

Исследование сценария перехода к хаосу в модели экологической системы

Н. А. Магницкий, Ю. В. Огинова

Человеческая убежденность в том, что все процессы в природе протекают в соответствии со строгими, «железными» законами, возникла и укрепилась только благодаря законам физики, получившим тысячекратное доказательство. Казалось бы, с развитием науки повысится точность описания различных явлений, а с ней возрастут и возможности что-либо предсказывать. Однако квантовая механика показала, что мы принципиально не можем измерить с заранее заданной точностью одновременно координату и импульс элементарной частицы. Возникли новые ограничения, а с ними и потребность построения новой теории.

Что же такое динамический хаос? Задумаемся, например, над такой проблемой: от года к году сеть метеорологических станций становится все плотнее, но есть ли улучшения в прогнозах погоды, ежедневно сообщаемым нам по радио и телевидению? Оказывается, принципиально невозможно дать долгосрочный прогноз поведения огромного количества даже сравнительно простых механических, физических, химических и экологических систем. Как было показано в последние десятилетия, помимо двух классов объектов — детерминированных (прогноз их поведения может быть дан на любое желаемое время) и стохастических (их исследованием занимается теория вероятностей) — существует еще и третий класс. Понятие динамического хаоса как раз и связано с этим классом объектов: сколь угодно малая неточность в определении начального состояния системы нарастает со временем, и с некоторого момента что-либо предсказывать становится бессмысленным. Таким образом, сколь угодно малая ошибка в измерении, например движения воздуха, может запросто повлечь за собой большую ошибку в прогнозе погоды вплоть до полного расхождения предсказываемого с тем, что произойдет в реальности.

В 1963 г. в *Journal of the Atmospheric Sciences* вышла статья американского метеоролога Эдварда Лоренца, положившая начало новому направлению в естествознании — исследованию хаоса в детерминированных системах. В системе Лоренца было впервые обнаружено нерегулярное поведение траекторий [1]. В дальнейшем хаотическая динамика была обнаружена в гипотетических моделях химических реакций Ресслера, в электротехнической модели Чуа, в модели кроветворения

Мэки—Гласса, макроэкономической модели Магницкого [2] и в моделях различных биологических и экологических систем.

Исследование сценариев перехода к хаосу играет важную роль на практике, так как в ряде случаев позволяет предсказать возможность наступления хаотического режима поведения динамической системы при изменении управляющих параметров. Сценарии описывают поведение системы на границе регулярного и хаотического режима, т. е. вблизи критического значения управляющего параметра, когда эволюция системы еще не полностью беспорядочна, но уже и не вполне регулярна.

В настоящее время существуют различные точки зрения на число и характер сценариев перехода к хаосу. Пока традиционным является положение как минимум о трех различных сценариях. О них можно прочитать, например, в [3–6]. Эти сценарии таковы:

- 1) *сценарий Фейгенбаума* (через каскад бифуркаций удвоения периода);
- 2) *сценарий Рюэля—Такенса* (Л. Ландау и независимо от него Э. Хопф выдвинули гипотезу, согласно которой хаотическая динамика есть движение по инвариантному тору большой размерности, рождающемуся в результате каскада бифуркаций Андронова—Хопфа. Однако Рюэлем и Такенсом было обнаружено, что после небольшого числа бифуркаций обычно наблюдается резкий переход к хаотическому движению);
- 3) *сценарий Помо—Маннвиля* (через перемежаемость: система демонстрирует регулярное поведение, при увеличении значения параметра появляются хаотические всплески, их становится все больше, и движение полностью хаотизируется).

Отличная от традиционной теория изложена Н. А. Магницким и С. В. Сидоровым в [2]. На основе численных расчетов и большого иллюстративного материала в [2] показано, что все классические автономные диссипативные нелинейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений имеют один общий сценарий перехода к хаосу. Он состоит в следующем.

Система переходит к хаосу через каскады бифуркаций удвоения периода, субгармонический и затем гомоклинический каскады мягких бифуркаций устойчивых предельных циклов. Бесконечный каскад бифуркаций удвоения периода — это и есть сценарий Фейгенбаума, который можно обнаружить во многих нелинейных динамических системах, имеющих хаотическое поведение. Этот каскад приводит к возникновению нерегулярного аттрактора Фейгенбаума. На этом, что интересно, все не заканчивается: как правило, каскад Фейгенбаума является начальной стадией других, более сложных каскадов бифуркаций, ведущих к возникновению более сложных хаотических аттракторов. При дальнейшем увеличении бифуркационного параметра в системе происходит рождение устойчивых предельных циклов любого периода в соответствии со сценарием, найденным Шарковским [7]. Им было доказано, что существует

отношение, которое упорядочивает циклы по величине их периода следующим образом:

$$1 \triangleleft 2 \triangleleft 2^2 \triangleleft 2^3 \triangleleft \dots \triangleleft 2^2 \cdot 7 \triangleleft 2^2 \cdot 5 \triangleleft 2^2 \cdot 3 \triangleleft \dots \\ \dots \triangleleft 2 \cdot 7 \triangleleft 2 \cdot 5 \triangleleft 2 \cdot 3 \triangleleft \dots \triangleleft 9 \triangleleft 7 \triangleleft 5 \triangleleft 3. \quad (1)$$

Первое соотношение в этом ряду означает, что если одномерное непрерывное отображение имеет цикл удвоенного периода, то оно имеет и простой цикл. Самым сложным в этом ряду является цикл периода три. Существование такого цикла означает также и существование любого цикла любого периода из ряда (1).

Оказалось [2], что не только порядок Фейгенбаума, но и порядок Шарковского имеет место для типичного каскада бифуркаций устойчивых циклов нелинейных динамических систем, описываемых дифференциальными уравнениями. Субгармонический каскад бифуркаций устойчивых циклов порождает бесконечное число циклических субгармонических сингулярных аттракторов, которые являются значительно более сложными аттракторами, чем аттрактор Фейгенбаума. Каждый из таких аттракторов порождается каскадом бифуркаций удвоения периода некоторого устойчивого цикла из ряда (1), родившегося в результате соответствующей седло-узловой бифуркации, и является неполным циклическим субгармоническим аттрактором. Полный циклический субгармонический сингулярный аттрактор возникает после каскада бифуркаций удвоения периода цикла периода три. В некоторых системах этот процесс продолжается каскадом бифуркаций рождения устойчивых гомоклинических циклов, стремящихся к существующему в системе гомоклиническому контуру — петле сепаратрисы седло-фокуса.

Что же касается сценариев 2 и 3, то авторам [2] неизвестны конкретные примеры систем дифференциальных уравнений, в которых переход к хаосу осуществлялся бы подобным образом. Было обнаружено, что в системе Лоренца сценарий 3 не имеет места: имеет место лишь перескок траектории с одного фрагмента устойчивого цикла на другой его фрагмент вследствие погрешностей в вычислениях.

Одним из авторов данной статьи было найдено еще одно экспериментальное подтверждение теории сценариев перехода к хаосу и возникновения аттракторов в динамических системах, изложенной в работе Н. А. Магницкого и С. В. Сидорова [2]. Были проведены численные исследования трехмерной системы дифференциальных уравнений, моделирующей замкнутую трофическую цепь в экологии. Данная система описана в работе Ю. М. Свирижева [4], там же приведены некоторые значения параметров, при которых был обнаружен каскад бифуркаций удвоения периода.

Экологическая модель: трофическая цепь длины три

Большое число моделей математической экологии описываются системами обыкновенных дифференциальных уравнений. Многие экологические модели попадают в класс динамических систем, которые, не-

смотря на их полную детерминированность, демонстрируют типичное стохастическое поведение. В реальной экосистеме можно наблюдать либо циклическую динамику, либо нерегулярные хаотические колебания численности. Оказывается, эти колебания чаще связаны не с регулярными или случайными колебаниями внешней среды, а присущи самой системе как таковой в постоянной среде. Это стало ясно после того, как появилась работа Вито Вольтерра о колебаниях в системе «хищник — жертва».

Рассмотрим естественное обобщение вольтеровской системы — трофическую цепь. Согласно [4], *трофическая цепь* — это сообщество видов, последовательно связанных между собой отношениями типа «хищник — жертва», трофический граф которого представляет собой простую линейную цепь без ветвлений. Структура этого сообщества изображена на рис. 1.

Обозначения таковы: R — ресурс, потребляемый 1-м видом с биомассой N_1 со скоростью $V_0(R)$ (на единицу биомассы); Q — скорость поступления ресурса R в систему; a_i — доля отмершей биомассы, возвращающейся в круговорот; k_i — доля, которая идет на производство новой биомассы i -го вида; m_i — скорость отмирания биомассы i -го вида; N_i — биомасса i -го вида; $V_i(N_i)$ — скорость потребления ресурса в виде биомассы i -го вида i -м видом.

По рис. 1 можно записать балансовые уравнения для биомасс видов, составляющих трофическую цепь ($R = N_0$):

$$\begin{aligned} \frac{dN_0}{dt} &= Q - V_0(N_0)N_1 + \sum a_i m_i N_i, \quad i = 1, \dots, n, \\ \frac{dN_i}{dt} &= k_i V_{i-1}(N_{i-1})N_i - V_i(N_i)N_{i+1} - m_i N_i, \quad N_{n+1} \equiv 0. \end{aligned} \tag{2}$$

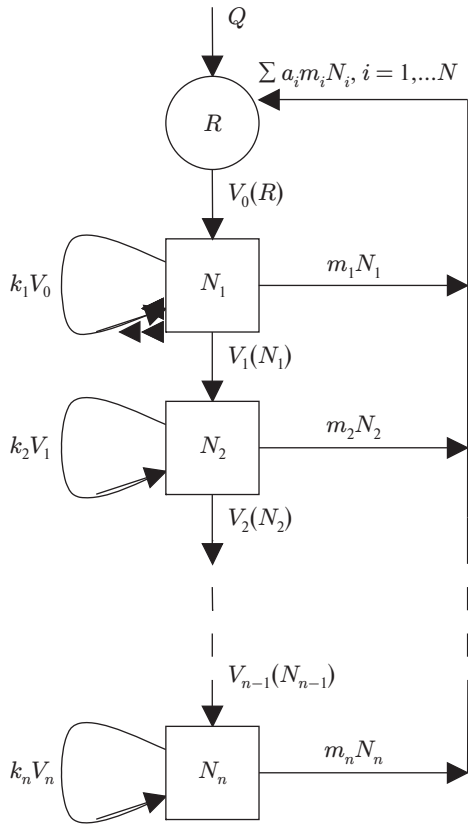


Рис. 1. Схема трофической цепи длины n

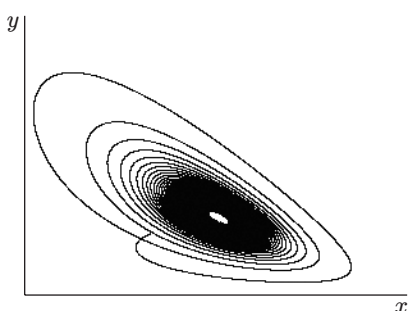


Рис. 2. Рождение устойчивого предельного цикла Γ_s при значении $C = 9,447$ (проекция на оси (x, y))

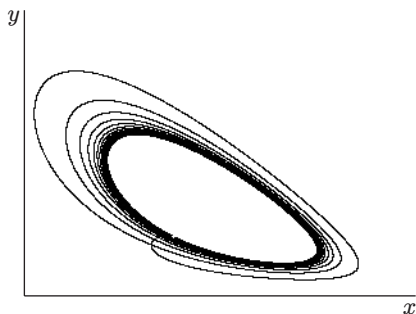


Рис. 3. Увеличение устойчивого предельного цикла при значении $C = 10$ (проекция на оси (x, y))

Одной из самых простых экологических моделей, в которых было обнаружено возникновение хаоса, является модель замкнутой ($k_i = a_i \equiv 1$ для всех $i = 1, \dots, N$; $Q = 0$) трофической цепи длины 3, описываемая системой

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x \left(-0,1 - \alpha(-C + x + y + z) - \frac{y}{5+x} \right), \\ \frac{dy}{dt} &= y \left(-0,2 + \frac{x}{5+x} - \frac{z}{5+y} \right), \\ \frac{dz}{dt} &= z \left(-0,2 + \frac{y}{5+y} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Все математические выкладки и предположения, при помощи которых из (2) была получена система (3), приведены в [4]. Поясним только, что x , y и z суть N_1 , N_2 и N_3 для системы (1); $m_1 = 0,1$; $m_2 = m_3 = 0,2$; α — некий параметр ($0,30 \leq \alpha_0 \equiv \alpha \leq 0,37$); C (бифуркационный параметр) — суммарное количество вещества в системе, остающееся постоянным.

Численные расчеты проводились с использованием метода Рунге—Кутты 4-го порядка. Значение параметра $\alpha = 0,34$. Как сказано в [4], в системе имеется каскад бифуркаций удвоения периода, после которого можно наблюдать аттрактор Фейгенбаума. На рисунках приведены иллюстрации, показывающие, как меняются траектории системы в зависимости от значения бифуркационного параметра.

При дальнейшем увеличении бифуркационного параметра C возникают циклы удвоенного (по сравнению с предыдущим циклом) периода. Эти значения таковы: $C = 35,4$ (цикл периода 8); $C = 35,541$ (цикл периода 16); $C = 35,572$ (цикл периода 32) и т. д. [4]. Далее при значении $C = 36,6$ получаем аттрактор (см. рис. 7).

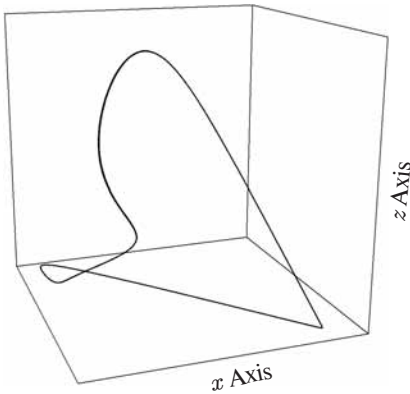


Рис. 4. Устойчивый цикл Γ_1 при значении $C = 30,6$

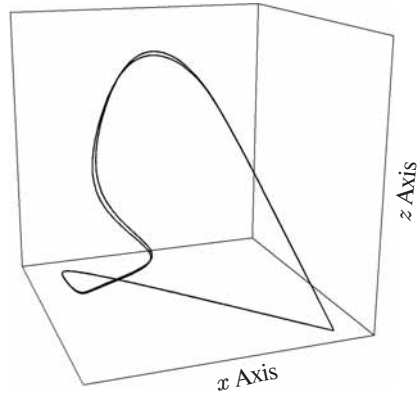


Рис. 5. Цикл Γ_1 теряет устойчивость и от него отщепляется устойчивый цикл Γ_2 удвоенного периода при значении $C = 33,05$

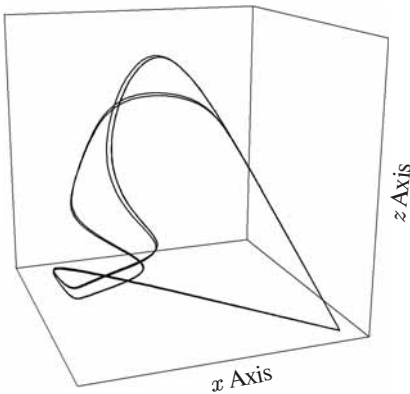


Рис. 6. Цикл Γ_2 теряет устойчивость и от него отщепляется устойчивый цикл Γ_4 удвоенного по сравнению с Γ_2 периода при значении $C = 34,835$

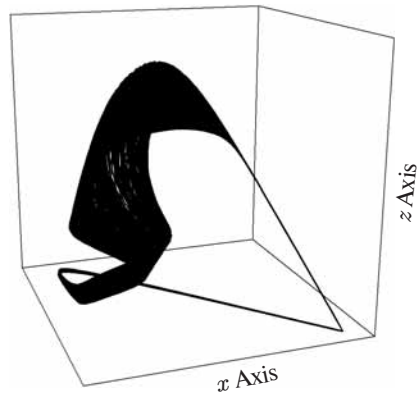


Рис. 7. Аттрактор при значении $C = 36,6$

Однако все не заканчивается возникновением аттрактора. При дальнейшем увеличении бифуркационного параметра C в системе возникают циклы различных периодов предположительно в соответствии с порядком Шарковского. При значении $C = 38,629$ в настоящей работе был найден цикл периода три. Этот цикл является самым сложным в ряду Шарковского, так как его существование означает также и существование любого цикла любого периода из ряда (1). Это отношение было выведено Шарковским для одномерных отображений, однако исследования, проведенные

Н. А. Магницким и С. В. Сидоровым [2] показывают, что этот порядок имеет место и для нелинейных динамических систем, описываемых дифференциальными уравнениями. Таким образом, найденный в исследуемой экологической системе цикл периода 3 подтверждает предположение о наличии порядка Шарковского и в этой системе.

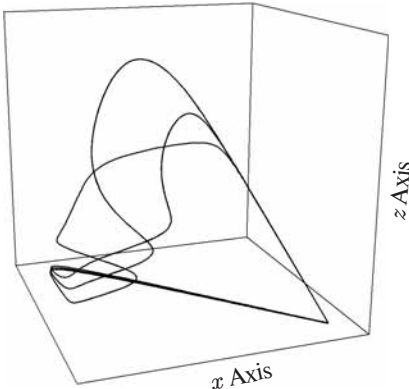


Рис. 8. Цикл периода 3 при значении $C = 38,629$

Если теперь мы будем уменьшать значение C , то будем получать циклы различного периода (в соответствии с порядком Шарковского), перемежающиеся с полностью хаотизированными траекториями. Наоборот, при увеличении C ($C > 38,629$) будем наблюдать каскад бифуркаций удвоений периода цикла периода 3 (и, скорее всего, всех остальных циклов всех периодов в порядке (1)).

Экологическая интерпретация полученных результатов

Рассмотрим модель (3). Как можно экологически интерпретировать эти результаты? Если рассматривать данную модель в качестве модели изолированных водоемов [4], то ресурс N_0 можно рассматривать как концентрацию биогенных элементов, N_1 как плотность фитопланктона, N_2 — плотность зоопланктона, и N_3 — плотность рыб, питающихся зоопланктоном. Параметр α можно интерпретировать как коэффициент интенсивности фотосинтеза, который возрастает, например, с ростом температуры (при не очень высоких ее значениях) и с увеличением фотоактивной радиации.

Увеличение параметра C в модели соответствует увеличению биогенного загрязнения водоемов, т. е. явлению, приводящему к эвтрофикации. С другой стороны, мы видим, что увеличение параметра C резко повышает вероятность возникновения хаоса. Из этого можно сделать вывод, что именно для стадии эвтрофикации водоема характерно возникновение хаотической динамики экосистемы. В хаотическом режиме траектории близко подходят к координатным плоскостям — тем самым именно для этого режима (и для его предвестника — колебаний увеличивающейся амплитуды) резко возрастает вероятность вырождения видов и, как следствие, разрушения исходной экосистемы.

Интерпретация полученных результатов с точки зрения хаотической динамики

Несмотря на то что в мировой науке классическими сценариями перехода к хаосу по-прежнему считаются три, перечисленные в начале настоящей статьи, на данный момент уже сделаны большие шаги в сторону опровержения этой теории и построения новой, дающей истинный ответ на вопрос о происхождении и природе хаоса. Численные результаты, полученные при исследовании модели трофической цепи длины три в экологии, подтверждают «неклассическую» точку зрения. Эти выводы можно считать еще одним шагом на пути к признанию изложенной в [2] теории динамического хаоса в нелинейных системах дифференциальных уравнений.

Литература

1. *Lorenz E. N.* Deterministic Nonperiodic Flow // J. Atmos Sci. 1963. V. 20. P. 130–141.
2. *Магницкий Н. А., Сидоров С. В.* Новые методы хаотической динамики. М.: УРСС, 2004. 320 с.
3. *Малинецкий Г. Г., Потанов А. Б.* Современные проблемы нелинейной динамики. М.: УРСС, 2002. 360 с.
4. *Свирижев Ю. М.* Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. 368 с.
5. *Хакен Г.* Тайны природы. Синергетика: учение о взаимодействии. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 320 с.
6. *Чуличков А. И.* Математические модели нелинейной динамики. М.: Физматлит, 2003. 296 с.
7. *Шарковский А. Н.* Сосуществование циклов непрерывного преобразования прямой в себя // Укр. мат. журн. 1964. Т. 26. № 1. С. 61–71.