Анализ предпочтений ЛПР на частичных описаниях многокритериальных объектов[*]

И. В. Ашихмин[1]

Рассматривается задача выбора лучшего, по мнению лица, принимающего решения (ЛПР), объекта из заданного множества. Каждый объект имеет оценки по некоторому множеству критериев. Предпочтения ЛПР выражены в виде бинарного отношения *P*, полученного в результате попарного сравнения объектов по подмножествам критериев. Показывается, что при условии независимости критериев по предпочтению (НКП) и транзитивности предпочтений (ТП), отношение *P* может быть расширено до бинарного отношения на полнокритериальных объектах для выбора наиболее предпочтительного объекта. Выполнение и/или нарушение условий НКП и ТП проверяется на основе анализа отношения *P*.

Постановка задачи

Имеется конечное множество объектов A. Обозначим через $C=\left\{C^j\right\}_{j\in K}$ — множество критериев, по которым оценивается качество объектов из A, где $K=\{1,...,k\}$ множество номеров критериев. Для каждого критерия C^j задана номинальная шкала оценок $S^j=\left\{s_m^j\right\}_{m=1,..,m^j}$, $j\in K$. Отождествим объекты $a\in A$ с k-мерными векторами их соответствующих оценок по критериям C:

$$a=(a^1,a^2,...,a^k),\ \forall j\in K\ a^j\in S^j.$$

[*] Работа частично поддержана грантом Президента Российской Федерации для поддержки ведущих научных школ НШ 1964.2003.1, Российским фондом фундаментальных исследований (проекты 04-01-00290, 05-01-00666), Российской академией наук (программы фундаментальных исследований РАН «Математическое моделирование и интеллектуальные системы» и ОИТВС РАН «Фундаментальные основы информационных технологий и систем»).

[1] 117312, Москва, проспект 60-летия Октября, 9, ИСА РАН, iva@isa.ru.

Таким образом, множество объектов A является подмножеством декартового произведения шкал критериев: $A \subseteq V, V = \prod_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{k}} \mathrm{S}^{\mathrm{j}}$.

Пусть ЛПР предпочитает совокупность оценок $\left\{a^j\right\}_{j\in D}$ совокупности оценок $\left\{b^j\right\}_{j\in D}$, где $a^j \in S^j, b^j \in S^j, D \subseteq K$, при любых попарно равных оценках по критериям $C^j, j \in K \setminus D$. Представим это предпочтение в виде упорядоченной пары k-мерных векторов (a^D, b^D), у которых $a^j, b^j \in S^j, j \in D$ и $a^j = b^j = \omega^{\mathrm{j}}, j \in K \setminus D$, где символы ω^j обозначают компоненты, соответствующие критериям, по которым предполагаются попарно равные оценки. Таким образом, множество упорядоченных пар такого вида образуют иррефлексивное бинарное отношение $P \subseteq \Pi$, где

$$\Pi = \bigcup_{D\subseteq K} (T^D \times T^D),\ \ T^D = \prod_{j=1}^{k} \begin{cases} S^j, & j \in 1, \\ \{\omega^j\}, & j \in K \backslash D. \end{cases}$$

Обозначим через $(a^D)^j$ или a^j, если это не вызывает разночтений, j-ю компоненту вектора $a^D \in T^D$. $a^D \in T^D$ — k-мерный вектор, у которого компоненты $a^j, j \in D$ — оценки из S^j, а компоненты $a^j, j \in K \setminus D$ равны ω^j. Другими словами, элементами множества Π могут быть только пары вида (a^D, b^D), где $D \subseteq K, a^D, b^D \in T^D$, и не могут быть пары (a^D, b^E), где $a^D \in T^D, b^E \in T^E, D \neq E$.

Очевидно, что

$$V \times V \subseteq \Pi, (\Theta, \Theta) \in \Pi,$$

где $\Theta = (\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^k), \Theta \in T^{\varnothing} (T^{\varnothing} = \{\Theta\})$.

Задача 1: найти наиболее предпочтительный объект или группу таких объектов $A^* \subseteq A$.

Задача 2: определить, согласованы ли предпочтения ЛПР (в определяемом ниже смысле).

Независимость критериев по предпочтению и транзитивность

Для решения поставленных задач потребуются дополнительные предположения о предпочтениях ЛПР, такие как, независимость критериев по предпочтению (НКП) и транзитивность предпочтений (ТП) [Кини и др., 1981].

Набор критериев $C^* \subset C$ не зависит по предпочтению от своего дополнения $C \setminus C^*$, если предпочтения на объектах, отличающихся лишь оценками по критериям из C^*, не зависят от фиксированных, попарно равных, оценок по критериям из $C \setminus C^*$, т. е.

$a \succ b \Rightarrow c \succ d$, где $(a^j = b^j \Rightarrow c^j, d^j \in S^j, c^j = d^j, a^j \neq b^j \Rightarrow c^j = a^j, d^j = b^j)$, где символ « $\succ$ » означает «предпочтительнее».

Критерии C взаимно независимы по предпочтению, если каждый набор $C^* \subset C$ не зависит по предпочтению от своего дополнения $C \setminus C^*$ [Кини и др., 1981].

Предпочтения ЛПР транзитивны, если $\forall a,b,c : a \succ b, b \succ c \Rightarrow a \succ c$.

Пусть $a^D \in T^D, b^E \in T^E, D, E, F \subseteq K, D \cap E = \varnothing, F \subseteq D$. Будем обозначать

$$a^D b^E = (\alpha^1, \alpha^2, ..., \alpha^k),$$

где $\forall j \in D\ \alpha^j = a^j, \forall j \in E\ \alpha^j = b^j, \forall j \in K \setminus (D \cup E)\ \alpha^j = \omega^j$,

$$a^F = (\alpha^1, \alpha^2, ..., \alpha^k),$$

где $\forall j \in F\ \alpha^j = (a^D)^j, \forall j \in K \setminus F\ \alpha^j = \omega^j$,

$$a^D b^E \in T^{D \cup E}, a^F \in T^F.$$

Заметим, что $a^D c^{K \setminus D} \in V \times V$, где $a^D \in T^D, c^{K \setminus D} \in T^{K \setminus D}$.

Введем множество упорядоченных пар:

$$\mathrm{Comb}(\Pi) =$$

$$= \left\{ \left((a^E,\ b^E), (c^F,\ d^F) \right) \middle| \begin{array}{l} (a^E,\ b^E), (c^F,\ d^F) \in \Pi, \\ (E \cap F = \varnothing) \vee \left(b^{E \cap F} = c^{E \cap F} \right) \vee \left(a^{E \cap F} = d^{E \cap F} \right) \end{array} \right\}.$$

Определим коммутативную бинарную операцию комбинирования $\oplus$ на парах из $\mathrm{Comb}(\Pi)$ следующим образом:

$$(a^E,\ b^E)\oplus(c^F,\ d^F)=$$

$$=\begin{cases}(a^{E\backslash H}c^{F\backslash E},\ b^{E\backslash F}d^{F\backslash H}),\\ \text{если } b^{E\cap F}=c^{E\cap F},\ H\subseteq E\cap F: a^H=d^H, \forall j\in\left(E\cap F\right)\backslash H\ a^j\neq d^j\\ (a^{E\backslash F}c^{F\backslash H},\ b^{E\backslash H}d^{F\backslash E}),\\ \text{если } E\cap F\neq\varnothing,\ \ b^{E\cap F}\neq c^{E\cap F}, a^{E\cap F}=d^{E\cap F},\\ H\subseteq E\cap F: b^H=c^H, \forall j\in\left(E\cap F\right)\backslash H\ b^j\neq c^j.\end{cases} \tag{1}$$

Смысл операции $\oplus$ состоит в том, что если $a^E \succ b^E$ и $c^F \succ d^F$, то для ЛПР $a^{E\backslash H}c^{F\backslash E} \succ b^{E\backslash F}d^{F\backslash H}$ (или $a^{E\backslash F}c^{F\backslash H} \succ b^{E\backslash H}d^{F\backslash E}$). Действительно, из независимости критериев по предпочтению

$$a^E \succ b^E \Rightarrow a^E c^{F\backslash E} \succ b^E c^{F\backslash E} \quad \text{и} \quad c^F \succ d^F \Rightarrow b^{E\backslash F}c^F \succ b^{E\backslash F}d^F .$$

Если $b^{E\cap F}=c^{E\cap F}$, то

$$b^E c^{F\backslash E}=b^{E\backslash F}b^{E\cap F}c^{F\backslash E}=b^{E\backslash F}c^{E\cap F}c^{F\backslash E}=b^{E\backslash F}c^F ,$$

и, значит $a^E c^{F\backslash E} \succ b^{E\backslash F}c^F$. Учитывая транзитивность предпочтений, получаем $a^E c^{F\backslash E} \succ b^{E\backslash F}d^F$. Но, может оказаться, что

$$\exists H\subseteq E\cap F: a^H=d^H,\quad \forall j\in\left(E\cap F\right)\backslash H\ a^j\neq d^j .$$

Тогда из $a^E c^{F\backslash E} \succ b^{E\backslash F}d^F$ можно исключить попарно равные оценки по критериям $C^j, j\in H$. Получаем $a^{E\backslash H}c^{F\backslash E} \succ b^{E\backslash F}d^{F\backslash H}$. Рассуждения остаются верными, если $E\cap F=\varnothing$. Аналогично выводится

$$a^{E\backslash F}c^{F\backslash H} \succ b^{E\backslash H}d^{F\backslash E},\qquad \text{если } b^{E\cap F}\neq c^{E\cap F},\ a^{E\cap F}=d^{E\cap F} .$$

Приведенные предположения НКП и ТП позволяют определять предпочтения ЛПР на векторах, для которых нет пар в множестве P, а именно:

$$\left\{ (e^D, f^D) \left| \begin{array}{l} (e^D, f^D) = (a^E,\ b^E) \oplus (c^F,\ d^F), \\ (a^E,\ b^E), (c^F,\ d^F) \in P, \\ \left((a^E,\ b^E), (c^F,\ d^F) \right) \in \mathrm{Comb}(\Pi) \end{array} \right. \right\}.$$

К получившимся парам векторов можно снова применить НКП и ТП. В результате получается бинарное отношение P^*:

$$P^* = \left\{ (e^D, f^D) \left| (e^D, f^D) \in P \vee \begin{pmatrix} \exists (a^E,\ b^E) \in P^*, (c^F,\ d^F) \in P^*, \\ \left((a^E,\ b^E), (c^F,\ d^F) \right) \in \mathrm{Comb}(\Pi), \\ (e^D, f^D) = (a^E,\ b^E) \oplus (c^F,\ d^F) \end{pmatrix} \right. \right\}. \quad (2)$$

Отношение P^* отражает предпочтения ЛПР, если выполняются предположения НКП и ТП. Если $(e^D, f^D) \in P^*$, то для ЛПР $e^D \succ f^D$. Множество P^* шире транзитивного замыкания P благодаря использованию свойства НКП.

Исходя из презумпции парнодоминантности (предпочтения на паре объектов определяют выбор из множества) [Айзерман и др., 1990; Миркин, 1974], для решения Задачи 1 можно предложить следующее правило выбора:

$$A^* = \{ a^* \in A \mid \bar{\exists} a \in A : (a, a^*) \in P^* \}.$$

Обратимся теперь к решению задачи 2. Будем говорить, что предпочтения ЛПР не согласованы, если в предположении НКП и ТП из ответов ЛПР могут быть выведены противоположные предпочтения на паре векторов, т. е. $\exists a,b$: $(a,b) \in P^* \wedge (b,a) \in P^*$. Исходя из определения P^*, получаем $(a,b) \in P^* \wedge (b,a) \in P^* \Rightarrow (\Theta,\Theta) \in P^*$. Так как отношение P не рефлексивно, то $(\Theta,\Theta) \in P^* \Rightarrow \exists a,b, a \neq b : (a,b) \in P^* \wedge (b,a) \in P^*$. Таким образом, справедливо следующее

Утверждение 1. Для того чтобы система предпочтений ЛПР была несогласованна (несовместна) необходимо и достаточно, чтобы $(\Theta,\Theta) \in P^*$.

Условие принадлежности к P^*

В реальных задачах мощность отношения P^* зачастую настолько велика (более 10^7), что невозможно осуществлять поддержку принятия решения в интерактивном режиме. В связи с этим необходимо сократить время анализа предпочтений и проверки их согласованности. Для решения задач 1 и 2 вместо построения отношения P^* разработан алгоритм определения принадлежности некоторой пары векторов (a, b) отношению P^* (рис. 1). Если никакая последовательность операций $\oplus$ на элементах из P не дает в результате упорядоченную пару векторов (a, b), то $(a,b) \notin P^*$.

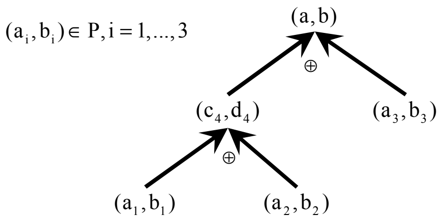

Рис. 1. Дерево вывода (a, b)

Можно показать, что, если $(a_1,\ b_1) \oplus (a_2,\ b_2) = (c,d)$, то $r_1 + r_2 = r$, где

$$r_1 = (r_{11}^1, r_{12}^1, \ldots, r_{1m_1}^1, r_{11}^2, \ldots, r_{1m_k}^k)^T,$$

$$r_2 = (r_{21}^1, r_{22}^1, \ldots, r_{2m_1}^1, r_{21}^2, \ldots, r_{2m_k}^k)^T,$$

$$r = (r_1^1, r_2^1, \ldots, r_{m_1}^1, r_1^2, \ldots, r_{m_k}^k)^T,$$

$$r_{1m}^j = \begin{cases} 1, \text{если } a_1^j = v_m^j, b_1^j \neq v_m^j \\ -1, \text{если } a_1^j \neq v_m^j, b_1^j = v_m^j \\ 0, \text{иначе} \end{cases},$$

$$r_{2m}^j = \begin{cases} 1, \textit{если } a_2^j = v_m^j, b_2^j \neq v_m^j \\ -1, \text{если } a_2^j \neq v_m^j, b_2^j = v_m^j \\ 0, \text{иначе} \end{cases},$$

$$r_m^j = \begin{cases} 1, \text{ если } c^j = v_m^j, d^j \neq v_m^j, \\ -1, \text{ если } c^j \neq v_m^j, d^j = v_m^j, \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}.$$

$$j \in K, m \in \left\{1,\ldots,m_j\right\}.$$

Обратное не всегда верно.

Пусть $P = \{(a_i,\ b_i)\}_{i\in\{1,\ldots,n\}}$.

Очевидно, что если для подтверждения $(a,b) \in P^*$ потребовалось z_1 пар $\left(a_1,b_1\right)$, z_2 пар $\left(a_2,b_2\right),\ldots,$ z_n пар$\left(a_n,b_n\right)$, то $R \times z = r$, где

$$z = (z_1,\ldots,z_m)^T,$$

$$r_i = (r_{i1}^1, r_{i2}^1,\ldots,r_{im_1}^1, r_{i1}^2,\ldots,r_{im_k}^k)^T,$$

$$r = (r_1^1, r_2^1,\ldots,r_{m_1}^1, r_1^2,\ldots,r_{m_k}^k)^T,$$

$$r_{im}^j = \begin{cases} 1, \text{ если } a_i^j = v_m^j, b_i^j \neq v_m^j, \\ -1, \text{ если } a_i^j \neq v_m^j, b_i^j = v_m^j, \\ 0, \text{ иначе} \end{cases} \tag{3}$$

$$r_m^j = \begin{cases} 1, \text{ если } c^j = v_m^j, d^j \neq v_m^j, \\ -1, \text{ если } c^j \neq v_m^j, d^j = v_m^j, \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

$$j \in K, m \in \left\{1,\ldots,m_j\right\}, i \in \{1,\ldots,n\}.$$

Таким образом, справедливо следующее

Утверждение 2. Если $(a,b) \in P^*$, то $Z \neq \varnothing,$ где

$$Z = \left\{ z \,\middle|\, R \times z = r, z \in \quad {}^{m+}, z \neq \mathbf{0} \right\}, \mathbf{0} = (0,0,\ldots,0)^T. \tag{4}$$

Следствие 1. Если $Z = \varnothing$, то $(a,b) \notin P^*$.

Любому $z \in Z$ соответствует мультимножество

$$P(z) = \left\{ z_i \ (a_i, b_i) \middle| i \in \{1,..,n\} \right\}.$$

Однако не для всех таких z можно найти последовательность операций $\oplus$ на элементах множества $P(z)$, дающую в результате искомую пару (a, b), так как операция $\oplus$ применима только к парам из $\mathrm{Comb}(\Pi)$. Таким образом, для проверки $(a,b) \in P^*$ следует перебрать элементы множества Z, чтобы найти такое $z^* \in Z$, для которого существует допустимая последовательность операций $\oplus$ на элементах $P(z)$.

Утверждение 3. Если

$$Z_0 = \varnothing, \tag{5}$$

где $Z_0 = \left\{ z \middle| R \times z = \mathbf{0_L}, z > \mathbf{0} \right\}$, $\mathbf{0_L} = (\underbrace{0,0,\ldots,0}_{L})^T$, $\mathbf{0_n} = (\underbrace{0,0,\ldots,0}_{n})^T$, $L = \sum_{j=1}^{k} m_j$, то система предпочтений ЛПР согласована. Множество Z, определяемое формулой (4), конечно.

Доказательство.

Очевидно следует из утверждения 1 и утверждения 2, поскольку паре (Θ, Θ) соответствует вектор $r = \mathbf{0_L}$.

Покажем, что многогранник $Z' = \left\{ z \middle| R \times z = r, z > \mathbf{0_n} \right\}$ ограничен. Пусть это не так. Тогда для произвольной точки $z' > \mathbf{0_n}$, удовлетворяющей

$$R \times z' = r, \tag{6}$$

существует луч $z = z' + tl, t \in [0, +\infty)$, целиком лежащий в Z'. Кроме того, $l > \mathbf{0_n}$ (если это не так и для некоторого $i \in \{1,\ldots,n\}$ $l_i < 0$, то часть луча при $t > -\dfrac{z_i'}{l_i} \geq 0$ не лежит внутри многогранника, так как $z_i = z_i' + tl_i < 0$).

В частности, точка $z = z' + l$ должна принадлежать Z', т. е.

$$R(z' + l) = r.$$

Вычтем из этого равенства (6):

$$R \times (z' + l) - R \times z' = \mathbf{0_L} \Rightarrow R \times l = \mathbf{0_L}.$$

Таким образом, $l \in Z_0$ и, значит, $Z_0 \neq \varnothing$. Следовательно, предположение о неограниченности многогранника Z' оказалось неверным. А поскольку ограниченный многогранник содержит конечное число целочисленных точек, то получаем второй результат утверждения. Конец доказательства.

Если выполняется (5), то перебор точек $z \in Z$ (см. (4)) — конечная процедура. Если же система предпочтений ЛПР не согласована и (5) не выполняется, то для получения надежных результатов необходимо предварительно устранить несогласованность (достаточно проанализировать элементы отношения *P*, соответствующие ненулевым компонентам вектора $z \in Z_0$).

Заключение

В статье рассматривается задача выбора лучшего объекта из заданного множества. Выбор осуществляется на основе специальной информации о предпочтениях ЛПР определенного вида. Предлагаемый подход базируется на предположениях о независимости критериев по предпочтению и транзитивности предпочтений, которые, как правило, верны для обширного класса задач. Определяются необходимые и достаточные условия для выявления несогласованности предпочтений. Несогласованность может возникнуть в результате ошибки при выявлении предпочтений ЛПР, либо из-за того, что для данной задачи не выполняются указанные предположения. Важно отметить, что выбор единственного объекта из множества не гарантируется. Число объектов, попадающих в группу лучших, определяется информацией о предпочтениях ЛПР, и может быть сокращено с помощью дополнительной информации. Так как описанный подход используется в компьютерной системе поддержки принятия решений, предлагаются некоторые дополнительные шаги, дающие представление об алгоритме решения задачи с помощью компьютера.

Литература

1. *Кини Р. Л., Райфа Х.* Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. М.: Радио и связь, 1981.
2. *Айзерман М. А., Алескеров Ф. Т.* Выбор вариантов. Основы теории. М.: Наука, 1990.
3. *Миркин Б. Г.* Проблема группового выбора. М.: Наука, 1974.
4. *Ашихмин И. В., Фуремс Е. М.* UniComBOS — интеллектуальная система поддержки принятия решений для сравнения и выбора многокритериальных объектов // Настоящий сборник. 2004.