

Обобщенный принцип Эджворта—Парето в терминах функций выбора*

В. Д. Ногин¹

С XIX в. знаменитый принцип Эджворта—Парето является основой решения широкого класса задач многокритериального выбора. В данной работе этот принцип формулируется и доказывается в наиболее общем виде в терминах функций выбора.

Введение

В 1881 г. английским экономистом ирландского происхождения Френсисом Эджвортом была предложена интерпретация модели экономики чистого обмена с двумя участниками, которая впоследствии получила наименование «ящик Эджворта» (см., например, [Экланд, 1983]). Рассуждения, использованные автором при анализе указанной модели в случае двух критериев, по существу опирались на понятие, которое в настоящее время известно как «оптимальность по Парето». Последнее наименование связано с именем итальянского экономиста и социолога Вильфредо Парето [Pareto, 1909], который ввел его позже Ф. Эджворта. Напомним, что парето-оптимальным называют такое состояние экономики, которое не может быть улучшено ни одним из участников без ухудшения состояния по крайней мере какого-то одного другого участника. Парето-оптимальные состояния составляют множество (оптимумов) Парето.

Понятие оптимума Парето оказалось чрезвычайно полезным и плодотворным. Исследователи придают ему исключительное значение. В подтверждение приведем следующие цитаты:

«Оптимальность по Парето можно интерпретировать... как критерий хорошего управления» [Экланд, 1983, с. 58].

* Работа частично финансируется проектом РФФИ 05-01-00310, грантом Президента Российской Федерации по поддержке научных школ НШ 1964.2003.1.

¹ 198504, Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр., 35, Санкт-Петербургский государственный университет, noghin@mail.infos.ru.

«...Принцип Парето не оспаривается никем из исследователей; наоборот, не удовлетворяющие ему процедуры считаются плохими» [Миркин, 1974, с. 142].

«...Оптимальными альтернативами принято считать альтернативы, оптимальные по Парето...» [Вилкас, 1990, с. 209].

«Оптимальность по Парето иногда называют „экономической эффективностью“» [Сен, 1996, с. 54];

«...Слова „эффективность экономического состояния“ имеют вполне определенное содержание... вместо слов „эффективные состояния или точки“, часто говорят „состояния, оптимальные по Парето“» [Марков, 1982, с. 46].

«Эффективность рассматривается тем самым как необходимое условие оптимальности и выступает в качестве нормативного требования, предъявляемого к результатам многокритериального выбора» [Полищук, 1984, с. 34].

«Оптимальность по Парето в задачах рационального выбора — свойство альтернатив, которое обычно признается необходимым для решения в случае многокритериальности...» [Экономико-математический словарь, 2003, с. 364].

«...Задача экономиста — быть миссионером, несущим в самые отдаленные уголки общества то, что ему известно относительно парето-оптимальности» [Blinder, 1982].

Следует отметить, что в научной литературе существует несколько ключевых словосочетаний, связанных с оптимальностью по Парето: аксиома Парето, критерий Парето и принцип Парето, который в знак уважения к исследованиям Ф. Эджворта часто называют принципом Эджворта—Парето. При этом различные авторы в одних и тех же ситуациях используют разную терминологию. Наиболее обоснованная точка зрения состоит в том, что аксиомой (реже — критерием) Парето называют определенное свойство выбора из двух вариантов, соответствующие значения векторного критерия которых связаны специальным неравенством. Тогда как принцип Эджворта—Парето указывает свойство выбора из произвольного (не обязательно двухэлементного) множества.

Принятие аксиомы Парето и использование принципа Эджворта—Парето многими исследователями часто воспринимается настолько очевидным и естественным, что не требует, на их взгляд, никакого обоснования или специальной аргументации. Так например, при решении задач многокритериальной оптимизации, как правило, считается,

что «...первым естественным шагом следует считать выделение области компромиссов (или множества решений, оптимальных по Парето)» ([Борисов, 1972, с. 122]). Тем самым, по существу утверждается, что наилучший выбор при наличии нескольких критериев *всегда* следует осуществлять в пределах множества Парето. Такой подход к выбору можно назвать «наивным» принципом Эджворта—Парето. Именно им пользовались и продолжают пользоваться тысячи исследователей, не подозревая, что для некоторых из них наилучший выбор, возможно, следует искать не только во множестве Парето, но и за его пределами.

С другой стороны, некоторые ученые постепенно пришли к осознанию того, что этот принцип не является универсальным, т. е. применимым во всех без исключения многокритериальных задачах: «Однако использование оптимальности по Парето как *необходимого* (выделено мной. — В. Н.) условия рациональности, приемлемости распределения встречает возражения с содержательной точки зрения...» (см. [Экономико-математический словарь, 2003, с. 364]).

В этой связи возникла настоятельная необходимость провести границу, которая строго отделила бы задачи многокритериального выбора, в которых его использование является обоснованным, от тех задач, где наилучшими не обязательно являются решения, оптимальные по Парето. Другими словами, возникла потребность от «наивного» принципа Эджворта—Парето перейти к «аксиоматическому», подобно тому, как это произошло в начале XX в. теорией множеств, когда она была воздвигнута на прочный аксиоматический фундамент.

Для числовых критериев первая попытка аксиоматизации принципа Эджворта—Парето была предпринята автором [Ногин, 2002 а, б]. Данная работа представляет изложение аксиоматического принципа Эджворта—Парето в наиболее общей форме в терминах теории выбора [Айзерман и др., 1990; Макаров и др. 1982], причем для случая, когда используемые критерии не обязательно являются числовыми.

1. Модель многокритериального выбора

Пусть имеются *шкалы* (непустые абстрактные множества) $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ ($m > 1$). Они могут быть как конечными, так и бесконечными. На каждом множестве Y_i будем считать заданным некоторое бинарное отношение f_i , обладающее свойствами иррефлексивности, транзитивности и слабой связности $i = 1, 2, \dots, m$. Слабая связность отношения f_i означает, что для любых двух элементов $s, t \in Y_i$, $s \neq t$, выполняется либо соотношение

$s f_i t$, либо соотношение $t f_i s$. Отношение f_i можно трактовать как *отношение строгого предпочтения* на множестве значений i -го критерия. Оно асимметрично.

Введем в рассмотрение декартово произведение $\hat{Y} = Y_1 \times Y_2 \times \dots \times Y_m$. Его элементы называют *вариантами*. Выбор осуществляется из множества $A \subset \hat{Y}$ в соответствии с определенной функцией выбора; он представляет собой некоторое подмножество множества A и обозначается далее $Sel(A)$. Напомним, что однозначное отображение $Sel : 2^{\hat{Y}} \rightarrow 2^{\hat{Y}}$ называют *функцией выбора*, если для любого подмножества $A \subset \hat{Y}$, выполняется включение $Sel(A) \subset A$. По определению функции выбора в случае $y' \neq y''$ одновременно равенства $Sel(\{y', y''\}) = \{y'\}$, $Sel(\{y', y''\}) = \{y''\}$ выполняться не могут.

Заметим, что в общем случае для некоторых A возможно равенство $Sel(A) = \emptyset$, которое означает, что выбор является пустым. Другими словами, при предъявлении некоторых A вместо реального выбора из этого множества может иметь место «отказ от выбора».

2. Аксиомы разумного выбора

Сформулируем определенные требования к функциям выбора, которые можно назвать аксиомами разумного выбора. Как будет показано в следующих разделах, при выполнении этих требований всегда имеет место принцип Эджворта—Парето. Тем самым, аксиомы разумного выбора выделяют определенный достаточно широкий класс многокритериальных задач, в которых успешный выбор обязательно должен осуществляться в пределах множества Парето. Это означает, для указанного класса задач оптимальность по Парето является *необходимым* условием приемлемости выбираемых вариантов. Тогда как за пределами этого класса (т. е. тогда, когда хотя бы одна из аксиом разумного выбора нарушается) наилучший выбор не обязан быть парето-оптимальным.

Аксиома 1. Для любых трех вариантов $y', y'', y''' \in \hat{Y}$, удовлетворяющих равенствам $Sel(\{y', y''\}) = \{y'\}$ и $Sel(\{y'', y'''\}) = \{y''\}$, всегда выполняется $Sel(\{y', y'''\}) = \{y'\}$.

Аксиома 1 устанавливает определенную естественную последовательность (логичность) в ходе осуществления выбора. Это свойство на языке бинарных отношений предпочтения носит название транзитивности.

Следует однако заметить, что при определенных обстоятельствах поведение человека, осуществляющего выбор, может оказаться несовместимым с аксиомой 1. Дело в том, что человек не всегда ведет себя разумно! Специалистам в области принятия решений давно известны случаи нарушения некоторыми индивидами свойства транзитивности, когда из трех предлагаемых решений первое предпочитается второму, второе предпочитается третьему, но при выборе из первого и третьего предпочтение отдается не первому, а третьему решению.

Аксиома 2. Для любых двух вариантов $y', y'' \in \hat{Y}$, таких, что

$$y' = (y'_1, \dots, y'_{i-1}, y'_i, y'_{i+1}, \dots, y'_m), \\ y'' = (y'_1, \dots, y'_{i-1}, y''_i, y'_{i+1}, \dots, y'_m), \quad y'_i \text{ f}_i y''_i,$$

всегда выполняется равенство $Sel(\{y', y''\}) = \{y'\}$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Согласно аксиоме 2 вариант (и только этот вариант), являющийся более предпочтительным по какой-то одной компоненте по сравнению с другим вариантом при прочих равных условиях (т. е. при совпадении всех остальных компонент) обязательно будет выбран из данной пары.

Определение 1. Условимся говорить, что i -й критерий независим по предпочтению от остальных критериев, если из выполнения для некоторых двух вариантов $a = (a_1, \dots, a_{i-1}, s, a_{i+1}, \dots, a_m)$ и $b = (a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_m)$, $s \neq t$, принадлежащих множеству $\hat{Y}$ и связанных соотношением $Sel(\{a, b\}) = \{a\}$, всегда следует равенство $Sel(\{a', b'\}) = \{a'\}$, в котором варианты $a' = (a'_1, \dots, a'_{i-1}, s, a'_{i+1}, \dots, a'_m)$ и $b' = (a'_1, \dots, a'_{i-1}, t, a'_{i+1}, \dots, a'_m)$ образованы с помощью произвольных компонент $a'_1, \dots, a'_{i-1}, a'_{i+1}, \dots, a'_m$, удовлетворяющих включению $a', b' \in \hat{Y}$.

Утверждение. Если выполнена аксиома 2, то каждый критерий независим по предпочтению от остальных.

Доказательство. Зафиксируем произвольный номер $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Пусть по условию для некоторых $a, b \in \hat{Y}$ имеет место равенство $Sel(\{a, b\}) = \{a\}$. Благодаря $s \neq t$ и слабой связности отношения f_i , могут иметь место лишь два случая: $t \text{ f}_i s$ или $s \text{ f}_i t$. Первый из них на самом деле невозможен, так как тогда на основании аксиомы 2 выполнялось бы равенство $Sel(\{a, b\}) = \{b\}$, противоречащее условиям

$Sel(\{a, b\}) = \{a\}$ и $a \neq b$. Во втором случае согласно той же аксиоме 2 равенство $Sel(\{a', b'\}) = \{a'\}$ всегда будет выполнено для всех $a', b' \in \hat{Y}$ из определения 1. Утверждение доказано.

Аксиомы 1–2 накладывают определенные ограничения на функцию выбора в пределах всего множества $\hat{Y}$, тогда как следующая аксиома относится к выбору из фиксированного подмножества вариантов.

Зафиксируем некоторое непустое подмножество $Y \subset \hat{Y}$, которое будем называть *множеством возможных вариантов*.

Всюду далее будем считать, что $Sel(Y) \neq \emptyset$. Это означает, что какой-то выбор из множества возможных вариантов Y обязательно должен быть произведен. При этом выбранными могут оказаться один, несколько или же бесконечное число вариантов.

Аксиома 3. Для любой пары вариантов $y', y'' \in Y, y' \neq y''$, таких, что $Sel(\{y', y''\}) = \{y'\}$, всегда выполняется $y'' \notin Sel(Y)$.

Аксиома 3 требует, чтобы вариант, не выбираемый в некоторой паре, не выбирался и из всего множества возможных вариантов Y .

Эта аксиома определенным образом связана с *обратным условием Кондорсе* [Айзерман и др. 1990], которое формулируется следующим образом:

$$y'' \in Sel(Y) \Rightarrow y'' \in Sel(\{y', y''\}) \text{ для всех } y' \in Y.$$

Заметим, что включение $y'' \in Sel(\{y', y''\})$ в общем случае не исключает возможности $y' \in Sel(\{y', y''\})$.

Очевидно, обратное условие Кондорсе для множества Y может быть переписано в эквивалентной форме:

$$y'' \notin Sel(\{y', y''\}) \text{ для некоторого } y' \in Y \Rightarrow y'' \notin Sel(Y), \quad (1)$$

где $y'' \in Y$. Сравнивая аксиому 3 с импликацией (1) и принимая во внимание, что

$$Sel(\{y', y''\}) = \{y'\}, y' \neq y'' \Rightarrow y'' \notin Sel(\{y', y''\}),$$

можно сделать вывод о том, что выполнение обратного условия Кондорсе влечет справедливость аксиомы 3, но не наоборот.

3. Аксиома Парето

Прежде чем формулировать аксиому Парето, введем следующее определение.

Определение 2. Бинарное отношение $>$, заданное на декартовом произведении $\hat{Y}$ при помощи эквивалентности

$$y' > y'' \Leftrightarrow [(y'_i \text{ f }_i y''_i \text{ или } y'_i = y''_i) \text{ для всех } i=1,2,\dots,m] \text{ и } y' \neq y'',$$

где $y' = (y'_1, y'_2, \dots, y'_m) \in \hat{Y}$, $y'' = (y''_1, y''_2, \dots, y''_m) \in \hat{Y}$, будем называть *отношением Парето*.

Аксиома Парето. Для двух любых вариантов $y', y'' \in Y$, связанных соотношением $y' > y''$, всегда имеет место равенство

$$Sel(\{y', y''\}) = \{y'\}.$$

Как видим, аксиома Парето выражает собой определенное правило выбора из двух вариантов, находящихся друг с другом в отношении Парето. Согласно этому правилу если один вариант является более предпочтительным по сравнению с другим по какому-то одному или нескольким компонентам, то при прочих равных условиях (т. е. при совпадении всех остальных компонент данных двух вариантов) выбранным должен оказаться именно тот вариант, у которого имеются более предпочтительные компоненты. С точки зрения здравого смысла такое правило представляется вполне естественным.

Очевидно, из аксиомы Парето следует выполнение аксиомы 1, но не наоборот.

Лемма. Аксиома Парето является следствием аксиом 1 и 2.

Доказательство. Предположим, что для некоторых произвольно выбранных двух вариантов $y', y'' \in Y$ выполняется соотношение $y' > y''$. Не уменьшая общности последующего рассмотрения, предположим, что выполнение $y' > y''$ означает, что для некоторого $1 \leq l \leq m$ справедливо

$$y'_k \text{ f }_k y''_k, \quad k = 1, 2, \dots, l; \quad y'_k = y''_k, \quad k = l + 1, \dots, m.$$

Благодаря аксиоме 2 имеем равенства:

$$Sel(\{(y'_1, y'_2, \dots, y'_l, \dots, y'_m), (y''_1, y''_2, \dots, y''_l, \dots, y''_m)\}) = \{(y'_1, y'_2, \dots, y'_l, \dots, y'_m)\},$$

$$Sel(\{(y_1'', y_2', \dots, y_l', \dots, y_m'), (y_1'', y_2'', \dots, y_l', \dots, y_m')\}) = \{(y_1'', y_2', \dots, y_l', \dots, y_m')\},$$

$$\dots\dots\dots$$

$$Sel(\{(y_1'', y_2'', \dots, y_{l-1}'', y_l', \dots, y_m'), (y_1'', y_2'', \dots, y_l'', y_{l+1}', \dots, y_m')\}) = \{(y_1'', y_2'', \dots, y_{l-1}'', y_l', \dots, y_m')\}.$$

Отсюда, последовательно применяя аксиому 1, получаем

$$Sel(\{(y_1', y_2', \dots, y_l', \dots, y_m'), (y_1'', y_2'', \dots, y_l'', y_{l+1}', \dots, y_m')\}) = \{(y_1', y_2', \dots, y_l', \dots, y_m')\}. \quad (2)$$

А так как $y_k' = y_k''$, $k = l + 1, \dots, m$, то (2) принимает вид требуемого равенства $Sel(\{y', y''\}) = \{y'\}$.

4. Принцип Эджворта—Парето

Далее понадобятся два понятия, непосредственно связанные с множеством возможных вариантов Y .

Определение 3. *Множество парето-оптимальных вариантов (множество Парето) обозначается $P(Y)$ и определяется равенством*

$$P(Y) = \{y^* \in Y \mid \text{не существует } y \in Y, \text{ такого, что } y > y^*\}.$$

Определение 4. *Множество недоминируемых вариантов обозначим $Ndom(Y)$ и определим равенством*

$$Ndom(Y) = \{y^* \in Y \mid \text{не существует } y \in Y, y \neq y^*, \text{ такого, что } Sel(\{y, y^*\}) = \{y\}\}.$$

Теорема (принцип Эджворта—Парето). *Для любой функции выбора $Sel(\cdot)$, подчиненной аксиомам 1–3, справедливо включение*

$$Sel(Y) \subset P(Y). \quad (3)$$

Доказательство. Зафиксируем произвольную функцию выбора $Sel(\cdot)$, удовлетворяющую аксиомам 1–3.

Сначала установим справедливость включения

$$Z\text{-}Sel(Y) \subset Ndom(Y). \quad (4)$$

С этой целью произвольно выберем вариант $y'' \in Sel(Y)$ и предположим противное: $y'' \notin Ndom(Y)$. Тогда по определению 4 найдется такой

вариант $y' \in Y$, что $y' \neq y''$ и $Sel(\{y', y''\}) = \{y'\}$. Благодаря аксиоме 3 последнее равенство влечет $y'' \notin Sel(Y)$. Это противоречит начальному допущению $y'' \in Sel(Y)$. Таким образом, включение (4) доказано.

Теперь проверим включение

$$Ndom(Y) \subset P(Y). \quad (5)$$

Для этого произвольно выберем вариант $y \in Ndom(Y)$. Допустим противное: $y \notin P(Y)$. Отсюда по определению 3 следует, что найдется такой вариант $y' \in Y$, для которого верно соотношение $y' > y$. В условиях доказываемой теоремы благодаря лемме справедлива аксиома Парето. На основании этой аксиомы из соотношения $y' > y$ вытекает равенство $Sel(\{y, y'\}) = \{y'\}$, причем $y \neq y'$. Следовательно, $y \notin Ndom(Y)$. Полученное не совместимо с начальным предположением $y \in Ndom(Y)$. Таким образом, включение (5) выполнено. Из (4)–(5) немедленно следует (3). Теорема доказана.

Замечание. Как указано ранее, в (3) считается, что $Sel(Y) \neq \emptyset$.

Теорему 1 можно выразить следующим образом: *произвольный выбор из множества возможных вариантов, подчиненный аксиомам 1–3, должен осуществляться в пределах множества Парето.*

В целом требования, накладываемые аксиомами 1–3 на характер осуществляемого выбора, можно интерпретировать как разумное поведение лица, принимающего решение (ЛПР) в процессе выбора. Поэтому согласно доказанной теореме принцип Эджворта—Парето всегда выполняется, если поведение ЛПР разумно. А поскольку именно разумное поведение является наиболее распространенным, то этим обстоятельством можно объяснить чрезвычайно широкое и успешное применение «наивного» принципа Эджворта—Парето в принятии решений, теории игр, математической экономике и других областях, когда в *любой* задаче многокритериального выбора поиск наилучшего решения предлагается ограничить лишь пределами множества Парето.

5. Минимальность набора аксиом разумного выбора

Приведем примеры, в которых отказ от хотя бы одной из трех аксиом разумного выбора приводит к нарушению принципа Эджворта—Парето.

Пример 1. Пусть $Y_1 = \{a_1, b_1\}$, $Y_2 = \{a_2\}$, $a_1 \text{ f }_1 b_1$, $Y = \hat{Y} = \{y^1, y^2\}$, $y^1 = (a_1, a_2)$, $y^2 = (b_1, a_2)$. Здесь аксиома 1 тривиальным образом выполняется. Кроме того, $y^1 = (a_1, a_2) > (b_1, a_2) = y^2$, так как $a_1 \text{ f }_1 b_1$. Следовательно, $P(Y) = \{y^1\}$. Рассмотрим функцию выбора $Sel(\cdot)$, для которой $Sel(\{y^1\}) = \{y^1\}$, $Sel(\{y^2\}) = \{y^2\}$, $Sel(Y) = \{y^2\}$. Для нее аксиома 3 очевидным образом выполняется, но включение (3) нарушено, поскольку не выполняется аксиома 2.

Пример 2. Пусть $Y_1 = \{a_1, b_1, c_1\}$, $Y_2 = \{a_2\}$, $a_1 \text{ f }_1 b_1$, $b_1 \text{ f }_1 c_1$, $Y = \hat{Y} = \{y^1, y^2, y^3\}$, $y^1 = (a_1, a_2)$, $y^2 = (b_1, a_2)$, $y^3 = (c_1, a_2)$. Здесь $y^1 = (a_1, a_2) > (b_1, a_2) = y^2$ и $y^2 = (b_1, a_2) > (c_1, a_2) = y^3$. Поэтому имеет место равенство $P(Y) = \{y^1\}$. Рассмотрим функцию выбора, для которой

$$Sel(\{y^1\}) = \{y^1\}, \quad Sel(\{y^2\}) = \{y^2\}, \quad Sel(\{y^1, y^2\}) = \{y^1\}, \\ Sel(\{y^2, y^3\}) = \{y^2\}, \quad Sel(\{y^1, y^3\}) = \{y^1\}, \quad Sel(Y) = \{y^1, y^2\}.$$

Нетрудно видеть, что для нее аксиомы 1 и 2 выполнены, но включение (4) нарушено. Это происходит из-за того, что не выполняется аксиома 3.

Следует заметить, что в данном примере для так называемой функции одиночного выбора [Айзерман и др. 1990], отличающейся от указанной выше заменой равенства $Sel(Y) = \{y^1, y^2\}$ на $Sel(Y) = \{y^2\}$, окончательный вывод останется прежним.

Пример 3. Пусть $Y_i = \{a_i, b_i, c_i\}$, $a_i \text{ f }_i b_i \text{ f }_i c_i$, $i = 1, 2$. Отметим варианты $y^1 = (a_1, c_2)$, $y^2 = (b_1, b_2)$, $y^3 = (c_1, a_2)$ и рассмотрим класс функций выбора $Sel(\cdot)$, для которых выполнено

$$Sel(\{y^1, y^2\}) = \{y^1\}, \quad Sel(\{y^2, y^3\}) = \{y^2\}, \quad Sel(\{y^1, y^3\}) = \{y^3\}.$$

Очевидно, для каждой функции выбора данного класса аксиома 1 нарушена. Если положить $Y = \{y^1, y^2, y^3\}$ и для рассматриваемых функций выбора дополнительно принять аксиому 3, то каждая такая функция выбора будет удовлетворять равенству $Sel(Y) = \emptyset$, что несовместимо с требованием раздела 2 непустоты выбора из множества возможных вариантов Y .

Таким образом, в примере 3 отказ от аксиомы 1 привел к нарушению принципа Эджворта—Парето в том смысле, который подчеркнут в замечании к теореме раздела 4.

Благодарность

Автор выражает искреннюю признательность А. Б. Петровскому за горячие обсуждения и полезные советы по данной работе.

Литература

1. Айзерман М. А., Алескеров Ф. Т. Выбор вариантов. Основы теории. М.: Наука, 1990.
2. Борисов В. И. Проблемы векторной оптимизации // Исследование операций. Методологические аспекты. М.: Наука, 1972. С. 72–91.
3. Вилкас Э. Й. Оптимальность в играх и решениях. М.: Наука, 1990.
4. Миркин Б. Г. Проблема группового выбора. М.: Наука, 1974.
5. Макаров В. Л. Экономическое равновесие: существование и экстремальное свойство // Современные проблемы математики. Т. 19: Итоги науки и техники. М.: ВИНТИ, 1982, С. 53–58.
6. Макаров И. М., Виноградская Т. М., Рубчинский А. А., Соколов В. Б. Теория выбора и принятия решений. М.: Наука, 1982.
7. Ногин В. Д. Логическое обоснование принципа Эджворта—Парето // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2002. Т. 42. № 7. С. 951–957.
8. Ногин В. Д. Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход. М.: Физматлит, 2002.
9. Полищук Л. И. Анализ многокритериальных экономико-математических моделей. Новосибирск: Наука. Сиб. отд., 1989.
10. Сен А. Об этике в экономике. М.: Наука, 1996.
11. Экономико-математический энциклопедический словарь / Гл. ред. В. И. Данилов-Данильян. М.: Большая Российская энциклопедия: Изд. дом «ИНФРА-М», 2003.
12. Экланд И. Элементы математической экономики. М.: Мир, 1983.
13. Blinder A. S. On making the tradeoff between equality and efficiency // Samuelson and Neoclassical Economics. Boston: Kluwer—Nijhoff Publishing, 1982. P. 317–328.
14. Pareto V. Manuel d'économie politique. Paris: Giard, 1909.