

Задача о движущейся нагрузке

А. В. Пестерев

В статье рассматривается задача о колебаниях распределенной системы под действием движущейся нагрузки. Цель работы — разработать простой способ нахождения максимального прогиба распределенной системы при любой скорости нагрузки. Показано, что существует функция, описывающая зависимость максимального прогиба от скорости для любой балки с данными граничными условиями. Предложен метод нахождения этой функции, основанный на предположении о том, что максимальный отклик может быть адекватно аппроксимирован с помощью одномерного приближения. В качестве иллюстрации найдено явное выражение для максимального отклика балки с шарнирно опертыми концами. Выведена формула для относительной ошибки одномеровой аппроксимации. Полученные оценки подтверждают предположение об адекватности одномерового приближения в широком диапазоне скоростей. В частности, относительная ошибка в окрестности пикового значения скорости меньше одного процента.

1. Введение

Задача нахождения отклика распределенной системы под действием движущейся нагрузки является важной для многих приложений (например, для проектирования автомобильных мостов). Для решения этой задачи было разработано много методов (см., например, [1, 2] и приведенные там ссылки). Один из наиболее известных методов состоит в разложении искомого решения в ряд по собственным функциям распределенной системы [2–5]. В случае, когда величина силы не меняется во времени, коэффициенты разложения могут быть получены в явном виде [2–4].

Однако во многих случаях конструктора интересует не решение конкретной задачи о колебаниях распределенной системы (которое является функцией пространственной переменной и времени и зависит от многих параметров, таких как характеристики распределенной системы и движущейся нагрузки), а, например, максимальный отклик для заданной скорости нагрузки, или максимум такого отклика по всем возможным скоростям, или зависимость амплитуды свободных колебаний от скорости и т. п. Численное определение таких характеристик требует многократного

решения задачи при разных значениях скорости, и полученные результаты, как правило, не применимы при других значениях параметров.

Цель настоящей работы — найти зависимость максимального отклика балки от скорости движущейся силы и таким образом дать конструктору, имеющему дело с конструкциями подверженными движущимся нагрузкам, простое средство, позволяющее ему получить некоторые требуемые характеристики с помощью простейших арифметических операций. Основной результат настоящей работы — это нахождение явной функциональной зависимости максимального отклика шарнирно опертой балки от скорости движущейся силы, которая позволяет получить максимальный отклик любой балки с помощью простейших арифметических вычислений. Показано, что максимальный отклик может быть адекватно аппроксимирован с помощью одного члена разложения в ряд по собственным функциям. Получена формула для относительной ошибки одномерной аппроксимации, подтверждающая высокую точность одномерного приближения.

Хотя задача о движущейся силе является относительно простой, ее решение представляет несомненный интерес по следующим причинам. Во-первых, знание определенных интегральных характеристик этого решения, полученных без особых усилий, может быть очень полезным для инженеров и конструкторов при исследовании более реалистичных моделей движущихся транспортных средств, предоставляя разумные аппроксимации искомым результатам и помогая таким образом решить более сложную задачу. Во-вторых, анализ данной модели все же не тривиален, и примеры неправильной интерпретации решения можно найти даже в стандартных университетских учебниках (см. обсуждение в разделе 3).

2. Постановка задачи

Уравнение однородной балки, совершающей колебания под действием силы, движущейся вдоль балки с постоянной скоростью v имеет вид

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} w + EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} w = F \delta(x - vt), \quad 0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq t \leq \frac{L}{v}, \quad (1)$$

где функция $w(x, t)$ удовлетворяет заданным граничным и нулевым начальным условиям. Переходя к безразмерным переменным

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{t} = \Omega t, \quad \Omega = \frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho}}, \quad \bar{w} = \frac{EI w}{FL^3}, \quad \bar{v} = \frac{v}{L\Omega}, \quad \bar{\delta}(\cdot) = L\delta(\cdot),$$

запишем уравнение (1) в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial \bar{t}^2} \bar{w} + \frac{\partial^4}{\partial \bar{x}^4} \bar{w} = \bar{\delta}(\bar{x} - \bar{v}\bar{t}), \quad 0 \leq \bar{x} \leq 1, \quad 0 \leq \bar{t} \leq \frac{1}{\bar{v}}. \quad (2)$$

Отсюда очевидно, что отклик \bar{w} является функцией только трех параметров: \bar{x} , \bar{t} и \bar{v} .

Поставим задачу нахождения функции

$$\bar{W}(\bar{v}) = \max_{\bar{x}} \max_{\bar{t}} |\bar{w}(\bar{x}, \bar{t}; \bar{v})|,$$

описывающей зависимость максимального прогиба балки от скорости \bar{v} . Легко видеть, что эта функция зависит только от безразмерной скорости и, таким образом, может быть применена к любой балке с теми же граничными условиями. При заданных характеристиках ρ и EI , скорости v , и величине движущейся силы F , максимальный отклик размерной балки при тех же граничных условиях находится по формуле

$$W(v) = \max_x \max_t |w(x, t; v)| = \frac{FL^3}{EI} \bar{W} \left(vL \sqrt{\frac{\rho}{EI}} \right). \quad (3)$$

В последующем изложении используются безразмерные величины, но, для простоты записи, черта над символами не ставится.

3. Подход

Основная трудность, связанная с нахождением функции $W(v)$, заключается в том, что в общем случае эта задача требует многократного численного решения уравнения (2) для нахождения отклика $w(x, t; v)$ при различных значениях скорости v . Кроме того, глобальный максимум может достигаться в момент времени, когда нагрузка уже покинула балку, что требует решения задачи о свободных колебаниях. Численное нахождение $\max_x \max_t |w(x, t; v)|$ — не простая задача, так как, при заданном v , $|w(x, t; v)|$ есть негладкая функция двух переменных, которая (как будет видно из последующего) может иметь множество локальных экстремумов.

В настоящей работе предлагается следующий подход к нахождению функции $W(v)$. Решение уравнения (2) может быть представлено в виде ряда

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) q_n(t), \quad (4)$$

где

$$q_n(t) = \int_0^t \frac{\varphi_n(v\tau)}{\omega_n} \sin \omega_n(t - \tau) d\tau, \quad (5)$$

а ω_n и $\varphi_n(x)$ — собственные частоты и собственные функции балки.

Хорошо известно (например, [2]), что вклад первой моды в решение значительно превышает вклад остальных мод. Это позволяет предположить, что в рассматриваемой задаче вполне достаточно использовать одномодовое приближение; т. е. при вычислении $\max_x \max_t |w(x, t)|$, мы подставляем функцию

$$w_1(x, t) = q_1(t) \varphi_1(x) \quad (6)$$

вместо точного решения $w(x, t)$, даже если $w_1(x, t)$ плохо аппроксимирует $w(x, t)$ при некоторых x и t . Справедливость этого предположения будет далее подтверждена (п. 5) анализом вклада остальных мод в максимальный отклик.

Использование упомянутого подхода значительно упрощает решение задачи оптимизации. Действительно, вместо функции двух переменных, мы имеем дело с функцией одной переменной $q_1(t)$, так как зависимость от x тривиальна: максимум, очевидно, достигается в точке $x = 0,5$.

Если одномодовое приближение максимального отклика найдено, другие моды можно учесть рассматривая их вклад в решение как возмущение одномодового приближения. Соответствующая техника демонстрируется в разделе 5 на примере вычисления ошибки одномодового приближения, вызванной отбрасыванием второго и третьего членов разложения (на практике, более высокочастотные компоненты не оказывают никакого эффекта на решение). Полученная функция — очень полезна: с одной стороны, она дает представление об относительной ошибке одномодовой аппроксимации, а с другой стороны, приближенное решение может быть улучшено с помощью этой функции, если исследователь не удовлетворен его точностью.

Всюду далее в этой статье подразумевается, если не оговорено противное, что концы балки закреплены шарнирно; т. е. $w(0, t) = w(L, t) = w''(0, t) = w''(L, t) = 0$. Для такой балки коэффициенты $q_n(t)$, а следовательно и функция $W(v)$, могут быть легко найдены в явном виде. Для других граничных условий собственные функции балки имеют более сложный вид, и аналитическое исследование становится затруднительным. В этих случаях, в рамках того же подхода, зависимость максимального отклика балки от скорости может быть найдена численно. Этот подход продемонстрирован в [6] на примере балки с зажатыми концами.

Собственные функции и собственные частоты единичной шарнирно опертой балки хорошо известны: $\varphi_n(x) = \sqrt{2} \sin \lambda_n x$, $\omega_n = \lambda_n^2$, $\lambda_n = n\pi$, $n = 1, 2, \dots$. Подставляя выражение для $\varphi_n(x)$ в (5) и беря интеграл по частям, запишем уравнение (4) в виде [3, 4]

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \sqrt{2} \sin \lambda_n x, \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{v}, \quad (7)$$

где

$$q_n(t) = \frac{\sqrt{2}}{\omega_n(\alpha_n^2 - \omega_n^2)} (\alpha_n \sin \omega_n t - \omega_n \sin \alpha_n t), \quad \alpha_n = \lambda_n v. \quad (8)$$

В [4, р. 471] утверждается, что отклонение становится бесконечно большим, когда $\alpha_n = \omega_n$, т. е. скорость равна $v_n = \omega_n / \lambda_n = n\pi$. Это конечно не так. Хотя числитель в (8) равен нулю при $\alpha_n = \omega_n$, знаменатель также обращается в нуль. Применяя правило Лопитала к правой части (8)

при $\alpha_n \rightarrow \omega_n$, мы получаем

$$\lim_{\alpha_n \rightarrow \omega_n} q_n(t) = \lim_{\alpha_n \rightarrow \omega_n} \frac{\sqrt{2}(\sin \omega_n t - t\omega_n \cos \alpha_n t)}{2\omega_n \alpha_n} = \frac{\sin \omega_n t - t\omega_n \cos \omega_n t}{\sqrt{2}\omega_n^2},$$

откуда следует, что $q_n(t)$ непрерывно зависит от скорости и конечен при любых $t \leq 1/v$.

Аналогично, в [3, р. 294] утверждается, что уравнение (8) справедливо только при $\alpha_n \neq \omega_n$, и что при $\alpha_n = \omega_n$ развивается ситуация, напоминающая резонанс (решение возрастает до бесконечности). Очевидно, что это не так: никакого резонанса не может быть, так как время воздействия силы на балку конечно (половина периода первого собственного колебания при $n = 1$), и конечное решение, на самом деле, существует. Более того, как будет показано ниже, максимальное отклонение балки имеет место при другой скорости.

4. Одномодовое приближение решения

В зависимости от скорости v , максимум колебаний может достигаться либо когда сила находится на балке (вынужденные колебания) либо когда она уже покинула ее (т. е. когда балка совершает свободные колебания). Очевидно, что в обоих случаях при любом t максимум достигается при $x = 0, 5$, и нам остается только найти максимум по t . Рассмотрим сначала случай вынужденных колебаний.

4.1. Вынужденные колебания

Пусть v фиксировано, $v \neq v_1$, где $v_1 = \omega_1/\lambda_1 \equiv \pi$. Найдем значение t при котором $|q_1(t)|$ достигает своего максимального значения на интервале $[0, T_p]$, где $T_p = 1/v$. Для этого продифференцируем уравнение (8):

$$\dot{q}_1(t) = \frac{\sqrt{2}\alpha_1}{\alpha_1^2 - \omega_1^2}(\cos \omega_1 t - \cos \alpha_1 t).$$

Так как $v \neq v_1$, правая часть этого уравнения может равняться нулю только если

$$\omega_1 t + \alpha_1 t = 2k\pi, \quad k = 1, 2, \dots,$$

или

$$\omega_1 t - \alpha_1 t = 2k\pi, \quad k = 1, 2, \dots,$$

причем последняя группа точек соответствует локальным минимумам $q_1(t)$. Отсюда находим, что локальные максимумы $|q_1(t)|$ могут иметь место только при условии

$$t(\beta_1, k) = \frac{2k\pi}{\omega_1 + \alpha_1} \equiv \frac{2k\pi}{\omega_1(1 + \beta_1)}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (9)$$

где β_1 — безразмерная скорость,

$$\beta_1 = \frac{\alpha_1}{\omega_1} \equiv \frac{v}{v_1} \equiv \frac{v}{\pi}.$$

Так как мы рассматриваем вынужденные колебания, величина $t(\beta_1, k)$ должна удовлетворять неравенству $t(\beta_1, k) \leq T_p$. Отсюда нетрудно показать, что при

$$\frac{1}{4n+1} < \beta_1 \leq \frac{1}{4n-3}$$

$|q_1(t)|$ имеет n локальных максимумов и что глобальный максимум достигается при $t = t(\beta_1, n)$ и равен

$$\max |q_1(t)| = \frac{\sqrt{2}}{\omega_1^2} \Phi_{1n}(\beta_1),$$

где

$$\Phi_{1n}(\beta_1) = \frac{1}{1-\beta_1} \left| \sin \frac{2n\pi}{1+\beta_1} \right|. \quad (10)$$

Если $\beta_1 > 1$ ($v > v_1$), то $t(\beta_1, k) > T_p$ для всех k . Это означает, что $|q_1(t)|$ не имеет максимумов в интервале $[0, T_p)$, так что максимум вынужденных колебаний достигается в момент, когда сила находится на правом конце балки. Соответствующее значение коэффициента $q_1(t)$ получается подстановкой $t = T_p$ в (8) с учетом соотношения $\alpha_1 T_p = \pi$:

$$q_1(T_p) = \frac{\sqrt{2} \alpha_1}{\omega_1(\alpha_1^2 - \omega_1^2)} \sin \omega_1 T_p = \frac{\sqrt{2} \beta_1}{\omega_1^2(\beta_1^2 - 1)} \sin \frac{\pi}{\beta_1} \equiv \frac{\sqrt{2}}{\omega_1^2} \Phi_{10}(\beta_1), \quad \beta_1 \geq 1.$$

Пусть k пробегает значения от 1 до ∞ . Введем обозначение $\Phi_1(\beta_1)$ для функции определенной правилом

$$\begin{aligned} \Phi_1(\beta_1) &\equiv \Phi_{10}(\beta_1) \quad \text{при} \quad \beta_1 \geq 1, \\ \Phi_1(\beta_1) &\equiv \Phi_{1k}(\beta_1) \quad \text{при} \quad \frac{1}{4k+1} \leq \beta_1 \leq \frac{1}{4k-3}. \end{aligned} \quad (11)$$

В начале этого раздела мы предположили, что $v \neq v_1$. Однако легко видеть, что пределы функций $\Phi_{10}(\beta_1)$ и $\Phi_{11}(\beta_1)$ при $\beta_1 \rightarrow 1$ существуют и равны друг другу, и следовательно функция $\Phi_1(\beta_1)$ определена для любых β_1 .

Легко проверить, что для $\beta_1 \leq 1$

$$\max_x \max_t |w_1(x, t)| = \sqrt{2} \max_{0 \leq t \leq T_p} |q_1(t)| = \frac{2}{\omega_1^2} \Phi_1(\beta_1) \equiv \frac{2}{\pi^4} \Phi_1(\beta_1),$$

т. е. зависимость максимального вынужденного отклика от скорости определяется функцией $\Phi_1(\beta_1)$, график которой показан на рис. 1 сплошной линией.

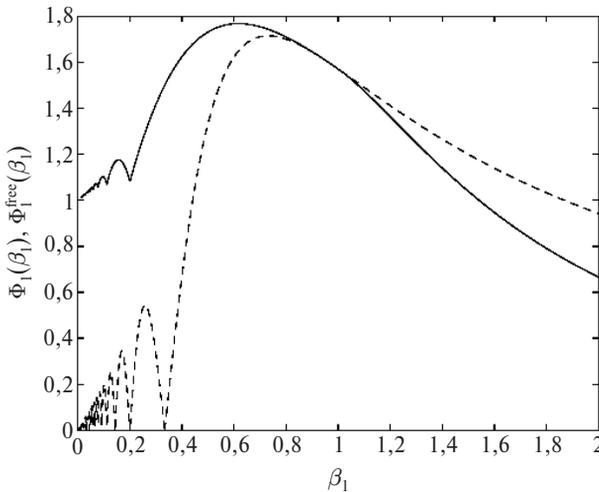


Рис. 1. Функции $\Phi_1(\beta_1)$ (сплошная линия) и $\Phi_1^{\text{free}}(\beta_1)$ (пунктирная линия)

4.2. Свободные колебания

Как уже упоминалось, отклонение может достичь своего максимального значения после того, как сила покинет балку. Можно показать [6], что свободные колебания балки в этом случае периодичны с периодом, равным периоду $T_1 = 2/\pi$ первого собственного колебания и описываются уравнением

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(v) \cos \omega_n \left(t - \frac{1}{2\pi} - \frac{T_p}{2} \right) \sin n\pi x, \quad t \geq T_p, \quad (12)$$

где

$$C_n(v) = \frac{4\alpha_n}{\omega_n(\alpha_n^2 - \omega_n^2)} \sin \omega_n \left(\frac{1}{2\pi} + \frac{T_p}{2} \right). \quad (13)$$

Так как мы рассматриваем одномодовое приближение, максимальный отклик равен амплитуде $|C_1(v)|$ первого собственного колебания. Вводя обозначение

$$\Phi_1^{\text{free}}(\beta_1) = \frac{2\beta_1}{|\beta_1^2 - 1|} \left| \sin \omega_1 \left(\frac{1}{2\pi} + \frac{T_p}{2} \right) \right| \equiv \frac{2\beta_1}{|\beta_1^2 - 1|} \left| \sin \frac{\pi}{2} \left(\frac{\beta_1 + 1}{\beta_1} \right) \right|, \quad (14)$$

получаем

$$|C_1(\beta_1)| = \frac{2}{\omega_1^2} \Phi_1^{\text{free}}(\beta_1). \quad (15)$$

Функция $\Phi_1^{\text{free}}(\beta_1)$, изображенная на рис. 1 пунктирной линией, представляет зависимость амплитуды первого собственного колебания балки от безразмерной скорости движущейся нагрузки.

Заметим, что амплитуда свободных колебаний балки минимальна (первое собственное колебание полностью подавлено), когда $\beta_1 = 1/3, 1/5, 1/7, \dots$; эти значения β_1 соответствуют скоростям, при которых время пересечения балки нагрузкой есть нечетное кратное половины периода первого собственного колебания: $T_p = 3(T_1/2), 5(T_1/2), 7(T_p/2), \dots$.

4.3. Максимальный прогиб

Из рис. 1 видно, что, если скорость меньше чем $v_1 = \pi$ ($\beta_1 < 1$), максимальный отклик на этапе вынужденных колебаний больше чем амплитуда свободных колебаний. Если $v > v_1$, отклонение достигает своего максимума после того, как сила покинет балку. Введем обозначение

$$\Psi_1(\beta_1) = \begin{cases} \Phi_1(\beta_1), & \text{при } 0 < \beta_1 \leq 1; \\ \Phi_1^{\text{free}}(\beta_1), & \text{при } 1 \leq \beta_1 < \infty. \end{cases} \quad (16)$$

Тогда

$$W_1(v) \equiv \max_x \max_t |w_1(x, t; v)| = \frac{2}{\omega_1^2} \Psi_1(\beta_1) \equiv \frac{2}{\pi^4} \Psi_1\left(\frac{v}{\pi}\right). \quad (17)$$

Максимум функции $\Psi_1(\beta_1)$ равен приблизительно 1,75 и достигается при $\beta_1 \approx 0,62$ ($v \approx 2$). При уменьшении v , $\Phi_1(\beta_1)$ стремится к единице, и максимальное отклонение балки равно $\frac{2}{\pi^4} \approx \frac{1}{48,7}$, что очень близко к точному значению $\frac{1}{48}$ отклонения под действием статической силы, приложенной в середине балки.

5. Вклад остальных мод в максимальный прогиб

Для того, чтобы показать, что эффект остальных мод на максимальный прогиб балки не велик, мы вычислим аппроксимацию максимального отклонения с помощью трех мод. Так как максимальные значения коэффициентов $|q_2(t)|$ и $|q_3(t)|$ гораздо меньше чем максимум $|q_1(t)|$, мы можем рассматривать второй и третий члены разложения (4) как возмущения и считать, что максимум $|w(x, t; v)|$ достигается в $x = 0,5 + \Delta x$ при $t = t_0 + \Delta t$, где $t_0(v) = \arg \max_t |q_1(t; v)|$ определен одной из функций (9), а Δx и Δt малы.

Пусть сначала $v \leq v_1 = \pi$. Приближенное решение записывается в виде

$$w(x, t; v) = \sqrt{2} \{ q_1(t) \sin \pi x + q_2(t) \sin 2\pi x + q_3(t) \sin 3\pi x \} = \\ = \sqrt{2} q_1(t_0) \{ \tilde{q}_1(t) \sin \pi x + \varepsilon(v) \tilde{q}_2(t) \sin 2\pi x + \delta(v) \tilde{q}_3(t) \sin 3\pi x \},$$

где $\varepsilon(v) = q_2(t_0)/q_1(t_0)$ и $\delta(v) = q_3(t_0)/q_1(t_0)$ — малые параметры; $\tilde{q}_1(t)$, $\tilde{q}_2(t)$ и $\tilde{q}_3(t)$ имеют одинаковый порядок; и $\tilde{q}_1(t_0) = \tilde{q}_2(t_0) = \tilde{q}_3(t_0) = 1$. Разлагая все функции в ряд Тейлора в окрестности $x = 0,5$ и $t = t_0$

и отбрасывая малые члены с показателями степени больше чем два, мы находим, что $\Delta w \equiv w(0,5 + \Delta x, t_0 + \Delta t; v)$ определяется формулой

$$\Delta w \approx \sqrt{2}q_1(t_0) \left\{ 1 - \ddot{q}_3(t_0) \frac{(\Delta t)^2}{6} - \frac{(\pi \Delta x)^2}{2} - 2\varepsilon(\pi \Delta x) - \delta - \delta \dot{\ddot{q}}_3(t_0) \Delta t \right\}. \quad (18)$$

Приравнивая производные по Δt и $(\pi \Delta x)$ нулю, получаем

$$-\pi \Delta x - 2\varepsilon = 0, \quad -\ddot{q}_1(t_0) \Delta t - \delta \dot{\ddot{q}}_3(t_0) = 0.$$

Отсюда следует, что максимум по Δw достигается при

$$\Delta x = -\frac{2\varepsilon}{\pi} \quad (19)$$

и $\Delta t = O(\delta)$. Конкретный вид зависимости Δt от δ не важен, так как, правая часть (18) линейно зависит от δ , в то время как члены, содержащие Δt имеют более высокий порядок малости и могут быть отброшены. Соответствующее значение максимального отклика определяется формулой

$$W(v) = \max_{\Delta x} \max_{\Delta t} |\Delta w| = W_1(v) \{ 1 - \delta + 2\varepsilon^2 + o(\delta) + o(\varepsilon^2) \}, \quad 0 \leq v \leq \pi. \quad (20)$$

Пусть теперь $v > v_1$. В этом случае максимум достигается тогда, когда сила оставляет балку, и функция $W_1(v)$ есть амплитуда $|C_1(v)|$ свободных колебаний с частотой равной первой собственной частоте. Так как $|C_1(v)|$ намного больше амплитуд других собственных колебаний, мы снова можем находить приближенную амплитуду результирующих колебаний с помощью теории возмущений. Из (12) следует, что амплитуда свободных колебаний может быть вычислена по формуле

$$|C(v)| = \max_x (C_1(v) \sin \pi x \pm C_2(v) \sin 2\pi x + C_3(v) \sin 3\pi x), \quad (21)$$

где $C_n(v)$, $n = 1, 2, 3$, определено в (13). Аналогично случаю вынужденных колебаний, мы вводим малые параметры $\varepsilon(v) = C_2(v)/C_1(v)$ и $\delta(v) = C_3(v)/C_1(v)$ и переписываем (21) в виде

$$|C(v)| = |C_1(v)| \max_x (\sin \pi x \pm \varepsilon(v) \sin 2\pi x + \delta(v) \sin 3\pi x),$$

Разлагая синусы в ряды Тейлора в окрестности $x = 0, 5$, мы получаем

$$|C(v)| \approx |C_1(v)| \left\{ 1 - \frac{(\pi \Delta x)^2}{2} \pm \varepsilon \pi \Delta x - \delta + \delta \frac{9(\pi \Delta x)^2}{2} \right\}. \quad (22)$$

Дифференцируя правую часть (22) по Δx , получаем

$$\Delta x = \pm \frac{2\varepsilon}{1 - 9\delta}. \quad (23)$$

Подставляя Δx в (22), мы окончательно имеем

$$W(v) = |C(v)| \approx |C_1(v)| \left\{ 1 - \delta + \frac{2\varepsilon^2}{1 - 9\delta} \right\}, \quad v \geq v_1. \quad (24)$$

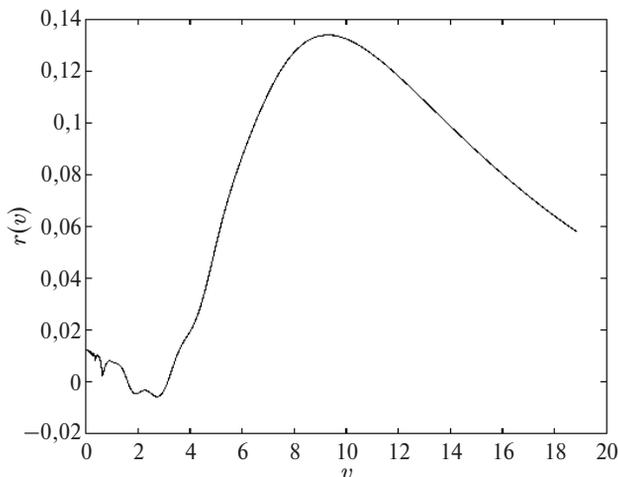


Рис. 2. Относительная ошибка (25) одномодовой аппроксимации

Объединяя оба рассмотренных случая, получаем

$$W(v) = W_1(v)(1 + r(v)),$$

где функция

$$r(v) = \begin{cases} -\delta(v) + 2\varepsilon^2(v), & 0 \leq v \leq \pi, \\ -\delta(v) + \frac{2\varepsilon^2(v)}{1 + 9\delta(v)}, & v \geq \pi, \end{cases} \quad (25)$$

изображена на рис. 2. Полученная функция ясно показывает, что точность одномодовой аппроксимации максимального отклика очень высока в широком диапазоне скоростей. В наиболее важном и интересном диапазоне $0 < v < 4$ (там, где максимальный отклик больше статического отклонения), относительная ошибка меньше 2%. Этот результат подтверждает наше предположение об адекватности одномодовой аппроксимации.

6. Выводы

В статье исследована задача о максимальном прогибе балки под действием движущейся нагрузки. Показано, что существует функция, описывающая зависимость максимального прогиба произвольной балки при заданных краевых условиях от скорости нагрузки. Эта функция позволяет нам найти максимальный прогиб балки при любой скорости, не решая дифференциальное уравнение, описывающее колебания балки, что очень удобно для инженера, проектирующего конструкции, подверженные движущимся нагрузкам.

Предложена методика нахождения приближенного решения исследуемой задачи, основанная на использовании одного члена разложения решения в ряд по собственным функциям балки. Для шарнирно опертой балки приближенная функция получена в явном виде. Относительная ошибка вычисления максимального прогиба с помощью этой функции в окрестности пиковой скорости меньше одного процента, что вполне достаточно для инженерных приложений. Основное достоинство результатов, представленных в статье, заключается в том, что они обеспечивают инженера-конструктора простыми «инструментами», позволяющими получить ряд важнейших характеристик решения задачи о движущейся нагрузке, не решая соответствующее дифференциальное уравнение. Следует отметить, что подход, предложенный в настоящей статье, может быть применен для нахождения приближенных функций (в аналитическом виде или численно), описывающих максимальный прогиб для балок с другими граничными условиями.

Литература

1. *Weaver W., Timoshenko S. P., and Young D. H.* Vibration Problems in Engineering. 5th Edition. John Wiley and Sons, 1990. P. 448–454.
2. *Fryba L.* Vibration of Solids and Structures under Moving Loads. London: Thomas Telford Ltd., 1999.
3. *Meirovitch L.* Analytical Methods in Vibrations. London: MacMillan, 1967.
4. *Fertis D. G.* Mechanical and Structural Vibrations. New York: Wiley, 1995.
5. *Pesterev A. V. and Bergman L. A.* Response of Elastic Continuum Carrying Moving Linear Oscillator // ASCE Journal of Engineering Mechanics. 1997. **123**. P. 878–884.
6. *Pesterev A. V., Yang B., Bergman L. A., and Tan C. A.* Revisiting the Moving Force Problem // Journal of Sound and Vibration. 2003. **261**. P. 75–91.