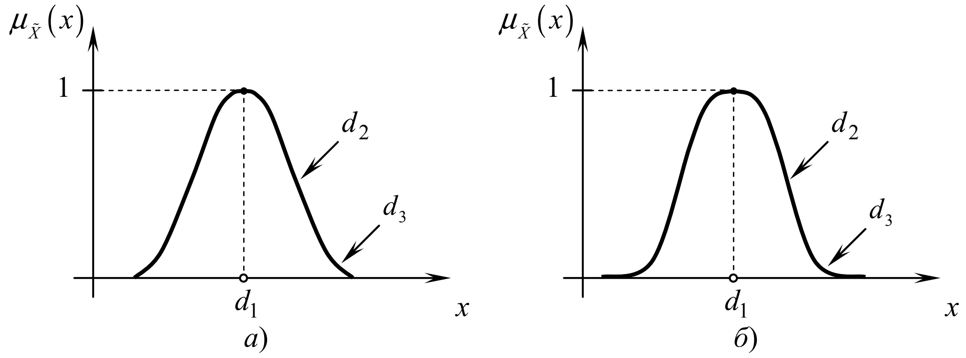

Рис. 8. Обобщенная (*а*) и симметричная (*б*) ФП гауссова типа

где d_1, d_2 — параметры формы и положения для левой половины кривой;

d_3, d_4 — параметры формы и положения для правой половины кривой;

$1(\xi)$ — индикатор, равный 1, если условие ξ истинно, и 0 в противном случае.

Нечеткие подмножества, описываемые обобщенной (5) и симметричной (6) ФП, являются нормальными и при любых значениях параметров d_1, d_2 и d_3 имеют ядро, содержащее одну точку (Табл. 2). Двойная гауссова ФП (Рис. 9) обладает особенностями, обусловленными структурой аналитического выражения и дополнительными параметрами настройки d_3 и d_4:

- при $d_1 \le d_3$ нечеткое подмножество, выражаемое данной функцией принадлежности, имеет ядро, содержащее одну и более точек (Рис. 9 а);

- если $d_2 = d_4$, то функция принадлежности имеет симметричный вид с точкой симметрии в точке d_1, в противном случае — функция принадлежности асимметрична (Рис. 9 а);

- при $d_1 > d_3$ нечеткое подмножество не имеет ядра (Рис. 9 б, в).

Наличие четырех управляющих параметров, по сравнению с ФП из выражений (3)–(6), иногда позволяет избежать увеличения количества правил в системе нечеткого вывода за счет использования дополнительных возможностей настройки формы и положения данной ФП.

Обобщенная колоколообразная ФП (Рис. 10) представляет собой симметричную двустороннюю ФП, управляемую тремя параметрами и описываемую аналитическим выражением:

$$\mu_{\tilde{X}}(x) = \frac{1}{1 + \left| \dfrac{x - d_1}{d_3} \right|^{2d_2}}, \tag{8}$$

где d_1— координата точки смещения центра симметрии кривой по оси x;

d_2— параметр, определяющий ширину верхней части функции;

d_3— коэффициент пологости левой и правой частей кривой.

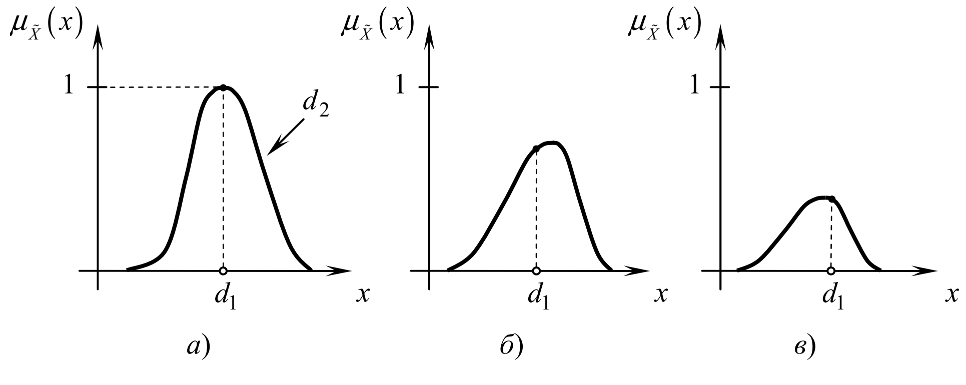

Рис. 9. Двойная гауссова ФП при различных значениях d_1, d_2, d_3 и d_4

ФП из подкласса гауссовых характеризуются гладкостью, простотой реализации и часто используются в механизмах нечеткого вывода. Но, несмотря на свою гладкость, они не позволяют формировать открытые слева или справа характеристические кривые, требуемые для представления лингвистических переменных крайних термов на оси x, выражающих производственные параметры ТП. В этом случае представляется целесообразным использование сигмоидных ФП или полиномиальных ФП. Следует также отметить, что ФП на основе гауссовых кривых имеют некомпактные носители $\tilde{X}_0 = \pm\infty$ (Табл. 2).

Подкласс полиномиальных ФП

Подкласс полиномиальных функций принадлежности в литературе представлен в основном тремя видами функций: z–образной, s–образной и π–образной ФП, предложенными Р. Янгом (R. Jang) и впервые программно реализованными им в системе MatLab.

Заметим, что полиномиальные ФП обладают большей гибкостью благодаря своей особой комбинированной структуре. Среди этих ФП наиболее простыми в вычислительном плане являются z–образные и s–образные функции, которые целесообразно рассмотреть подробнее.

z **–образная ФП** (Рис. 11 а) является кусочно–полиномиальной функцией и представляет собой комбинацию из двух полиномов в виде асимметричной кривой, открытой слева. Данная функция принадлежности описывается функционалом следующего вида [21, 52]:

$$\mu_{\tilde{X}}(x) = \begin{cases} 1, \ \textit{если} \ \ x \in (-\infty, \ d_1]; \\ 1 - 2\cdot(x-d_1)^2 / (d_1 - d_2)^2, \\ \qquad \textit{если} \ \ x \in \left(d_1, \ \dfrac{d_1+d_2}{2}\right]; \\ 2\cdot(d_2 - x)^2 / (d_1-d_2)^2, \\ \qquad \textit{если} \ \ x \in \left(\dfrac{d_1+d_2}{2}, \ d_2\right); \\ 0, \ \textit{если} \ \ x \in [d_2, \ +\infty), \end{cases} \tag{9}$$

где d_1, d_2 — точки перехода характеристической кривой в значения 1 и 0 соответственно.

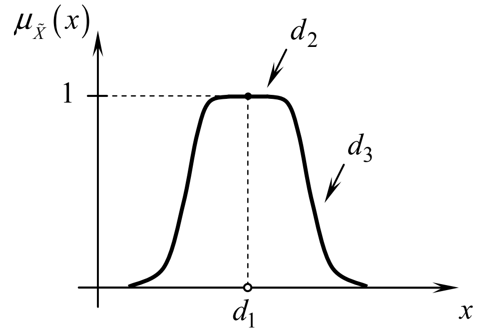

Рис. 10. Обобщенная колоколообразная ФП

Важной особенностью такой составной структуры ФП данного подкласса является возможность увеличения количества сегментов, что повышает степень “гибкости” получаемой составной ФП. Несмотря на свою относительную простоту, полиномиальные ФП недостаточно исследованы с точки зрения влияния управляющих параметров d_i на обеспечение адекватности нечетких моделей и систем управления, построенных на их основе.

s**–образная ФП** (Рис. 11 б) является зеркально симметричной к z–образной ФП (открыта слева) и по принципу построения похожа на нее, но имеет иную запись функционала [21, 52]:

$$\mu_{\tilde{X}}(x) = \begin{cases} 0, \ \textit{если} \ \ x \in (-\infty, \ d_1]; \\ 2\cdot\dfrac{(x-d_1)^2}{(d_2-d_1)^2}, \\ \qquad \textit{если} \ \ x \in \left(d_1, \ \dfrac{d_1+d_2}{2}\right]; \\ 1 - 2\cdot\dfrac{(d_2-x)^2}{(d_2-d_1)^2}, \\ \qquad \textit{если} \ \ x \in \left(\dfrac{d_1+d_2}{2}, \ d_2\right); \\ 1, \ \textit{если} \ \ x \in [d_2, \ +\infty), \end{cases} \tag{10}$$

где d_1, d_2 — точки перехода функции в значения 0 и 1 соответственно.

Функции, описываемые выражениями (9) и (10), содержат два параметра d_1 и d_2 определяющих экстремальные точки на графиках. В случае, если $d_1 < d_2$, кривая z–образной ФП плавно переходит от значения $\mu_{\tilde{X}}(x) = 1$ до

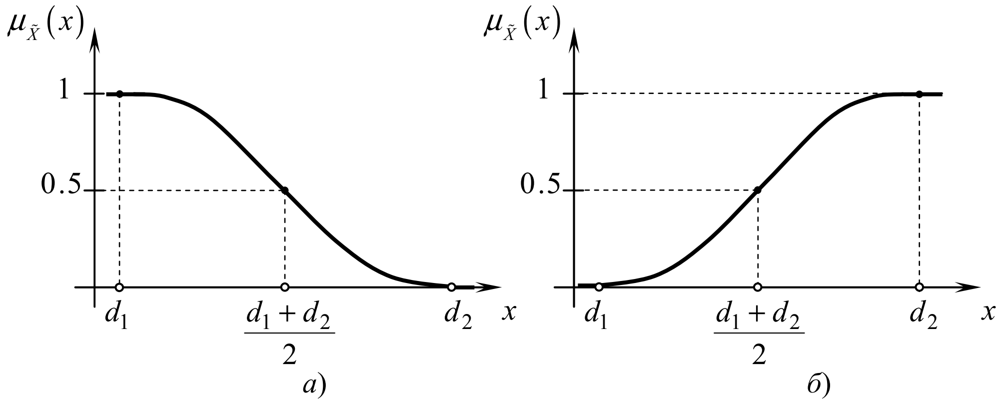

Рис. 11. Графики *z*–образной (*а*) и *s*–образной (*б*) ФП

$\mu_{\tilde{X}}(x)=0$ или соответственно от значения $\mu_{\tilde{X}}(x)=0$ до $\mu_{\tilde{X}}(x)=1$ для *s*–образной ФП. В противном случае, если $d_1 \ge d_2$, кривая делает резкий скачок между экстремальными точками d_1 и d_2 через точку с координатами $((d_1+d_2)/2, 0.5)$, приобретая вид функции "единичного скачка", используемой при построении функций активации нейронных сетей. Каждое из уравнений, входящих в выражения (9) и (10), определяет кривую на четырех отдельных сегментах, составляющих структуру этих ФП (Рис. 11).

π**–образная ФП** (Рис. 12) является особой комбинацией двух предыдущих рассмотренных ФП и характеризуется аналитической зависимостью с использованием индикаторов–условий:

$$\mu_{\tilde{X}}(x)=\left[2\left(\frac{x-d_1}{d_2-d_1}\right)^2 \times 1\left(d_1<x\le\frac{d_1+d_2}{2}\right)+\right.$$
$$+\left(1-2\left(\frac{d_2-x}{d_2-d_1}\right)^2\right)\times 1\left(\frac{d_1+d_2}{2}<x<d_2\right)+$$
$$\left.+1(x\ge d_2)\right]\times\left[1(x\le d_3)\cdot\left(1-2\cdot\left(\frac{x-d_3}{d_3-d_4}\right)^2\right)\times\right. \qquad (11)$$
$$\times 1\left(d_3<x\le\frac{d_3+d_4}{2}\right)+2\cdot\left(\frac{d_4-x}{d_3-d_4}\right)^2\times$$
$$\left.\times 1\left(\frac{d_3+d_4}{2}<x<d_4\right)\right],$$

где d_1, d_2 — параметры, определяющие форму и положение левой половины кривой;
d_3, d_4 — аналогичные параметры для правой половины кривой.

Введение в запись выражения (11) индикаторов $1(\xi)$ с указанными в них условиями в виде неравенств $1(d_1<x\le(d_1+d_2)/2)$, $1((d_1+d_2)/2<x<d_2)$, $1(x\ge d_2)$, $1(d_3<x\le(d_3+d_4)/2)$, $1((d_3+d_4)/2<x<d_4)$, $1(x\le d_3)$ обусловлено требованием непротиворечивости условий, одновременно накладываемых функционалами *z*–образной (9) и *s*–образной (10) ФП на значение переменной x и параметров d_1, d_2, d_3, d_4. Однако, несмотря на кажущуюся сложность, выражение (11) легко реализуется алгоритмически благодаря наличию в языках программирования встроенных математических операций отношения (<, ≤, > и т.д.), результат выполнения которых равен значению 1 в случае их истинности и 0 в противном случае, что с успехом можно использовать для программной реализации данного выражения. В некоторых приложениях π–образная ФП может быть заменена линейной ФП *t*–вида или трапециевидной ФП [27].

Все рассмотренные ФП содержат не более четырех параметров настройки, определяющих форму и положение характеристической кривой. В свою очередь, при параметрической и структурной идентификации нечеткой модели возникают ситуации, когда требуется выполнить подстройку лишь определенного участка (сегмента) используемой ФП с тем, чтобы

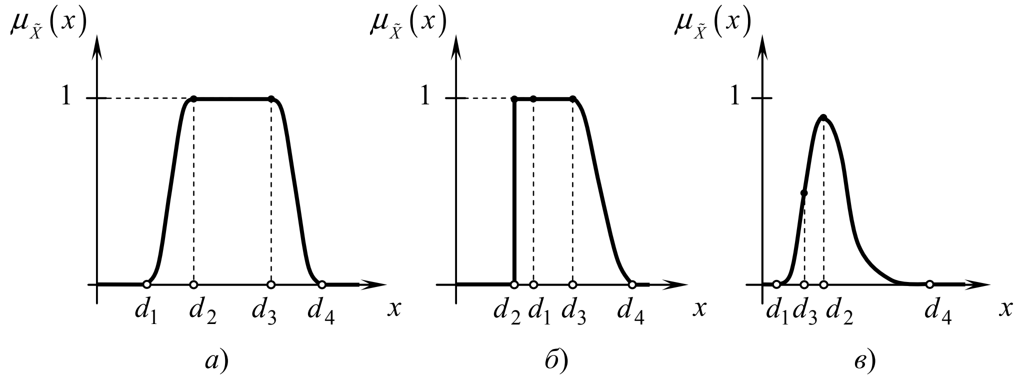

Рис. 12. Графики π –образной ФП при разных значениях d_1, d_2, d_3 и d_4

избежать операции разбиения параметрического пространства переменной и получения дополнительного правила, усложняющего получаемую модель. Следовательно, используемая ФП должна иметь сегментированную структуру и допускать выполнение подстройки выбранного сегмента ФП, при этом остальные ее сегменты должны оставаться неизменными. Кроме того, такая ФП должна содержать ядро, положение и длину которого можно регулировать путем изменения соответствующих параметров настройки. Предъявленным требованиям полностью отвечают лишь три последние из рассмотренных нелинейных ФП: z–образная, s–образная и π–образная. Остальные ФП либо не содержат ядра, либо их параметры настройки не позволяют локально изменять вид кривой на произвольном сегменте ФП, не затрагивая соседние участки. Также нецелесообразно использование ФП γ–вида, t–вида и линейных трапециевидных ФП в связи с линейностью их функционалов. Таким образом, при построении нечетких моделей и систем управления ТП и техническими объектами целесообразно использовать функции принадлежности на основе семейства полиномиальных кривых.

С другой стороны, эти ФП содержат не более двух (z –, s –образная) или трех (π–образная) сегментов, что ограничивает возможности их локальной настройки. Одним из путей преодоления указанных ограничений является использование ФП, содержащей более двух изолированных (по параметрам) сегментов. Такой функцией является нелинейная трапециевидная ФП, именуемая шаблонной (Рис. 13), впервые предложенная в работе [53].

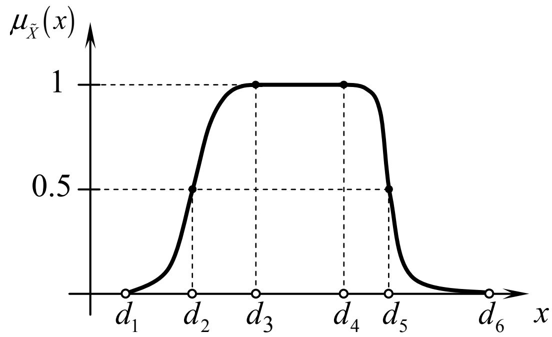

Рис. 13. Трапецеидальная полиномиальная ФП

Аналитическое выражение шаблонной ФП (Рис. 13) имеет следующую структуру:

$$\mu_{\tilde{X}}(x)=\begin{cases}0,\ \textit{если}\ \ x\in(-\infty,\ d_1];\\ 0.5\cdot\left((x-d_1)/(d_2-d_1)\right)^{d_7},\\ \qquad \textit{если}\ \ x\in(d_1,\ d_2];\\ 1-0.5\cdot\left((d_3-x)/(d_3-d_2)\right)^{d_7},\\ \qquad \textit{если}\ \ x\in(d_2,\ d_3];\\ 1,\quad \textit{если}\ \ x\in(d_3,\ d_4];\\ 1-0.5\cdot\left((x-d_4)/(d_5-d_4)\right)^{d_7},\\ \qquad \textit{если}\ \ x\in(d_4,\ d_5];\\ 0.5\cdot\left((d_6-x)/(d_6-d_5)\right)^{d_7},\\ \qquad \textit{если}\ \ x\in(d_5,\ d_6];\\ 0,\ \textit{если}\ \ x\in(d_6,\ +\infty),\end{cases}\qquad (12)$$

где d_1, d_6 — точки, задающие носитель $\tilde{X}_0$ функции принадлежности;
d_2, d_3, d_4, d_5, d_7 — точки настройки сегментов ФП.

Как видно из выражения (12), структура этой ФП состоит из пяти сегментов, на четырех из которых определены выражения полиномиальных кривых с соответствующими условиями их стыковки на границах сегментов. К ее особенностям можно отнести гибкость, обусловленную наличием семи параметров d_i, $i = \overline{1,7}$ ("степеней свободы"), а также независимостью аналитических выражений на соответствующих сегментах, что позволяет более точно характеризовать нечеткую переменную, выражаемую этой ФП, по сравнению с ранее рассмотренными ФП. При помощи шаблонной ФП становится возможным характеризовать разнообразные нечеткие подмножества и более точно выполнять модификацию представляющих их нечетких переменных. Это в конечном итоге может положительно сказаться на результатах регулирования параметров ТП и производственных объектов системами, построенными с использованием данной ФП.

Заключение

Функции принадлежности пока остаются малоисследованными компонентами, составляющими основу этапа фаззификации при функционировании интеллектуальных систем. Однако лишь ФП и нечеткие правила, строящиеся на их основе, обладают способностью аккумулирования качественной информации о параметрах ТП. В работах исследователей традиционно малое внимание уделяется данной тематике и, что наиболее важно, еще недостаточно изучены способы увеличения аккумулирующих способностей ФП [20, 54]. Для расширения возможностей формализации (аккумулирования) качественной информации в работе [56] автором предлагается концепция построения ФП на основе слабоосциллирующих математических многочленов. Четкие одномерные ФП, рассмотренные в данной работе, охватывают практически весь перечень функций, применяемых в алгоритмах систем нечеткого управления и составляющих "интеллектуальную" основу АСУТП современных производств. Кроме того, эти ФП используются и в алгоритмах нечеткого вывода известных программных пакетов, предназначенных для построения моделей.

Литература

1. Заде Л.А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. — М.: Мир, 1976. — 165 с.
2. Mendel J.M. Uncertain rule–based fuzzy logic systems: introduction and new directions. Prentice–Hall, PTR, Upper Saddle River, NJ, 2001. — 555 p.
3. Zadeh L.A. Fuzzy Sets // Inform. and Contr. — 1965. — № 8. — P.338–353.
4. Рыжов А.П. Элементы теории нечетких множеств и измерения нечеткости. М.: Диалог–МГУ, 1998. — 116 с.
5. Халов Е.А. Виды и свойства одномерных функций принадлежности нейро–нечетких систем моделирования и управления // Вестник ЛГТУ–ЛЭГИ. — 2009. — №1. — С. 32–43.
6. Нариньяни А.С. Недоопределенность в системе представления и обработки знаний // Техническая кибернетика. — 1986. — № 5. — С. 3–28.
7. Кудинов Ю.И., Венков А.Г., Келина А.Ю. Моделирование технологических и экологических процессов: Монография. — Липецк: ЛЭГИ, 2001. — 131 с.
8. Халов Е.А. Методы управления технологическими процессами в условиях неопределенности // Управление большими системами: сборник трудов V Всероссийской школы–семинара молодых ученых. — Т. 2. — Липецк, ЛГТУ, 2008. — С. 199–206.
9. Беллман, Р. Принятие решений в расплывчатых условиях // В кн.: Вопросы анализа и процедуры принятия решений. — М.:Мир, 1976. — С. 172–215.
10. Борисов А.Н. и др. Модели принятия решений на основе лингвистической переменной. — Рига: Зинатне, 1982. — 256 с.
11. Кандель А., Байатт У.Д. Нечеткие множества, нечеткая алгебра, нечеткая статистика // ТИИЭР. — 1978. — Т.66. — № 12. — С.37–51.
12. Гудмен И. Нечеткие множества как классы эквивалентности случайных множеств. В сб.: Нечеткие множества и теория возможностей. — М.: Радио и связь, 1986. — С.241–264.
13. Круглов В.В., Дли М.И., Голунов Р.Ю. Нечеткая логика и искусственные нейронные сети: Учеб. пособие. — М.: Горячая линия–Телеком, 2001. — 224 с.
14. Зуенков М.А. Приближение характеристических функций нечетких множеств // Автоматика и телемеханика. — 1984. — № 10. — С.138–149.
15. Норвич А.М., Турксен И.Б. Построение функций принадлежности. В сб.: Нечеткие множества и теория возможностей. — М.: Радио и связь, 1986. — С.64–71.
16. Prade H. A computional approach to approximate and plausible reasoning with applications to expert systems // IEEE Trans. Pattern Anal. and Mach. Intel. — 1985. — № 3. — P.260–283.
17. Nozaki K., Morisawa T., Ishibuchi H. Adjusting membership functions in fuzzy rule–based classification systems // Proc. 3rd European Congress on Fuzzy and Intelligent Technologies, EUFIT'95, Aachen, Germany. — 1995. — V.1. — P.615–619.

18. Алтунин А.Е., Востров Н.Н. Методы определения функций принадлежности в теории размытых множеств // Труды ЗапсибНИГНИ. — Тюмень, 1980. — Вып.154. — С.62–72.
19. Ichikawa R., Nishimura K., Kunugi M., Shimada K. Auto–tuning method of fuzzy membership functions using neural network learning algorithm // Proc. 2nd Conf. on Fuzzy Logic and Neural Networks. — 1992. — P.345–348.
20. Халов Е.А. Особенности построения одномерных функций принадлежности нейро–нечетких систем моделирования и управления // Вестник ЛГТУ–ЛЭГИ. – 2009. – №1. – С. 44–50.
21. Дьяконов В.П., Абраменкова И.В., Круглов В.В. MATLAB 5.3.1 с пакетами расширений. Под ред. проф. В.П. Дьяконова. — М.: Нолидж, 2001. — 880 с.
22. Заде Л.А. Размытые множества и их применение в распознавании образов и кластер–анализе. В сб.: Классификация и кластер. — М.: Мир, 1980. — С.208–247.
23. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств. — М.: Радио и связь, 1982. — 432 с.
24. Zimmermann H.J., Zysno P. Quantifying vagueness in decision models // European Journal of Operational Reseach. — 1985. — № 22. — P.148–158.
25. Гусев Л.А., Смирнова И.М. Размытые множества. Теория и приложения (обзор) // Автоматика и телемеханика. — 1973. — № 5. — С.66–85.
26. Sugeno M., Kang G.T. Structure identification of fuzzy model // Fuzzy Sets and Systems. — 1988. — № 28. — P.15–33.
27. Халов, Е.А. Одномерные многопараметрические функции принадлежности в задачах нечеткого моделирования и управления // Мехатроника, автоматизация, управление. Приложение. — 2007. — № 4. — С.2–11.
28. Jang J.–S.R. ANFIS: Adaptive–Network–Based Fuzzy Inference System // IEEE Trans. Systems Man and Cybernet. — 1993. — V.23. — № 3. — P.665–685.
29. Chang W.–J., Sun C.–C. Constrained fuzzy controller design of discrete Takagi–Sugeno fuzzy models // Fuzzy Sets and Systems. — 2003. — № 133. — P.37–55.
30. Oh S.–K., Pedrycz W., Parka H.–S. Hybrid identification in fuzzy–neural networks // Fuzzy Sets and Systems. — 2003. — № 138. — P.399–426.
31. James J. Buckley, Esfandiar Eslami, Yoichi Hayashi. Solving fuzzy equations using neural nets // Fuzzy Sets and Systems. — 1997. — № 86. — P.271–278.
32. Joo Y.H., Hwang H.S., Kim K.B., Woo K.B. Fuzzy system modeling by fuzzy partition and GA hybrid schemes // Fuzzy Sets and Systems. — 1997. — № 86. — P.279–288.
33. Wang L.–X. Universal approximation by hierarchical fuzzy systems // Fuzzy Sets and Systems. — 1998. — № 93. — P.223–230.
34. Friedman M., Ming M., Kandel A. Fuzzy linear systems // Fuzzy Sets and Systems. — 1998. — № 96. — P.201–209.
35. Круглов В.В., Борисов В.В. Искусственные нейронные сети. Теория и практика. — М.: Горячая линия–Телеком, 2001. — 382 с.
36. Ekel P., Pedrycz W., Schinzinger R. A general approach to solving a wide class of fuzzy optimization problems // Fuzzy Sets and Systems. — 1998. — № 97. — P.49–66.
37. Lekova A., Mikhailov L., Boyadjiev D., Nabout A. Redundant fuzzy rules exclusion by genetic algorithms // Fuzzy Sets and Systems. — 1998. — № 100. — P.235–243.
38. Bastian A. Identifying fuzzy models utilizing genetic programming // Fuzzy Sets and Systems. — 2000. — № 113. — P.333–350.
39. Hoffmann F. Combining boosting and evolutionary algorithms for learning of fuzzy classification rules // Fuzzy Sets and Systems. — 2004. — № 141. — P.47–58.
40. Ito Y. Representation of functions by superposition of a step or sigmoidal function and their applications to neural network theory // Neural Networks. — 1991. — V.4. — P.385–394.
41. Щербаков М.А. Искусственные нейронные сети: Конспект лекций. — Пенза: Изд–во Пенз. гос. техн. ун–та, 1996. — 44 с.
42. Jang J.S.R., Sun C.T., Functional equivalence between radial basis function networks and fuzzy inference system // IEEE Trans. Neural Networks. — 1993. — V.4(1). — P.156–159.
43. Shi Y., Mizumoto M. Some considerations on conventional neuro–fuzzy learning algorithms by gradient descent method // Fuzzy Sets and Systems. — 2000. — № 112. — P.51–63.
44. Chen J.–Q., Xi Y.–G., Zhang Z.–J. A clustering algorithm for fuzzy model identification // Fuzzy Sets and Systems. — 1998. — № 98. — P.319–329.
45. Park I., Sandberg I.W., Universal approximation using radial–basis–function networks // Neural Comput. — 1991. — № 3. — P.246–255.
46. Lee C.W., Shin Y.C. Construction of fuzzy systems using least–squares method and genetic algorithm // Fuzzy Sets and Systems. — 2003. — № 137. — P.297–323.
47. Angelov P.P. An evolutionary approach to fuzzy rule–based model synthesis using indices for rules // Fuzzy Sets and Systems. — 2003. — № 137. — P.325–338.
48. Lin Y., Cunningham G.A. A new approach to fuzzy–neural system modeling // IEEE Trans. Fuzzy Systems. — 1995. — V.3. — № 2. — P.190–197.
49. Shi Y., Mizumoto M. An improvement of neuro–fuzzy learning algorithm for tuning fuzzy rules // Fuzzy Sets and Systems. — 2001. — № 118. — P.339–350.
50. Mastorocostas P., Theocharis J. FUNCOM: A constrained learning algorithm for fuzzy neural networks // Fuzzy Sets and Systems. — 2000. — № 112. — P.1–26.
51. Park J.–H., Seo S.–J., Park G.–T. Robust adaptive fuzzy controller for nonlinear system using estimation of bounds for approximation errors // Fuzzy Sets and Systems. — 2003. — № 133. — P.19–36.
52. Рутковская Д., Пилиньский М., Рутковский Л. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы: Пер. с польск. И.Д. Рудинского. — М.: Горячая линия–Телеком, 2004. — 452 с.
53. Ali Y.M., Zhang L. A methodology for fuzzy modeling of engineering systems // Fuzzy Sets and Systems. — 2001. — № 118. — P.181–197.

55. Халов Е.А., Гвозденко Н.П. О расширении класса допустимых кривых для построения функций принадлежности // Управление большими системами: сборник трудов V Всероссийской школы–семинара молодых ученых. — Т. 1. — Липецк, ЛГТУ, 2008. — С. 92–99.
56. Халов Е.А. К вопросу о возможности использования алгебраических многочленов при построении функций принадлежности нейро–нечетких систем моделирования и управления // Вестник кибернетики. — 2009. — № 8. — С. 89–96.

Халов Евгений Александрович. Заведующий лабораторией кафедры информатики Липецкого государственного технического университета, член Липецкого регионального отделения Российской ассоциации искусственного интеллекта (РАИИ). Окончил Липецкий государственный технический университет в 1998 году. Имеет 30 научных публикаций. Область научных интересов: нейро-нечеткое моделирование, построение многопараметрических функций принадлежности нечетких интеллектуальных систем. E-mail: jek@lipetsk.ru