

## РАЗДЕЛ IV

### ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

#### О бифуркациях и аттракторах в маломодовом приближении уравнения Курамото—Цузуки

А. В. Дернов, А. Д. Дубровский

Уравнение Курамото—Цузуки, часто используемое для анализа неравновесных процессов вблизи точки бифуркации пространственно-однородного равновесия, является сложным объектом, требующим самостоятельного анализа. В настоящей работе предпринята попытка классификации аттракторов в маломодовом приближении этого уравнения. Описан сценарный подход к анализу аттракторов и сделаны предположения об их структуре. Выявлены некоторые проблемы правильной интерпретации численного эксперимента, указаны предпосылки существования квазиаттракторов в маломодовой системе.

#### Введение

Для анализа неравновесных процессов, возникающих в физических средах, системах типа «реакция — диффузия», активных биологических средах и других распределенных системах в малой окрестности точки бифуркации потери устойчивости пространственно-однородного равновесия часто используется уравнение Курамото—Цузуки (Гинзбурга—Ландау)

$$\begin{aligned} W_t &= \pm W + (1 + ic_1)W_{xx} - (1 + ic_2)W|W|^2, \\ 0 \leq x \leq l, \quad 0 < t < \infty, \quad W(x, 0) &= W_0(x). \end{aligned} \quad (1)$$

В работе [1] был выполнен подробный численный анализ уравнения (1) с граничными условиями

$$W_x(0, t) = W_x(l, t) = 0,$$

а также его маломодового приближения при различных значениях параметров  $c_1$  и  $c_2$ . Остановимся на последнем более подробно. Обозначив

$W = u + iv$ , рассмотрим приближение

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \cos \frac{\pi x}{l}.$$

Считая остальные гармоники Фурье пренебрежительно малыми, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_0 = x_0 - (x_0 - c_2 y_0) \left( \rho_0^2 + \frac{\rho_1^2}{2} \right) - s(x_1 - c_2 y_1),$$

$$\dot{y}_0 = y_0 - (c_2 x_0 + y_0) \left( \rho_0^2 + \frac{\rho_1^2}{2} \right) - s(c_2 x_1 - y_1),$$

$$\dot{x}_1 = x_1 - (x_1 - c_2 y_1) \left( \rho_0^2 + 3 \frac{\rho_1^2}{4} \right) - 2s(x_0 - c_2 y_0) - k^2(x_1 - c_1 y_1),$$

$$\dot{y}_1 = y_1 - (c_2 x_1 + y_1) \left( \rho_0^2 + 3 \frac{\rho_1^2}{4} \right) - 2s(c_2 x_0 + y_0) - k^2(c_1 x_1 + y_1),$$

где

$$\rho_0^2 = x_0^2 + y_0^2, \quad \rho_1^2 = x_1^2 + y_1^2, \quad s = x_0 x_1 + y_0 y_1, \quad k = \frac{\pi}{l}.$$

Далее, положив

$$x_0 = \rho_0 \cos \varphi_0, \quad y_0 = \rho_0 \sin \varphi_0, \quad x_1 = \rho_1 \cos \varphi_1, \quad y_1 = \rho_1 \sin \varphi_1$$

и принимая во внимание симметрию  $W \rightarrow W \cdot e^{i\alpha}$ , можно ввести циклическую координату  $\theta = 2(\varphi_0 - \varphi_1)$  и получить замкнутую систему трех уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= 2\xi - 2\xi(\xi + \eta) - \xi\eta(\cos \theta + c_2 \sin \theta), \\ \dot{\eta} &= 2\eta - 2\eta \left( 2\xi + \frac{3\eta}{4} \right) - 2\xi\eta(\cos \theta - c_2 \sin \theta) - 2k^2\eta, \\ \dot{\theta} &= c_2 \left( 2\xi - \frac{\eta}{2} \right) + \sin \theta(2\xi + \eta) + c_2 \cos \theta(2\xi - \eta) + 2c_1 k^2, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\xi = \rho_0^2$ ,  $\eta = \rho_1^2$ . Более подробно об этом переходе см. [1].

Выполненные в работе [1] численные исследования уравнения (1) и системы (2) показали довольно высокую «качественную сходность» асимптотического поведения их решений между собой. Кавычки здесь поставлены по двум причинам. Во-первых, фазовое пространство уравнения (1) является бесконечномерным, поэтому качественно с решениями системы (2) мы можем сравнивать только конечномерные проекции траектории уравнения (1). Во-вторых, при некоторых значениях параметров  $c_1$  и  $c_2$  в обеих системах было замечено сложное неперiodическое финитное поведение, которое можно назвать хаосом. Вопрос о том, как сравнить два хаоса, пока остается открытым. Для ответа на него необходимо предварительно провести качественное разделение и классификацию

видов хаоса. Попытка такого разделения для системы (2) предпринята в настоящей работе.

### Описание подхода

Положив в системе (2)  $k = 1$  (что соответствует длине области  $l = \pi$  в уравнении (1)) авторы численно исследовали изменения типов аттракторов системы при движении вдоль различных кривых в пространстве параметров  $\{c_1, c_2\}$ . Изучая различные каскады бифуркаций, приводящие к постепенным или резким сменам режимов асимптотического поведения, мы попытались сделать выводы о структуре возникающих там сложных аттракторов (сценарный подход).

Отметим, что довольно подробная диаграмма аттракторов системы (2) в пространстве  $\{c_1, c_2\}$  была приведена в [1]. Такой статичный подход удобен для классификации регулярных аттракторов (неподвижная точка, цикл, «двойной» цикл), но более сложные аттракторы здесь просто объединяются в один класс.

Суть сценарного подхода заключается в том, чтобы по последовательности бифуркаций, приводящих к образованию сложного аттрактора, попытаться идентифицировать уже известный и описанный ранее сценарий, а затем сделать вывод о структуре аттрактора. Выбор данного подхода обоснован следующими обстоятельствами. Если мы попытаемся сделать вывод о геометрии аттрактора на основе численных расчетов траектории системы при заданных фиксированных значениях ее параметров, мы столкнемся с неизбежной проблемой ограниченности точности численного решения дифференциальных уравнений. При выборе слишком большого шага интегрирования мы получим плохую аппроксимацию уравнения, при слишком малом шаге возникнет ошибка вследствие некорректности операции численного дифференцирования. Таким образом, «мутное стекло», через которое мы наблюдаем результаты эксперимента, будет постоянно мешать нам. Для систем, чувствительных к малым изменениям начальных условий, данное обстоятельство может являться критическим.

Покажем преимущества сценарного подхода на следующем примере. Сценарий перехода к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода, впервые описанный в [2] для одномерных отображений, а затем более детально исследованный для гладких динамических систем (см. [3] и имеющиеся там ссылки), предполагает последовательность бифуркаций удвоений периодов циклов при непрерывном изменении некоторого параметра системы таким образом, что интервалы между бифуркациями в пределе убывают в геометрической прогрессии со знаменателем, не зависящим от исходной системы — универсальной постоянной Фейгенбаума. Идентифицировав данный сценарий в какой-либо конкретной системе по нескольким первым циклам, мы можем сделать предположение о структуре аттрактора при значениях параметров, когда численный эксперимент уже не позволяет нам определить его структуру. Принципиально важным

здесь является момент, когда регулярный аттрактор (предельный цикл с большим числом витков, сложным образом расположенный в пространстве) ошибочно принимается за хаотический (нерегулярный) аттрактор.

### Описание результатов

Характерной чертой системы (2) является наличие в ней в некоторых областях значений параметров одновременно нескольких (по крайней мере двух) аттракторов, области притяжений которых не пересекаются, но отстоят друг от друга на достаточно малое расстояние. Такое наблюдается, например, при  $\{c_1, c_2\} = \{7, -5,036\}$ ,  $\{7, -6,763\}$ ,  $\{3, -3,476\}$ ,  $\{3, -4,99\}$ . Стартуя с различных начальных точек, мы будем притягиваться то к одному, то к другому аттрактору. Варьируя шаг интегрирования, мы можем добиться режима, когда траектория перескакивает из бассейна одного аттрактора в бассейн другого, что выглядит хаотично и вполне может быть ошибочно принято за хаотический аттрактор. Подобное явление, получившее название квазиаттрактора, было описано в [4] и имеющихся там ссылок. В работе [5] при численном анализе системы Лоренца было также обнаружено явление, когда при разных шагах интегрирования получались качественно различные аттракторы (хаотический и регулярный).

Наличие одновременно двух аттракторов также объясняет такие численно обнаруженные явления, как самоорганизация и перемежаемость. В данном случае это одно и то же и зависит лишь от того, в какую сторону по параметру мы рассматриваем эволюцию аттрактора. На название некоторым образом влияет также время, проводимое траекторией вблизи первого и второго аттрактора, что в свою очередь зависит от размера и формы их бассейнов.

С целью получения наиболее полного представления об аттракторах системы (2) был проведен анализ серий бифуркаций при движении вдоль нескольких различных прямых на плоскости  $\{c_1, c_2\}$ . Каждый из наблюдаемых сценариев представляет собой конечную серию, состоящую из кусков каскадов Фейгенбаума с последующей самоорганизацией.

Говоря о кусках каскадов, отметим, что довольно часто наблюдалось явление неполного каскада, когда, например, цикл «периода 2» «самоорганизовывался» в другой цикл. Также есть предпосылки, что при некоторых значениях параметров, например при  $\{c_1, c_2\} = \{7, -6,839\}$  (см. рис. 1) аттрактор представляет собой то самое «предельное» образование, получающееся в результате каскада бифуркаций Фейгенбаума и не являющееся предельным циклом. Здесь необходимо отметить, что пространство параметров, вообще говоря, не следует ассоциировать с пространством динамических систем, поэтому авторы не отрицают возможности, что аттракторы, которые имеет система (2) при всех значениях параметров  $\{c_1, c_2\}$  представляют собой лишь предельные циклы сложной формы (система не имеет нерегулярных аттракторов). На рис. 2 изображен устойчивый предельный цикл при значениях  $\{c_1, c_2\} = \{7, -6,48\}$ ,

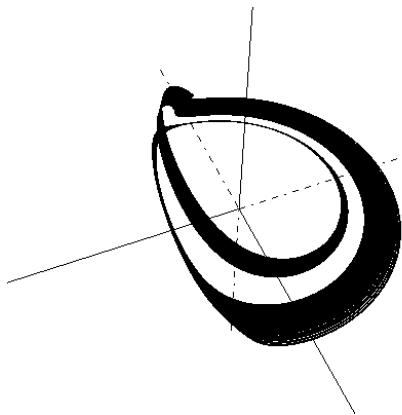


Рис. 1

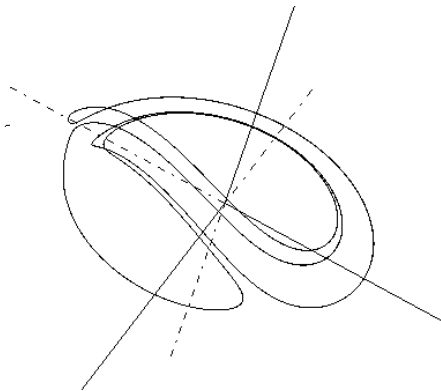


Рис. 2

который при изменении параметров подвергается удвоению. Квазиаттрактор, содержащий в себе такой цикл, может быть легко принят за хаотический аттрактор.

### Заключение

В настоящей работе была предпринята попытка классифицировать аттракторы в маломодовом приближении уравнения Курамото—Цузуки. Описан сценарный подход к анализу аттракторов и сделаны некоторые предположения об их структуре. Выявлены некоторые проблемы правильной интерпретации численного эксперимента, указаны предпосылки существования квазиаттракторов в маломодовой системе.

### Литература

1. Ахромеева Т. С., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Самарский А. А. // Новейшие достижения. Современные проблемы математики. 1984. Т. 28. С. 207–313.
2. Фейгенбаум М. // УФН. 1983. Т. 141. С. 343–374.
3. Арнольд В. И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Ижевск, 2000.
4. Shil'nikov L. P. // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1994. V. 4. № 3. P. 489–519.
5. Магницкий Н. А., Сидоров С. В. // Дифференциальные уравнения. 2001. № 11.