К задаче о движущейся массе

А. В. Пестерев

В статье рассматриваются задача о колебаниях системы с распределенными параметрами под действием движущейся сосредоточенной массы. Один из широко распространенных методов решения такого рода задач основан на разложении решения в ряд по собственным функциям распределенной системы, что позволяет свести исходное уравнение в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно обобщенных координат. Так как действующая на распределенную систему сила инерции сосредоточенной массы зависит от отклонения распределенной системы, система обыкновенных дифференциальных уравнений, получается в виде, не разрешенном относительно старших производных, что значительно затрудняет численное интегрирование этой системы. Основной результат статьи — вывод формулы аналитического обращения матрицы коэффициентов при старших производных. В статье также показано, что результаты, полученные для случая постоянной скорости массы, легко распространяются на случай переменной скорости.

1. Введение

Задача о колебаниях упругой системы с распределенными параметрами под действием движущейся по ней нагрузки возникает во многих инженерных приложениях (см., например, [1] и приведенные там ссылки). Выбор метода решения задачи определяется типом континуума и принятой моделью движущейся нагрузки и ее взаимодействия с континуумом. Различают три основные модели нагрузки. В первой модели учитывается только вес движущейся подсистемы (так называемая модель движущейся силы [1]). Вторая модель учитывает инерцию движущейся подсистемы (так называемая модель движущейся массы [1, 2]). Наконец, в третьей модели учитывается как масса подсистемы так и тот факт, что подсистема, вообще говоря, упруго взаимодействует с континуумом (здесь различают случаи подсистемы с одной степенью свободы, так называемая модель движущегося осциллятора [3, 4], и конечномерной подсистемы с произвольным числом степеней свободы [5]). В настоящей работе мы рассмотрим задачу о колебаниях балки под действием движущейся сосредоточенной массы, т. е. будем иметь дело со второй моделью. Один из эффективных методов решения этой задачи предложен в [2]. Новизна этого метода заключается, в частности, в том, что допускается, что в какие-то промежутки времени масса может терять контакт с распределенной системой (очевидно, что это может происходить только при достаточно больших скоростях). В этом случае решение задачи сводится к последовательному решению двух подзадач. Сначала решается стандартная задача о колебаниях балки под действием движущейся массы до момента начала отрыва массы от балки (который определяется как момент, когда сила взаимодействия между массой и балкой обращается в нуль). Затем решаются две не связанные задачи, о свободных колебаниях балки и о движении массы под действием силы тяжести, до момента, когда масса снова приходит в контакт с балкой. После того, как контакт восстановлен, снова решается стандартная задача о движущейся массе и т. д.

В настоящей статье рассматриваются две модификации метода, предложенного в [2], которые значительно улучшают его эффективность. Оба усовершенствования относятся к методу решения стандартной задачи о движущейся массе (первая из двух вышеперечисленных задач). Их значение определяется в том числе и тем обстоятельством, что метод решения стандартной задачи (до отрыва массы), используемый в [2], достаточно распространен и применяется также и другими исследователями. В рамках этого метода решение ищется в виде разложения в ряд по собственным функциям балки, и задача сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно зависящих от времени коэффициентов разложения. Так как сила инерции сосредоточенной массы зависит от отклонения балки, прямое применение этого подхода приводит к системе уравнений, не разрешенных относительно старших производных; т. е. коэффициенты при вторых производных являются функциями времени. Более того, вопрос о существовании обратной матрицы к матрице коэффициентов при старших производных не исследуется в [2]. Мы докажем, что матрица коэффициентов при старших производных всегда обратима и найдем аналитическое представление для обратной матрицы. Таким образом, система дифференциальных уравнений будет приведена к стандартному, разрешенному относительно старших производных, виду. Полученная система уравнений может быть решена численно с помощью любой стандартной процедуры. Мы также покажем, что, хотя описанный в [2] метод применим к случаю постоянной скорости движущейся массы, он может быть легко распространен на случай переменной скорости.

2. Постановка задачи

Рассматриваемая система состоит из горизонтальной балки и сосредоточенной массы M_0, движущейся вдоль балки с постоянной скоростью v (в момент $t = 0$ масса находится в точке $x = 0$). Колебания балки под действием движущейся массы описываются уравнением

$$m(x)\frac{\partial^2}{\partial t^2}w + EI\frac{\partial^4}{\partial x^4}w = M_0\big(g - \ddot{w}(vt,t)\big)\delta(x - vt), \qquad (1)$$

где $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant l/v$, g — ускорение свободного падения, EI — изгибная жесткость балки, $m(x)$ — погонная масса балки, $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, точка над функцией означает дифференцирование по времени, и функция $w(x,t)$ удовлетворяет заданным граничным и нулевым начальным условиям. Первый член в правой части уравнения есть вес движущейся массы, а второй член

$$M_0\ddot{w}(vt,t) = M_0\big(w''_{tt}(x,t) + 2vw''_{xt}(x,t) + v^2 w''_{xx}(x,t)\big)\Big|_{x=vt} \tag{2}$$

равен силе инерции массы, действующей на балку. Обозначим через ω_n и $\phi_n(x)$ собственные частоты и ортонормированные собственные функции балки,

$$\int\limits_0^l m(x)\phi_n(x)\phi_m(x)\,dx = \delta_{mn}, \tag{3}$$

где δ_{mn} — символ Кронекера. Представляя искомую функцию $w(x,t)$ в виде линейной комбинации первых N собственных функций балки

$$w(x,t) \approx \sum_{n=1}^{N} \phi_n(x) q_n(t) \tag{4}$$

и подставляя это выражение в уравнение (1), получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно обобщенных координат $q_n(t)$ [2]:

$$\begin{aligned}\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n = M_0\phi_n(\zeta)\Big\{g - \sum \phi_m(\zeta)\ddot{q}_m - 2v\sum \phi'_m(\zeta)\dot{q}_m - \\ - v^2 \sum \phi''_m(\zeta) q_m\Big\}, \quad n = 1,\dots,N,\end{aligned} \tag{5}$$

где $\zeta = vt$ — положение массы на балке в момент времени t или, в матричном виде,

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{P\}. \tag{6}$$

Вид матриц $[M] = [m_{nm}]_{n,m=1}^N$, $[C] = [c_{nm}]_{n,m=1}^N$ и $[K] = [k_{nm}]_{n,m=1}^N$ легко находится из сравнения уравнений (5) и (6): $m_{nm} = \delta_{nm} + M_0\phi_n(\zeta)\phi_m(\zeta)$, $c_{nm} = 2M_0 v\phi_n(\zeta)\phi'_m(\zeta)$ и $k_{nm} = \delta_{nm}\omega_n^2 + M_0 v^2\phi_n(\zeta)\phi''_m(\zeta)$.

Применение стандартных процедур численного интегрирования требует существования обратной матрицы $[M]$. Кроме того, так как эта матрица зависит от времени, обращение приходится делать на каждом шаге интегрирования.

3. Приведение системы дифференциальных уравнений к стандартному виду

Покажем, что матрица $[M]$ может быть обращена аналитически и, таким образом, система дифференциальных уравнений (6) приведена к виду, разрешенному относительно вторых производных. Для этого введем обозначения

$$\{\phi\} = [\phi_1(\zeta), \ldots, \phi_N(\zeta)]^T,$$
$$\{\phi'\} = [\phi'_1(\zeta), \ldots, \phi'_N(\zeta)]^T,$$
$$\{\phi''\} = [\phi''_1(\zeta), \ldots, \phi''_N(\zeta)]^T.$$

Легко видеть, что в этих обозначениях матрицы уравнения (6) принимают вид

$$[M] = [I] + M_0\{\phi\}\{\phi\}^T, \qquad [C] = 2M_0 v\{\phi\}\{\phi'\}^T,$$
$$[K] = [\Omega] + M_0 v^2\{\phi\}\{\phi''\}^T, \qquad \{P\} = M_0 g\{\phi\},$$

где $[I]$ — единичная матрица и $[\Omega] = \mathrm{diag}[\,\omega_1^2, \ldots, \omega_N^2\,]$.

Очевидно, что матрица $[M]$ есть сумма единичной матрицы и матрицы ранга один. Она может быть обращена с помощью известной формулы [6, с. 31–32] изменения обратной матрицы при малоранговой модификации, которая в данном случае приводит к следующему результату:

$$[M]^{-1} = [I] - M_0\{\phi\}(1 + M_0\{\phi\}^T\{\phi\})^{-1}\{\phi\}^T \equiv [I] - \gamma M_0\{\phi\}\{\phi\}^T,$$

где $\gamma = \left(1 + M_0 \sum\limits_{n=1}^{N} \phi_n^2(\zeta)\right)^{-1}$. Таким образом, мы показали, что матрица $[M]$ обратима при любых значениях ζ и получили аналитическое представление для обратной матрицы.

Умножая обе части уравнения (6) слева на $[M]^{-1}$ и опуская промежуточные вычисления, получаем

$$\{\ddot q\} + [\widetilde C]\{\dot q\} + [\widetilde K]\{q\} = \{\widetilde P\}, \tag{7}$$

где

$$[\widetilde C] = \gamma[C] = 2\gamma M_0 v\{\phi\}\{\phi'\}^T,$$
$$[\widetilde K] = [\Omega] - \gamma M_0\{\phi\}\{\phi\}^T[\Omega] + \gamma M_0 v^2\{\phi\}\{\phi''\}^T,$$
$$\{\widetilde P\} = \gamma\{P\} = \gamma M_0 g\{\phi\}.$$

Матричное уравнение (7) может также быть записано в виде системы скалярных уравнений

$$\begin{aligned} \ddot q_n + \omega_n^2 q_n + \gamma M_0 \phi_n(\zeta)\Big\{2v\sum \phi'_m(\zeta)\dot q_m + v^2 \sum \phi''_m(\zeta) q_m -& \\ - \sum \omega_m^2 \phi_m(\zeta) q_m\Big\} = \gamma M_0 g \phi_n(\zeta).& \end{aligned} \tag{8}$$

Очевидно, что уравнение (7) (или (8)) гораздо более удобно с точки зрения численного решения, чем исходное уравнение (6) (или (5)).

4. Случай переменной скорости

Покажем, что случай переменной скорости движения массы может быть исследован совершенно аналогично и не требует практически никаких дополнительных вычислений. Как показано в [2], в случае переменной скорости горизонтального движения массы, в правой части уравнения (1) появляется дополнительный член $M\dot{v}w'$. Это приводит к дополнительному члену в правой части уравнения (5), которое теперь принимает вид

$$\begin{aligned}\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n = \gamma M_0 \phi_n(\zeta)\Big\{g - \sum \phi_m(\zeta)\ddot{q}_m - 2\dot{\zeta}\sum \phi_m'(\zeta)\dot{q}_m - \\ - \dot{\zeta}^2 \sum \phi_m''(\zeta) q_m - a(t)\sum \phi_m'(\zeta) q_m\Big\},\end{aligned} \tag{9}$$

где $a(t) = \dot{v}$ есть заданное ускорение движущейся массы в горизонтальном направлении, а ζ — координата движущейся массы в текущей момент времени, для которой мы имеем дополнительное уравнение

$$\ddot{\zeta}(t) = a(t), \quad \zeta(0) = 0, \quad \dot{\zeta}(0) = v_0, \tag{10}$$

v_0 — начальная скорость массы.

Применяя метод, рассмотренный в предыдущем разделе, к уравнению (9), мы получаем следующую систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n + \gamma M_0 \phi_n(\zeta)\Big\{2\dot{\zeta}\sum \phi_m'(\zeta)\dot{q}_m + \sum \big[\dot{\zeta}^2\phi_m''(\zeta) + \\ + a(t)\phi_m'(\zeta) - \omega_m^2\phi_m(\zeta)\big] q_m\Big\} = \gamma M_0 g \phi_n(\zeta),\end{aligned} \tag{11}$$

Уравнения (10), (11) решаются совместно. Заметим, что увеличение размерности системы дифференциальных уравнений не представляет вычислительных трудностей, так как дополнительное уравнение (10) не зависит от остальных неизвестных. Если $a(t)$ задано функционально, уравнение (10) интегрируется аналитически. Подставляя полученную функцию в (11), мы получаем систему линейных уравнений той же, что и в случае постоянной скорости, размерности и сложности.

Литература

1. *Frýba L.* Vibration of Solids and Structures under Moving Loads. London: Thomas Telford Ltd., 1999.
2. *Lee U.* Revisiting the Moving Mass Problem: Onset of Separation Between the Mass and Beam // ASME Journal of Vibration and Acoustics. 1996. **118.** P. 516–521.
3. *Pesterev A. V. and Bergman L. A.* Response of Elastic Continuum Carrying Moving Linear Oscillator // ASCE Journal of Engineering Mechanics. 1997. **123.** P. 878–884.
4. *Pesterev A. V. and Bergman L. A.* Vibration of Elastic Continuum Carrying Accelerating Oscillator // ASCE Journal of Engineering Mechanics. 1997. **123.** P. 886–889.
5. *Omenzetter P. and Fujino Y.* Interaction of non-conservative 1D continuum and moving MDOF oscillator // ASCE Journal of Engineering Mechanics. 2001. **127.** P. 1082–1088.
6. *Хорн Р. и Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989.