Метрические характеристики графов сетей коммуникаций

А. М. Раппопорт

В задачах анализа и синтеза коммуникационных сетей нередко возникает необходимость учета информации непосредственно об их структуре, которая представляется графом того или иного типа. При этом существенную роль играют такие его параметры, как длина максимальной простой цепи, мера центральности, местонахождение центральной, в некотором смысле, вершины и т. д. Для их исследования в зависимости от вида процесса передачи данных целесообразно использовать два типа метрических характеристик, основанных на различных подходах к введению расстояния между узлами сети коммуникаций. В случае, если передача сообщений происходит последовательно по мере их поступления, наиболее приемлемой в качестве расстояния оказывается длина кратчайшей цепи; если же сообщение передается после прихода информации от всех возможных источников более подходящей мерой является длина максимальной простой цепи между узлами.

Первому типу расстояний посвящены результаты п. 1 и 2 настоящей статьи, второму — п. 3. В них в качестве метрических характеристик рассматриваются следующие величины и понятия из теории графов: диаметр (протяженности), радиус (протяженности), центр (протяженности). В работе получены условия для графов с фиксированными значениями этих параметров. Также выделяется ряд классов графов диаметра два и находятся центральные вершины. Необходимые определения приводятся по мере необходимости в дальнейшем.

1. Графы диаметра два, их центры и радиус

При проектировании структур коммуникаций, в которых происходит обмен информацией между элементами, часто оказывается целесообразным организация их локального взаимодействия без использования общего для всех «посредника». Такого рода потребность может возникнуть при создании систем распределенных вычислений, в телекоммуникационных сетях, например, для снижения уровня их уязвимости, при выработки коллективных решений и др. Это приводит к необходимости рассмотрения указанных выше характеристик, описания графов с заданными значениями диаметра и не содержащих единой центральной вершины (звезды).

Пусть в связном графе $G = G(V, E)$, V и E — множества вершин и ребер соответственно, $|V| = n$, $|E| = m$, $d(x)$ — степень вершины x, $K(n_1, n_2)$ — полный двудольный граф $(n_1 + n_2 = n)$, K_n — полный граф с n-вершинами, $S_n = K(1, n-1)$ — звезда, $V(x) = \{y, (x, y) \in E\}$ — окрестность вершины x.

Следуя [1], диаметр графа $\delta(G)$ определяется величиной

$$\delta = \delta(G) = \max_{x,y \in V} \rho(x, y) = \max_{c \in V} r(c), \tag{1}$$

а радиус

$$r_0 = r_0(G) = \min_{c \in V} r(c), \quad r(c) = \max_{x \in V} \rho(c, x) \tag{2}$$

центр — вершина c_0, в которой минимум $r(c)$ достигается, $\rho(x, y)$ — длина кратчайшей цепи между вершинами x и y (расстояние).

В сети коммуникаций диаметр характеризует время передачи сообщений между наиболее удаленными элементами, радиус — время достижимости наиболее удаленных элементов до центрального узла, осуществляющего посреднические функции. В этом случае предполагается, что взаимодействие в сети обеспечивается некими элементами, размещенными в одном или нескольких центрах c_0. (Здесь также считается для простоты изложения, что сеть симметрическая, а времена передачи данных по каналам связи и обработки во всех узлах совпадают.)

В работе [2] были получены некоторые условия, дающие способ описания и построения графов с диаметром два. Леммы 1 и 2 из [2] допускают следующую эквивалентную формулировку.

Утверждение 1.1. *$\delta(G) = 2$ тогда и только тогда, когда*

$$G \neq K_n \quad \text{и} \quad V(x) \cap V(y) \neq \varnothing \quad \text{для всех} \quad (x, y) \notin E. \tag{3}$$

Заметим, что возможность присутствия в графе G с $\delta(G) = 2$ звезды исключаются, если $d(x) < n - 1$ для всех $x \in V$.

В [2] получены, в частности, и достаточные условия равенства диаметра двум.

Утверждение 1.2.

$$\text{Если} \quad G \neq K_n \quad \text{и} \quad \min_{(x,y) \notin E} \{d(x) + d(y)\} \geqslant n - 1, \tag{4}$$

то $\delta(G) = 2$.

Утверждение 1.3.

$$\text{Если} \quad G \neq K_n \quad \text{и} \quad d(x) \geqslant \frac{n-1}{2} \quad \text{для всех} \quad x \in V, \tag{5}$$

то $\delta(G) = 2$.

Замечание 1.1. Если потребовать в этих утверждениях ограниченность степеней вершин $d(x) < n - 1$ для всех $x \in V$, то в графе G звезда S_n будет отсутствовать.

Условие (5) означает в частности, что всякий регулярный граф, отличный от полного графа K_n, степени не меньшей $(n-1)/2$, имеет диаметр, равный двум, и позволяет порождать для всякого n графы с такой характеристикой.

Известна теорема о том, что если $d(x)+d(y) \geqslant n-1$ для всех $x, y \in V$, то в графе имеется гамильтонова цепь (см. [1, с. 74]). Более того, теорема Дирака [1] гарантирует существование гамильтонова цикла при $d(x) \geqslant n/2$. Поэтому можно заметить.

Замечание 1.2.

1. Если выполнено (5), то граф G содержит гамильтонову цепь и $\delta(G) = 2$.
2. Если $d(x) \geqslant n/2$ для всех $x \in V$, то граф G содержит гамильтонов цикл и $\delta(G) = 2$.

В том случае, если диаметр графа G равен двум, удается легко определить местонахождение центра и вычислить значение радиуса.

Утверждение 1.4. *Если $\delta(G) = 2$, то имеется одна из двух возможностей*:

а) в G нет звезды S_n, каждая вершина — центр и $r_0(G) = 2$;

б) в G имеется звезда S_n с центром c_0 и $r_0(G) = 1$.

В случае (*а*), поскольку в G нет звезды, $r(x) = \max\limits_{y \in V} \rho(x, y) \geqslant 2$, $x \in V$. Так как $\delta(G) = \max\limits_{x \in V} r(x) = 2$, то $r(x) = 2$ для всех $x \in V$, и значит $r_0 = \min\limits_{x \in V} r(x) = 2$. То есть минимум $r(x)$ достигается во всех вершинах из V, являющихся центрами графа.

В случае (*б*) наличие звезды S_n с центром c_0 означает, что $r_0(G) = r(c_0) = \min\limits_{x \in V} r(x) = 1$, т. е. для всякой звезды ее центральная вершина c_0 $(d(c_0) = n-1)$ является центром графа G, и множество его центров содержит все такие вершины.

Утверждение 1.4 означает, что в сети коммуникаций диаметра два либо все элементы в определенном смысле равноправны (одинаково достижимы друг для друга) и за общего «посредника» может быть выбран любой, либо в сети имеется одна или несколько «звездных» вершин, каждая из которых может использоваться для обеспечения процесса обмена данными.

2. Графы диаметра два, порождаемые полным графом

В этом пункте предлагается конструкция для построения графов диаметра два, не всегда удовлетворяющих достаточным условиям (4) или (5), с другой стороны эти условия могут и не гарантировать принадлежности графа новому классу.

Пусть $V_i \subset V$, $i = \overline{1, p+1}$, $1 < p+1 < n$ — непересекающиеся подмножества вершин полного графа $K_n = K_n(V)$, $V = \bigcup\limits_{i=1}^{p+1} V_i$, $|V_i| = n_i$, $G_i = G_i(V_i, E_i)$ — произвольный граф с множеством вершин и ребер соответственно V_i и E_i, $i = \overline{1, p}$, полученный из полного подграфа K_{n_i} удалением некоторых ребер, $G_{p+1} = K_{n_{p+1}}(V_{p+1})$. (Не уменьшая общности, можно считать G_i связным.) Обозначим совокупность всех графов вида $G = \bigcup\limits_{i=1}^{p+1} G_i$ через P. Заметим, что в полном подграфе G_{p+1} каждая вершина является центром звезды S_n в G, т. е. имеет степень, равную $(n-1)$.

В графе $G \in P$, даже если $V_{p+1} = \varnothing$, для любой пары несмежных вершин x, y $(x, y \in V_i)$, $V(x) \cap V(y) \neq \varnothing$, т. е. выполнен критерий (3), а значит справедливо

Утверждение 2.1.

$$\textit{Если} \quad G \in P \quad \textit{и} \quad G \neq K_n, \quad \textit{то} \quad \delta(G) = 2. \tag{6}$$

Выясним, как соотносятся классы графов, определяемые условиями (5) и (6). Будем считать, что $V_{p+1} = \varnothing$, (т. е. $V = \bigcup\limits_{i=1}^{p} V_i$, $\sum\limits_{i=1}^{p} n_i = n$), поскольку в противном случае всегда $\delta(G) = 2$. Условие (5) для $G \in P$ означает, что $d(x) = n - n_i + d(x, i) \geqslant (n-1)/2$ для всех $x \in V_i$, где $d(x, i)$ — степень вершины x в подграфе $G_i(V_i, E_i)$, $i = \overline{1, p}$. Отсюда $n_i - d(x, i) \leqslant (n+1)/2$ для всех $x \in V_i$, $i = \overline{1, p}$ или

$$\max_{i=\overline{1,p}} \left\{ \max_{x \in V} \{ n_i - d(x, i) \} \right\} \leqslant \frac{n+1}{2}. \tag{7}$$

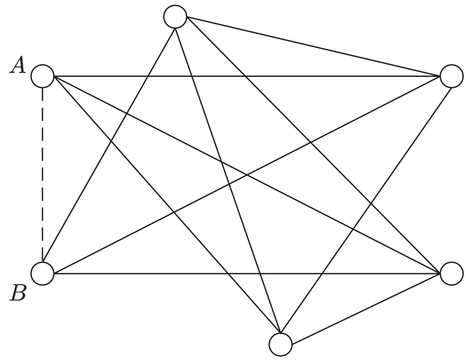
Поэтому справедливо

Утверждение 2.2. *Условие* (5): $d(x) \geqslant (n-1)/2$ *выполнено для тех и только тех графов* $G \in P$, *для которых выполнено условие* (7).

В частном случае, когда $d(x, i) = 0$ для всех $x \in V_i$, $i = \overline{1, p}$, графы из P являются полными p-дольными графами: $G = K(n_1, \ldots, n_p)$, $G \in P_0$, $V = \bigcup\limits_{i=1}^{p} V_i$, $(x, y) \in E_{ij}$, $x \in V_i$, $y \in V_j$, $\bigcup\limits_{i,j=1}^{p} E_{ij} = E$, $i \neq j$, и условие (7) принимает более простой вид.

Следствие. *Условие* (5) *не выполнено для тех и только тех графов* $G \in P_0$, *для которых*

$$\max_{i=\overline{1,p}} \{ n_i \} > \frac{n+1}{2}. \tag{8}$$



Заметим, что графы, удовлетворяющие условиям (5), и графы, входящие в P, не исчерпывают всю совокупность графов с диаметром два. Однако нетрудно построить графы $G \notin P$, для которых (5) выполнено. Для этого, если (7) верно, достаточно удалить из графа $G \in P$ хотя бы одно произвольное ребро (x, y), соединяющее вершины $x \in V_i$, $y \in V_j$, $(i \neq j)$. $(x, y) \in E_{ij}$. На рисунке справа изображен граф G, полученный из $K(2, 2, 2) \in P_0$, удалением ребра (a, b). В нем $d(x) = 4$, если $x \neq a \neq b$, $d(a) = d(b) = 3$, а условие (5) имеет вид $d(x) \geqslant (n-1)/2 = 3$, т. е. удовлетворяется. Вопрос о нахождении максимального подмножества ребер в $E = \bigcup\limits_{i,j=1}^{p} E_{ij}$, $p \geqslant 3$, удаление которых из графа G, принадлежащего P_0, сохраняет значение диаметра, равным двум, остается открытым.

В том случае, если $p = 2$, $\delta(K(n_1, n_2)) = 2$ и $K(n_1, n_2) \in P_0$, то, как нетрудно видеть, (5) означает $|n_1 - n_2| \leqslant 1$, т. е. выполняется достаточно редко. Более того, полный двудольный граф $K(n_1, n_2)$ является минимальным графом диаметра два среди всех двудольных (при удалении любого ребра диаметр возрастает).

Таким образом, приведенные в этом разделе результаты позволяют расширить полученный в [2] класс графов диаметра два и предложить соответствующие простые процедуры для их построения, как для случая, когда структура коммуникаций содержит единый центральный узел, так и в его отсутствии.

3. Оценка диаметра протяженности

Здесь рассматривается другой тип метрических характеристик графа, использующий альтернативный способ введения расстояния, пригодный для отличной от предыдущей модели передачи данных в структуре коммуникаций.

Пусть имеется некоторая сеть, представленная для простоты изложения неориентированным графом. В конкретный момент времени для каждого узла сети x имеется подмножество узлов $B(x)$, являющихся для x источниками информации. После того, как x получит сообщения от всех узлов $y \in B(x)$ он начинает функционировать: перерабатывать информацию, передавать другим узлам и т. д. В предположении, что передача сообщения по каждому каналу связи происходит за одинаковое (единичное) время и в промежуточных узлах между $y \in B(x)$ и x задержки не происходит [1], время ожидания в узле x определяется длиной максимальной простой цепи, связывающей каждый узел $y \in B(x)$ с x. Это означает, что для приближенной оценки этих величин представляет интерес значение длины максимальной простой цепи данного графа $G = G(V, E)$. Такой характеристикой является диаметр протяженности графа:

$$\lambda = \lambda(G) = \max_{x,y \in V} l(x, y) = \max_{c \in V} h(c); \tag{9}$$

$$h_0 = h_0(G) = \min_{c \in V} h(c) \tag{10}$$

— радиус протяженности, $h(c) = \max\limits_{c \in V} l(c, x)$; $l(x, y)$ — длина максимальной простой цепи между вершинами x и y (расстояние). Вершина c_0, где минимум в (10) достигается, — центр протяженности (см. [1]). Возможность равенства $\lambda(G) = 2$ исчерпывается простой ситуацией.

Утверждение 3.1. $\lambda(G) = 2$ *в одном и только в одном из случаев*:

1. $G = S_n$ (*звезда*).
2. $G = C_3$ (*цикл на* 3 *вершинах*).

В первом случае c_0 — *центральная вершина в* S_n, $h_0 = 1$; *во втором* c_0 — *любая вершина*, $h_0 = 2$.

В самом деле, если $G \neq S_n$ $(n > 3)$, то в G имеется простая цепь, содержащая более 2 ребер, что противоречит условию. Равенство $\lambda(G) = 2$ для $G = S_n$ и $G = C_3$ проверяется непосредственно.

Для оценки диаметра протяженности можно воспользоваться известным результатом Эрдеша, Галлаи [3], которые показали, что при достаточно большом числе ребер $m > n(k-1)/2$ в графе имеется простая цепь длины k. Отсюда непосредственно следует

Утверждение 3.2.

$$\text{\textit{Ели в графе}} \quad G \quad \text{\textit{число ребер}} \quad m > \frac{n(k-1)}{2}, \tag{11}$$

то $\lambda(G) \geqslant k$.

В замечании 1.2 было обращено внимание на то, что если выполнено условие (5), то $\delta(G) = 2$ и граф G всегда содержит гамильтонову цепь, т. е. простую цепь длины $(n-1)$. Поэтому справедливо

Утверждение 3.3.

$$\text{\textit{Если}} \quad d(x) \geqslant \frac{n-1}{2} \quad \text{\textit{для всех вершин графа}} \quad G, \tag{12}$$

то $\delta(G) = 2$ *и* $\lambda(G) = n - 1$.

---

[1] Время задержки можно учесть отдельно.

Таким образом, в статье рассмотрен ряд метрических характеристик графа, использование которых может оказаться продуктивным при синтезе и анализе структур коммуникаций различной природы.

Предложена конструкция для построения графов диаметра два, расширяющая ранее полученные достаточные условия, исследован вопрос о расположении центральных вершин, получена оценка и установлена связь для альтернативных способов введения диаметра. В дальнейшем было бы желательным развитие дополнительных методов для эффективного построения графов диаметра два, их полного описания, а также разработка аналогичных процедур для графов с фиксированным диаметром большей величины.

Литература

1. *Оре О.* Теория графов. М.: УРСС, 2002.
2. *Rappoport A. M.* The problem of construction the decentralized communication structure // Dynamic of non-homogeneous systems. Procedings of ISA RAS, 25.7. Vol. 7. M.: URSS, 2004.
3. *Erdös P.*, *Gallai T.* On maximal paths and circuits of graphs // Acta Math. Sci. Hangar. 1959. V. 10.