

ТРУДЫ  
ИНСТИТУТА СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА  
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

---

2005 • Том 17

**А. П. Афанасьев**

**ПРОДОЛЖЕНИЕ  
ТРАЕКТОРИЙ  
В ОПТИМАЛЬНОМ  
УПРАВЛЕНИИ**

МОСКВА

---



URSS

**Труды Института системного анализа Российской академии наук (ИСА РАН)**

**Учредитель:** Институт системного анализа Российской академии наук (ИСА РАН)

**Афанасьев Александр Петрович**

**Продолжение траекторий в оптимальном управлении:** Т. 17. — М.: КомКнига, 2005. — 208 с.

ISBN 5–484–00274–5

Монография посвящена новому подходу к исследованию задач оптимального управления. Этот подход основан на процедуре продолжения оптимальных траекторий и позволяет исследовать качественные особенности поведения оптимальных траекторий и конструировать эффективные алгоритмы. В частности, для задач оптимального управления с линейно входящими функциями управления удастся свести исходную задачу оптимального управления к последовательности задач Коши для систем дифференциальных уравнений вдоль соответствующей последовательности оптимальных режимов.

The Monograph is dedicated to new approach to study the optimal control problem. This approach is founded on procedure of the continuation of optimal trajectories. Its allows to research the qualitative particularities of the behavior of the optimal trajectories and construct the efficient computing algorithms. In particular, for the optimal control problem with linear controls, manages to reduce the source optimal control problem to the sequences of the Kaushi problems for systems of the differential equations along sequence of optimum modes.

**Рецензенты:**

доктор физико-математических наук, профессор *В. В. Дукусар*;  
доктор физико-математических наук, профессор *Э. Р. Смольков*

Печатается по решению Ученого совета ИСА РАН

**Телефон редакции:** 135–51–64, e-mail: isa@isa.ru

**Адрес редакции:** 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, 9.

Издательство «КомКнига». 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, 9.

Подписано к печати 11.11.2005 г. Формат 60×90/16. Печ. л. 13. Зак. №

Отпечатано в ГП «Облиздат». 248640, г. Калуга, пл. Старый Торг, 5.

ISBN 5–484–00274–5

© ИСА РАН, 2005

© А. П. Афанасьев, 2005

© КомКнига, 2005



# Оглавление

<b>Введение</b> .....	<b>6</b>
<b>Глава I. Исследование экстремальных характеристик динамических систем методами вариационного исчисления и оптимального управления</b> .....	<b>8</b>
§ 1. Теория управления и вариационное исчисление .....	8
§ 2. Вариационное исчисление и оптимальное управление .....	12
§ 3. Исследование свойств экстремальных траекторий для моделирования динамических систем .....	16
§ 4. Характеристика основных направлений развития современных методов вариационного исчисления (оптимального управления) ....	17
§ 5. Продолжение оптимальных траекторий .....	21
<b>Глава II. Возмущенные задачи математического и линейного программирования</b> .....	<b>27</b>
§ 1. Устойчивость активных индексов ограничений задач математического и линейного программирования .....	27
§ 2. Ограниченность и непрерывность многозначных отображений, задаваемых линейными ограничениями .....	31
§ 3. Оценки расстояний в возмущенных задачах математического программирования .....	33
<b>Глава III. Изопериметрическая задача</b> .....	<b>46</b>
§ 1. Линейные по управлениям задачи понтрягинского типа с билинейным интегрантом в целевой функции .....	46
§ 2. Специальный класс задач билинейного программирования .....	49
§ 3. Максимизация суммы наддиагональных элементов матриц .....	60
§ 4. Гамильтоновы циклы в системе, задаваемой многогранником .....	66
§ 5. Нелинейная форма в целевой функции изопериметрической задачи .....	68
§ 6. Об одном классе локальных вариационных задач с произвольным вырождением в целевой функции .....	73
§ 7. Линейное смещение в целевой функции обобщенной изопериметрической задачи .....	80
<b>Глава IV. Локальные вариационные задачи</b> .....	<b>91</b>
§ 1. Локальная вариационная задача первого порядка для нелинейных задач оптимального управления со смешанными ограничениями .....	91

§ 2. Локальные вариационные задачи второго порядка .....	100
§ 3. Локальные вариационные задачи второго порядка в системах, линейных по управлениям .....	109
§ 4. Локальная вариационная задача второго порядка для линейных задач оптимального управления со смешанными ограничениями при наличии вырождения в целевой функции.....	119
<b>Глава V. Процедура продолжения оптимальных траекторий .....</b>	<b>130</b>
§ 1. Продолжение решений в задаче оптимального управления со смешанными ограничениями и не фиксированным правым концом при увеличении $[T - t_0]$ .....	130
§ 2. Продолжение решений в задачах, линейных по управлениям .....	134
§ 3. Продолжимость решений. Примеры.....	141
<b>Глава VI. Продолжение решений в задачах оптимального управления при наличии функциональных ограничений.....</b>	<b>151</b>
§ 1. Задачи оптимального управления с функциональными ограничениями .....	151
§ 2. Оптимальное быстроедействие.....	152
§ 3. Особенности применения процедуры продолжения оптимальных траекторий (ППОТ) для задач оптимального управления с функциональными ограничениями.....	154
§ 4. Локальные вариационные задачи в случае негладких функционалов.....	156
§ 5. Локальная вариационная задача первого порядка для задач, линейных по управлениям, при негладкой целевой функции вида.....	158
§ 6. Продолжение решений в задаче, линейной по управлениям, с незакрепленным временем .....	160
<b>Глава VII. Вычисление оптимальных траекторий на основе процедуры продолжения решений в системах, линейных по управлениям.....</b>	<b>164</b>
§ 1. Специфика задач МП, возникающих в локальных вариационных задачах .....	164
§ 2. Численное решение задачи Коши для системы дифференциальных уравнений вдоль режима, вычисление производных и сопряженная задача.....	165
§ 3. Блок-схема вычислительного алгоритма .....	170
§ 4. Общие свойства процедуры продолжения оптимальных траекторий и зависимость решений от параметров.....	173
§ 5. О возможности аппроксимация поверхностей переключения сплайнами.....	179

---

<b>Глава VIII. Реализация процедуры продолжения оптимальных решений в распределенной вычислительной среде .....</b>	<b>182</b>
§ 1. Процедура продолжения оптимальных решений и основные вычислительные задачи .....	183
§ 2. Символьное представление задачи. Многочлены от нескольких переменных и схема их вычисления .....	189
§ 3. Распределенная вычислительная среда IARnet .....	196
<b>Заключение .....</b>	<b>199</b>
<b>Литература .....</b>	<b>200</b>

## Введение

Оптимальное управление и вариационное исчисление являются одним из основных аппаратных средств теории управления. Успешное применение этой теории для решения многих важных прикладных задач обусловило ее бурное развитие. Наиболее завершенных разделом теории оптимального управления являются необходимые условия экстремума, основу которых составляет принцип максимума Л. С. Понтрягина. Однако применение принципа максимума для решения конкретных классов задач требует искусства, а во многих случаях и разработки специальной техники. К примеру, при создании численных методов решения задач оптимального управления из-за сложностей решения краевой задачи для системы дифференциальных уравнений, возникающей в результате применения принципа максимума, чаще отдается предпочтение методам, восходящим к прямым методам вариационного исчисления или синтезирующим эти методы с принципом максимума, но не эксплуатирующим непосредственно необходимые условия. Принцип максимума допускает сложное поведение оптимальных траекторий, но в большинстве случаев не предоставляет средств, чтобы учесть это поведение при решении конкретных задач. Поэтому возникает необходимость в разработке методов точного определения оптимальных траекторий, учитывающих по возможности все богатство поведения решений задач оптимального управления.

Целью данной работы является разработка метода продолжения оптимальных траекторий, основанного на выделении специальных классов задач (в работе они называются локальными вариационными задачами), которые можно исследовать до конца, и создании аппарата последовательного восстановления оптимальных траекторий, заключающегося в выявлении особенностей вдоль продолжаемого решения, и сведении их к исследованию локальных вариационных задач.

Между методом продолжения оптимальных траекторий в вариационном исчислении и оптимальном управлении и теорией обыкновенных дифференциальных уравнений существует следующая аналогия. В теории дифференциальных уравнений базовое значение имеет задача Коши, для которой можно не только устанавливать факты существования, но и проводить конструктивное исследование решения (для произвольных краевых задач столь общих фактов установить не удастся). Это достигается благодаря тому, что задача Коши имеет локальный характер — то есть рассматривается в малой окрестности начальной точки. В оптимальном управлении тоже можно формировать локальные вариационные задачи, если исключить из рассмотрения функциональные ограничения. То есть рассматривать, вообще говоря, задачи со смешанными локальными ограничениями (ограничениями на функцию управления), с фиксированным временем

---

и незакрепленным правым концом. Параметризация отрезка времени, на котором задача определена, и возможность ее исследования в окрестности начальной точки позволяет подойти вплотную к проблеме существования решения и построить конструктивные алгоритмы исследования особенностей поведения оптимальных траекторий.

В силу вышесказанного метод продолжения оптимальных траекторий предполагает следующую иерархию задач оптимального управления: первой в этой иерархии является уже упомянутая задача со смешанными локальными ограничениями, с фиксированным временем и незакрепленным правым концом; затем можно перейти к задаче, в которой добавлены условия на правый конец и функциональные ограничения; и последней в этой иерархии будет задача, в которой присутствуют все указанные выше ограничения и время не закреплено.

В работе используется аппарат математического программирования, теории дифференциальных уравнений, функционального анализа, теории многозначных отображений, дифференциальной геометрии.

# Глава I

## Исследование экстремальных характеристик динамических систем методами вариационного исчисления и оптимального управления

### § 1. Теория управления и вариационное исчисление

Вариационное исчисление возникло как математическая дисциплина, при помощи которой изучаются экстремальные свойства каких-либо процессов. Современное развитие вариационного исчисления связано с возникновением теории управления. В математических моделях различных динамических систем, изучаемых теорией управления, к переменным, описывающим состояние системы (фазовым), как правило, добавляются переменные, характеризующие возможность влиять на состояние системы (управления). Если появляется потребность управлять системой для достижения наилучшего в каком-то смысле результата, то возникает задача оптимального управления. В задачу оптимального управления входят:

- функционал (или целевая функция), характеризующий цели управления;
- уравнения, описывающие модель управляемого объекта и связанные с ним ограничения на управление и фазовые переменные.

Необходимость в эффективном управлении системами самой различной природы порождает все новые и новые задачи, исследуемые и решаемые методами оптимального управления. Следует подчеркнуть, что в ситуациях, когда функция цели не выявлена или в ней нет необходимости, эти методы являются во многих случаях математическим аппаратом для восстановления каких-либо характеристик управляемой системы, определения границ применимости математической модели. Приведем несколько примеров из различных областей, в которых ставятся задачи оптимального управления.

**Пример 1.** Горизонтальный полет самолета на максимальную дальность [1] (одна из первых постановок задачи оптимального управления).

Уравнения движения объекта:

$$\dot{x}(t) = \frac{r}{r+y} v(t),$$

$$\dot{m}(t) = \frac{c\beta}{m(t)} - \frac{D(m(t), v(t))}{m(t)},$$

$$\dot{h}(t) = -\beta(t),$$

$$t \in [t_0, T],$$

$$x(t_0) = 0,$$

$$v(t_0) = v_0.$$

Ограничение на управление:

$$0 \leq \beta(t) \leq \bar{\beta}.$$

Целевая функция:

$$x(T) \rightarrow \max,$$

$T - t_0$  — заданное время полета;

$x(t)$  — расстояние, пройденное самолетом за время  $t - t_0$ ;

$v(t)$  — скорость движения самолета;

$m(t)$  — переменная масса самолета;

$\beta(t)$  — расход горючего за единицу времени;

$D(m(t), v(t))$  — функция, определяющая аэродинамическое сопротивление среды;

$y$  — высота полета;

$r$  — радиус Земли;

$c$  — постоянная скорость истечения газов из двигателя;

$\bar{\beta}$  — максимально возможный расход горючего за единицу времени

( $y, r, c, \bar{\beta}$  — постоянные).

**Пример 2.** Максимизация производства вещества в химическом реакторе [2].

Уравнения химического процесса, идущего в реакторе, имеют вид:

$$\dot{x}_1(t) = -(k_1(u) + k_2(u) + k_3(u))x_1(t),$$

$$\dot{x}_2(t) = k_1(u)x_1(t) - k_4(u)x_2(t),$$

$$\dot{x}_3(t) = k_4(u)x_2(t) - k_5(u)x_3(t),$$

$$x_1(t_0) = x_{10}, \quad x_2(t_0) = 0, \quad x_3(t_0) = 0,$$

$$x_2(T) = \bar{x}_2, \quad t \in [t_0, T], \quad k_i(u) = \exp\left(a_i - \frac{b_i}{u}\right), \quad i = 1, 2, 3.$$

Ограничения на управление:

$$0 \leq u(t) \leq c.$$

Целевая функция:

$$x_3(T) \rightarrow \max,$$

$T - t_0$  — время, в течение которого идет реакция (не фиксированное);

$x_1(t)$  — количество исходного сырья в момент времени  $t \in [t_0, T]$ ;

$x_2(t)$  — промежуточный продукт;

$x_3(t)$  — производимое в реакторе вещество;

$u(t)$  — температура, влияющая на интенсивность реакций;

$c$  — наибольшая допустимая температура;

$a_i, b_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) — химические постоянные.

**Пример 3.** Максимизация валового выпуска отраслей экономики в стоимостном выражении [3].

Ограничения на скорость роста основных фондов, связанные с межотраслевым балансом:

$$B\dot{x}(t) \leq (E - A)x(t), \quad \dot{x}(t) \geq 0,$$

$$x(t) = x_0, \quad t \in [t_0, T].$$

Целевая функция:

$$\sum_{i=1}^n c_i x_i(T) \rightarrow \max,$$

$T - t_0$  — длительность планового периода;

$x(\cdot) = (x_1(\cdot), \dots, x_n(\cdot))^*$  — вектор-функция выпуска отраслей в момент времени  $t$ ;

$B$  — матрица фондоемкостей;

$A$  — матрица прямых затрат;

$E$  — единичная матрица;

$c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$  — вектор-функция цен;

$n$  — рассматриваемое число отраслей.

В постановке задачи не фигурируют управления. Их можно ввести, положив  $\mathbf{k}(t) = u(t)$  (это можно считать уравнениями объекта). Ограничения на управления будут:

$$Bu(t) \leq (E - A)x(t), \quad u(t) \geq 0.$$

Можно ввести управления и другими способами.

**Пример 4.** Распределение научных кадров по отраслям [4]. Уравнение изменения численности научных кадров в  $i$ -й отрасли ( $i = \overline{1, n}$ ):

$$\dot{L}_i(t) = \alpha_i(t)M(t) + \sum_{j=1}^n p_{ij}L_j(t) - \beta_i L_i(t),$$

$$L_i(t_0) = L_{i0}, \quad t \in [t_0, T].$$

Ограничения на управление  $\alpha_i(t)$ :

$$0 \leq \alpha_i(t) \leq \bar{\alpha}_i,$$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i(t) = 1.$$

Дополнительные ограничения. Для получения прогнозных данных о числе и структуре кадров по отраслям бывает полезно знать оценку сверху числа научных кадров к моменту  $T$ . Выделяя по очереди каждую из интересующих отраслей, имеем для соответствующей задачи оптимизации функционал:

$$L_{i0}(T) \rightarrow \max,$$

$[t_0, T]$  — интервал времени, на который делается прогноз;

$L_i(t)$  — число научных кадров в отрасли;

$p_{ij}$  — коэффициент, характеризующий переход кадров из отрасли  $j$  в отрасль  $i$ ;

$\beta_i$  — коэффициент текучести кадров из отрасли  $i$ ;

$M(t)$  — выпуск специалистов высшими учебными заведениями в году  $t$ ;

$\bar{\alpha}_i$  — максимальное число выпускников со специальностями, соответствующими отрасли  $i$ .

Приведенные примеры вписываются в следующую традиционную форму задачи оптимального управления:

$$J[u] = \int_{t_0}^T f_0(x(t), u(t)) dt \rightarrow \min, \quad (1.1.1)$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad (1.1.2)$$

$$u \in U(x), \quad (x(t_0), x(T)) \in X, \quad (1.1.3)$$

$$t \in [t_0, T],$$

где

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^*,$$

$$u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t))^*,$$

$$f(\cdot) = (f_1(\cdot), f_2(\cdot), \dots, f_n(\cdot))^*.$$

Задача (1.1)–(1.3) имеет конкретный смысл, если  $u(x)$  и  $X$  не только описаны (чего иногда бывает достаточно для получения общих теоретических результатов), но и заданы конкретными соотношениями, связывающими переменные и параметры задачи. В этом смысле достаточно общими ограничениями на **управления** являются ограничения вида:

$$g(x(t), u(t)) = 0, \quad (1.1.4)$$

$$h(x(t), u(t)) \geq 0, \quad (1.1.5)$$

где

$$g(\cdot) = (g_1(\cdot), g_2(\cdot), \dots, g_m(\cdot)), \quad m < k,$$

$$h(\cdot) = (h_1(\cdot), h_2(\cdot), \dots, h_l(\cdot)).$$

## § 2. Вариационное исчисление и оптимальное управление

В этом параграфе делается попытка установить связь и различие между названиями «вариационное исчисление» и «оптимальное управление». Первое различие, которое сразу же можно отметить, заключается в форме постановки задачи. Классическая постановка задачи Лагранжа, к которой сводятся также и классические задачи Майера и Блисса—Больца имеют вид:

минимизировать целевую функцию (функционал):

$$\int_{t_0}^T F_o(x(t), \mathfrak{K}(t), t) dt,$$

при ограничениях:

$$F(x(t), \mathfrak{K}(t), t) = 0,$$

$$G(x(t), \mathfrak{K}(t), t) \geq 0,$$

$$(x(t_0), x(T)) \in M,$$

$$t \in [t_0, T], \quad x(\cdot): [t_0, T] \rightarrow R^n, \quad F_o(\cdot): R^n \times R^n \times R \rightarrow R,$$

$$F(\cdot): R^n \times R^n \times R \rightarrow R^k, \quad k > n,$$

$$G(\cdot): R^n \times R^n \times R \rightarrow R^l.$$

Задачу оптимального управления можно записать в виде:

найти траекторию, минимизирующую функционал:

$$J[u] = \int_{t_0}^T f_o(x(t), u(t)) dt,$$

и удовлетворяющую уравнениям, описывающим динамику системы,

$$\mathfrak{K}(t) = f(x(t), u(t), t),$$

и ограничениям:

$$g(x(t), u(t), t) = 0,$$

$$h(x(t), u(t), t) \geq 0,$$

при  $t \in [t_0, T]$ ,  $(x(t_0), x(T)) \in M$ , где

$$x(\cdot): [t_0, T] \rightarrow R^n, \quad f_o(\cdot): R^n \times R^m \times R \rightarrow R, \quad k < n,$$

$$f(\cdot): R^n \times R^m \times R \rightarrow R^n, \quad g(\cdot): R^n \times R^m \times R \rightarrow R^k,$$

$$h(\cdot): R^n \times R^m \times R \rightarrow R^l.$$

Характерной чертой такой постановки задачи является наличие вектора управляющего воздействия  $u(t)$  (обычно его называют управлением).

Однако нетрудно убедиться, что замена  $\dot{x}(t) = u(t)$  сводит первую задачу ко второй. Столь же простой заменой можно свести вторую задачу к первой. Очевидно, что запись задачи в какой-либо из этих форм является не принципиальным обстоятельством, а скорее делом вкуса и может лишь подчеркнуть содержательный смысл или природу конкретных прикладных задач.

Иногда говорят, что задачи оптимального управления отличаются от классического вариационного исчисления наличием ограничений типа неравенств. Однако это не так. Задачи с неравенствами в рамках классического вариационного исчисления ставились достаточно давно. По-видимому, первой задачей с ограничениями на область определения допустимых функций является задача минимизации площади поверхности вращения, которую Гольдшмит [5] исследовал в 1831 г. как вариационную при ограничении  $Y(t) \geq 0$ .

В 1871 г. Тодхунтер [6] исследовал поведение экстремалей на границе области  $Q(x(t)) \geq 0$ , а Вейерштрассе [7] провел аналогичное исследование для параметрической задачи в 1879 г.

В 1907 г. Адамар [8] исследовал задачу Майера, в которой дифференциальные уравнения были заменены неравенствами и установил ограничения на множители Лагранжа.

Аналогичную задачу исследовал в 1914 г. Больца [9], добавив к дифференциальным неравенствам фазовые ограничения.

Такую же задачу рассмотрел в 1918 г. Блисс [10], ослабив некоторые условия.

Большой цикл работ в начале нашего века был посвящен задачам с ограничениями на производную вида

$$|\dot{x}(t)| \leq \dot{x}^*.$$

Первые попытки в этом направлении были сделаны в 1901 г. Уайтмором, а затем и Адамаром в 1910 г. Затем большое внимание уделил этой задаче в 1932 г. Тонелли [11]. Наибольших успехов добились при исследовании задач с ограничениями на производную Грейвс [12] в 1931 г. и Макштейн [13] в 1939 г.

В 1937 г. Валентайн [14] предлагает задачу переменных, позволяющую сводить неравенства к равенствам. Иногда ошибочно считают, что эта замена позволяет рассматривать задачи лишь на открытой области (усматривая в этом месте разницу между вариационным исчислением и оптимальным управлением). Для регулярных задач такой подход позволяет исследовать поведение экстремалей на границе допустимой области.

Таким образом нельзя приурочивать постановку задачи оптимального управления к времени появления принципа максимума Л. С. Понтрягина. Что же касается методов решения вариационных задач, то принцип максимума повлек новый уровень их рассмотрения. Именно в методах и следует искать разницу между задачами, рассмотренными или в рамках классического вариационного исчисления или оптимального управления (хотя это и не объясняет вполне встречающуюся во многих публикациях резкую смену в названии по существу одного и того же раздела математики).

В последние годы все чаще используется название «вариационное исчисление», включающее в себя и «классическое вариационное исчисление» и «оптимальное управление». Причем оба этих названия употребляются, как правило, в классификационных целях, разделяя результаты, полученные методами классического подхода (как правило, все последние результаты связаны с развитием идей Валентайна), и результаты, связанные с появлением принципа максимума (на этом пути, как правило, удается достичь большей строгости и глубины).

Название «оптимальное управление» характеризует физическую природу задачи и связано с идущими от практики задачами теории управления и теории автоматического регулирования. Это название появилось в работах Понтрягина, Болтянского, Гамкрелидзе, Мищенко, Розоноэра, Дубовицкого, Милютина [15–20], в которых была заложена новая современная методологическая база для исследования задач вариационного исчисления. Интересно отметить, что параллельно с вышеупомянутыми работами, предназначенными для удовлетворения нужд автоматического регулирования, появилось много работ, инициированных бурным развитием авиационной и ракетной техники. Среди них следует выделить работы Миеле, Лейтмана, Энеева, Берковича, Троицкого, Брайсона, Денхема, Дрейфуса [21–27]. Причем эти работы тяготеют к классическим методам вариационного исчисления. Несколько особняком стоит работа Смольякова [28], в которой получены необходимые условия оптимальности для вариационных задач с нерегулярными фазовыми ограничениями.

Период с конца пятидесятых по начало шестидесятых характерен огромным интересом к оптимальному управлению. Были решены многие, практически важные задачи. Однако многие сложные проблемы теории регулирования остались нерешенными, появились новые концепции управления и интерес практиков к оптимальному управлению пошел на спад.

Следующая волна интереса к вариационному исчислению связана с моделированием экономических и социально-экономических систем. Появилось много работ, внесших заметный вклад в вариационное исчисление (и теория, и численные методы). Спад интереса со стороны специалистов, занимающихся моделированием и исследованием экономических систем, связан со сложностями и формулировке критериев оптимальности, характеризующих цели развития и функционирования этих систем.

### § 3. Исследование свойств экстремальных траекторий для моделирования динамических систем

В настоящее время интерес к вариационному исчислению обеспечивается следующими двумя направлениями. Во-первых, вариационное исчисление может оказать существенную пользу в процессе формирования адекватной математической модели какой-либо системы. Исследование поведения оптимального решения позволяет контролировать «физичность» математической модели с тем, чтобы вносить в нее необходимые коррективы. Это можно проиллюстрировать тривиальным примером. Пусть проведению некоторой системы соответствует задача:

$$J = \int_0^T x(t) \dot{x}^2(t) dt \rightarrow \min, \quad x(0) = a, \quad a > 0.$$

Очевидно, что на траектории  $x(t) = a$  достигается слабый минимум. Если бы на этой траектории достигалось решение задачи и никаких других минимумов не существовало, то можно было бы считать, что приведенная задача моделирует какой-либо физический процесс. Однако наличие траекторий  $x(t) = a - bt$ ,  $b > 0$  таких, что

$$J = \int_0^T (a - bt) b^2 dt = ab^2 - \frac{b^3}{2} \rightarrow -\infty,$$

при  $T = 1$ ,  $b \rightarrow +\infty$  (в смысле сильного минимума функционал снизу неограничен), делает ситуацию нереальной.

В качестве другого примера можно привести следующую полемику. В монографии [29] приводится аэродинамическая задача Ньютона и указывается, что она решена неправильно, так как функционал

$$\int_0^T \frac{dt}{1 + \dot{x}^2(t)} = I,$$

при  $x(0), x(T) = x_T$  стремится к нулю на последовательности ломаных с увеличивающейся осцилляцией. Однако в монографии [30] утверждается, что решение Ньютона совершенно правильно, если только ввести в рассмотрение ограничение  $\dot{x}(t) \geq 0$ . Этот пример хорошо показывает, что исследование оптимального решения и обнаружение в нем каких-либо

неудовлетворительных с точки зрения физической природы или просто здравого смысла свойств может привести в конечном итоге к правильной математической модели.

На смену концепции оптимального регулятора (в широком смысле, т. е. сюда включаются как технические, так и социально-экономические и другие системы) внедряется концепция создания инструментальной базы для исследования особенностей поведения траекторий в математических моделях динамических систем. В общем виде ситуацию можно описать следующим образом. Есть система, динамика которой описывается уравнениями и ограничениями, приведенными в первом параграфе настоящей работы. Есть характеристики системы, задаваемые, например, терминальными функционалами:

$$\Phi_i = \Phi_i(x(T), T), \quad i = \overline{1, N}.$$

Требуется найти траектории, обеспечивающие *max* или *min* или и то и другое для каждой из этих характеристик. Другими словами, требуется установить границы, определяющие возможности развития системы в смысле этих характеристик.

#### **§ 4. Характеристика основных направлений развития современных методов вариационного исчисления (оптимального управления)**

Предпосылки для создания современных модификаций вариационного исчисления возникли, по-видимому, достаточно давно. В монографии [30] приводится формализация «аэродинамической задачи Ньютона», относящаяся к задачам оптимального управления. Но только возникшая к середине нашего века необходимость в создании специальных вариационных методов для решения важных прикладных задач стимулировала возникновение и развитие математической теории оптимального управления как одного из наиболее общих направлений вариационного исчисления.

Возникновение теории оптимальных управляемых систем как одного из направлений теории автоматического регулирования обусловлено работами [32–36]. В дальнейшем эта теория оформилась в одно из важнейших направлений теории управления.

Основополагающую роль в развитии математической теории оптимального управления сыграл «принцип максимума» Л. С. Понтрягина, развитый в работах [15, 18]. Задача рассматривалась в форме А и в отношении области изменения переменных управления предполагалось, что она — некоторый, не зависящий от параметров и переменных задачи, ог-

раниченный многогранник в конечномерном пространстве. Было обосновано сведение задачи к системе дифференциальных уравнений относительно прямых переменных с краевыми условиями по прямым и сопряженным переменным на разных концах траектории и максимизации по управляющим воздействиям «функции Понтрягина».

Общая теория для задачи типа (1.1.1)–(1.1.5) была разработана в работах [19, 20]. С использованием сложного аппарата функционального анализа разработана схема получения необходимых условий экстремума при самых общих предположениях относительно классов управляющих функций. Существенные результаты в этом направлении получены также в работах [38, 41].

Необходимость в столь общем подходе обусловлена тем, что при самых сильных предположениях относительно гладкости функций, входящих в формулировку задачи, решение может быть устроено очень сложно.

Интенсивное развитие методов функционального анализа создало базу для развития строгой теории вариационного исчисления. Наибольшее значение имеют теорема Люстерника о неявной функции [42], выпуклый анализ в бесконечномерных пространствах, теории дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями [43]. На основе этих достижений удается строго обосновать метод множителей Лагранжа как универсальный прием для решения обширного класса классических и современных вариационных задач [30].

В осмысливании природы оптимальных решений важную роль играет динамическое программирование и принцип оптимальности [44] в применении к вариационному исчислению. Однако наибольший эффект динамическое программирование дает при решении специальных дискретных задач оптимального управления. В непрерывном случае затруднение вызывает исследование свойств гладкости функции Беллмана.

Интересным подходом к выяснению природы оптимальных управлений является изучение специально конструируемой функции возмущений [45, 46]. Он представляется весьма перспективным для изучения и установления сходимости многих алгоритмов оптимального управления.

В некоторых публикациях [47] высказывается мнение, что в реальных управляемых объектах могут возникать куски траекторий с негладкими управлениями. В других источниках [30] последовательно отстаивается точка зрения, что в прикладных задачах, как правило, допускают физическую трактовку и оказываются реализуемыми гладкие управления. Однако такая позиция не отвергает необходимость в сложной качественной теории вариационного исчисления. Сознательное допущение возможности появления решений сложной структуры позволяет контролировать состоятельность математической модели исследуемой системы и возникающих постановок математических задач.

Среди прикладных задач оптимального управления существенное место занимают задачи, в которых управляющие воздействия входят линейно в функционал и в ограничения. Исследованиям различных классов таких задач уделено много внимания. Принцип максимума как необходимое и достаточное условие для оптимальных по быстродействию систем с линейными уравнениями постоянными коэффициентами и линейно входящими в них управлениями, не зависящими от фазовых координат, был впервые получен в [49]. Исследованию свойств линейных систем в применении к теории автоматического регулирования посвящены работы [32–35]. Завершенная теория линейных систем с постоянными коэффициентами разработана в [52].

Исследованию особых режимов в системах, линейных по управляющему воздействию, посвящены работы [53, 54]. В них предлагается способ получения поверхности особых траекторий в пространстве фазовых координат. Отмечаются вычислительные трудности при реализации предлагаемого метода из-за необходимости вычислять производные высоких порядков. Кроме того остается открытым вопрос о достаточных условиях оптимальности отрезков особых режимов. Отмеченные типы линейных систем характерны тем, что к ним применим «принцип максимума» Л. С. Понтрягина, так как ограничения на управления не зависят от фазовых координат.

Во многих задачах математической экономики (пример 3) возникают системы, линейные по управляющим воздействиям, со смешанными ограничениями, зависящими от фазовых координат. Исследованию таких систем с постоянными коэффициентами и смешанными ограничениями, линейно зависящими от фазовых координат, посвящены работы [55, 56]. В этих работах устанавливаются необходимые условия существования оптимальных решений. Признак оптимальности дается в терминах прямых и двойственных переменных. Теория линейных задач экономической динамики с линейными смешанными ограничениями и с матрицами, коэффициенты которых зависят от времени, развивается в работе [57]. Автором разработана схема получения необходимых условий оптимальности в форме принципа максимума и при этом выделяется класс задач, в которых двойственные переменные можно считать непрерывными функциями.

Интересные результаты, касающиеся качественных свойств оптимальных решений в применении к линейным по управлениям системам, содержится в [58, 59]. Следует отметить также подход к задаче о быстродействии, отраженный в [48].

Большое прикладное значение имеют численные методы решения вариационных задач. При анализе исследований в этом направлении не имеет смысла оговаривать специально какие методы применяются при решении линейных по управлениям задач, какие нет, так как подавляющее

большинство задач сколь-нибудь значительной размерности, решаемых численно, по меньшей мере линейны по управлениям. Следуя монографии [54], можно выделить три основных направления создания численных методов.

1. Совместное решение прямой и двойственной систем уравнений, возникающих при применении принципа максимума.
2. Построение минимизирующей последовательности в пространстве фазовых координат.
3. Построение минимизирующей последовательности в пространстве управлений.

Методы первого типа особенно успешно применяются в тех случаях, когда прямая и сопряженная системы уравнений оказываются независимыми. Тогда для каждой системы уравнений возникает задача Коши, и они численно интегрируются. В противном случае приходится решать сложную краевую задачу для системы уравнений с разрывными правыми частями. Несмотря на большие вычислительные сложности, во многих случаях этими методами удается получить наиболее надежные результаты. Эти методы развиваются в работах [61–63].

Методы второго типа [64–67] естественно применять, когда имеются ограничения на фазовые координаты типа неравенств. Осложняющим обстоятельством для применения этих методов является то, что они не во всех случаях сходятся к оптимальному решению.

Методы третьего типа наиболее успешно работают, если размерность вектора управлений невелика по сравнению с вектором фазовых координат и нет фазовых ограничений. Среди перечисленных методов не указан еще один, смысл которого состоит в следующем. Существует теория оптимальных задач с разностными уравнениями и разработаны численные методы их решения как специфических задач математического программирования [68, 69]. Известно также, что в достаточно общем случае задача оптимального управления сколь угодно точно аппроксимируется разностной задачей при числе узлов разностной сети, стремящемся к бесконечности [70]. Поэтому можно попытаться свести численное решение задачи оптимального управления к задаче математического программирования [71]. Но возникает принципиальная трудность, заключающаяся в том, что зависимость точности разностной аппроксимации от числа разбиений достаточно сложная. По существу, последовательная реализация такого подхода приводит к методам второго или третьего типов.

Предположим теперь, что каким-то образом удалось установить, что при некотором числе разбиений  $N$  точность разностной аппроксимации оказалась достаточно удовлетворительной. Можно оценить вычислительную сложность задачи следующим образом. Если  $n$  — размерность

вектора фазовых координат, а  $k$  — размерность вектора управлений, то число переменных в аппроксимирующей задаче математического программирования будет равно  $N \cdot (k + n)$ . Такого же порядка получается и число ограничений. В реальных расчетах  $N$  редко бывает меньше  $10^2$ . Если  $(k + n) = 10$ , то уже надо решать задачу математического программирования с  $10^3$  переменными. Можно сделать вывод, что численное решение задач оптимального управления высокой размерности является серьезной проблемой.

В настоящее время наметился еще один подход, основанный на символьном представлении решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Точнее говоря, речь идет о представлении решения в виде символьного отрезка ряда Тейлора, оснащенного процедурой оценки остаточного члена (далее такое представление будет называться квазисимвольным). Тогда условия переключения с одного режима на другой для функции управления (или выражение для поверхности переключений) можно представить также в символьной форме [85]. Как известно, символьные вычисления хорошо поддаются распараллеливанию. В сочетании с привлечением к решению задачи распределенных вычислительных ресурсов, доступных как через локальную сеть, так и через глобальную, это может позволить преодолеть проклятие размерности и выйти на решение задачи не только программного движения, но и подойти к решению задачи синтеза оптимального управления. Изложение подхода, реализующего эти идеи и основанного на применении Грид технологий [86, 87], будет приведено ниже, в главе 8.

## § 5. Продолжение оптимальных траекторий

Из проведенного анализа литературы следует, что наиболее развитым аппаратом исследования задач оптимального управления являются необходимые условия экстремума. Однако прямое использование этих условий не позволяет в большинстве случаев непосредственно подойти к вопросу о построении оптимальных траекторий, а лишь обеспечивает постановку достаточно сложной краевой задачи для возникающей системы дифференциальных уравнений. При качественном исследовании или при численном решении этой краевой задачи возникают значительные трудности. Поэтому возникает потребность в разработке техники применения необходимых условий для тех или иных классов задач, позволяющей эти трудности обойти. Особенно остро такая потребность ощущается при разработке численных методов построения оптимальных траекторий. Наиболее полно этот вопрос отражен в монографии [48].

Предлагаемый в настоящей работе подход можно вкратце охарактеризовать следующим образом: решение исходной задачи сводится к по-

строению некоторой, специальным образом генерируемой, последовательности простейших задач, решение которых можно полностью установить с помощью необходимых условий.

Изложим основную идею развиваемого далее подхода и приведем иллюстративные примеры.

Выпишем задачу оптимального управления, динамика которой описывается уравнением  $\dot{x}(t) = u(t)$  при начальном условии  $x(t_0) = x_0$  и фиксированном  $[t_0, T]$ , цели управления функционалом:

$$J[u] = \int_{t_0}^T \langle f(x(t)), u(t) \rangle dt \rightarrow \min,$$

при ограничениях на управление  $u(t) \in U$ , где  $u(\cdot) : [t_0, T] \rightarrow R^k$  — многогранник,  $riu \neq \emptyset$ .

Пусть для этой задачи применен принцип максимума и выписана функция Понтрягина  $H = H(x(t), \Psi(t), u(t))$ . Известно (см., например, [37]), что,  $\Psi(T) = 0$ . Из постановки задачи ясно, что  $H$  линейна по  $u(t)$ . Задача  $H(x_0, o, w) \rightarrow \max_w$  при  $w \in U$  — задача линейного программирования (ЛП). Если решение  $w^*$  этой задачи (вершина многогранника  $U$ ) регулярно (т. е. единственно по прямым и свойственным переменным), то оно устойчиво по отношению к небольшим возмущениям целевой функции  $H(x_0, o, w)$ . Отсюда следует, что если подобрать достаточно малое  $T - t_0$  так, чтобы  $x(t)$  и  $\Psi(t)$  не выходили за рамки допустимых возмущений, то для оптимального управления  $u^*(t)$  будет иметь место  $u^*(t) = w^*$ . Более того, если  $T - t_0$  считать параметром, то каждому значению этого параметра будет соответствовать задача оптимального управления с решением  $u^*(t) = w^*$ , пока какая-либо из плоскостей  $H = H(x_0, \Psi(t_0), w)$ ,  $H = H(x(T), o, w)$  не совпадет при увеличении  $T$  с ребром или гранью многогранника  $U$ . Таким образом получено решение семейства задач оптимального управления, задаваемого параметрами  $x_0$ ,  $T - t_0$ . Очевидно, что этот класс задач можно расширить, введя более широкий класс возмущений для опорной задачи ЛП, положив  $u \in U(x)$ .

Переход от рассмотренной тривиальной задачи к более сложной заключается в исследовании ситуаций, когда нарушается регулярность в опорной задаче ЛП и последовательной стыковке возникающих задач.

Попробуем это проделать на следующем простом примере:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= u_1(t), \quad \dot{x}_2(t) = u_2(t), \quad x_1(t_0) = x_2(t_0) = 1, \\ U(x) &= \{u_1(t), u_2(t) : u_1(t) + u_2(t) \leq x_2(t), u_1(t) \geq 0, u_2(t) \geq 0\}, \\ J[u] &= \frac{1}{2}(x_1^2(T) - x_1^2(t_0)) = \int_{t_0}^T x_1(t)u_1(t)dt. \end{aligned}$$

Если не учитывать возмущений многогранника  $U(x)$  фазовыми координатами, т. е. считать, что

$$u(x_0) = \{u_1(t), u_2(t) : u_1(t) + u_2(t) \leq x_2(t_0) = 1, \quad u_1(t) \geq 0, \quad u_2(t) \geq 0\},$$

(назовем такую задачу простейшей), то при всех  $T - t_0$  принцип максимума дает очевидный ответ:

$$u_1(t) = 1, \quad u_2(t) = 0$$

$$\text{и} \quad x_1(t) = x_1(t_0) + x_2(t_0)(t - t_0) = 1 + (t - t_0), \quad x_2(t) = x_2(t_0) = 1.$$

Очевидно также, что этот ответ сохранится и при достаточно малых  $T - t_0$  в случае  $u \in U(x(t))$ , так как из-за непрерывности  $x(t)$  можно считать задачу погруженной в некоторый класс малых возмущений  $\omega$ , т. е.  $u \in U(\omega)$ , и воспользоваться устойчивостью решения простейшей задачи (в силу регулярности решения соответствующей задачи ЛП).

Чтобы рассмотреть исходную задачу при больших  $T - t_0$ , выполним следующее преобразование: разобьем отрезок  $[t_0, T]$  точкой  $t_1$  на  $[t_0, t_1]$  и  $[t_1, T]$  и рассмотрим

$$J[u] = \int_{t_0}^T x_1(t)u_1(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} x_1(t)u_1(t)dt + \int_{t_1}^T x_1(t)u_1(t)dt.$$

Ясно, что на оптимальном решении при любом  $t_1$  траектория  $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$  при  $t \in [t_1, T]$  может быть представлена в виде:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_1(t_1) + x_2(t_1)(t - t_1), \\ x_2(t) &= x_2(t_1) = 1. \end{aligned}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} J[u] &= \int_{t_0}^{t_1} x_1(t)u_1(t)dt + x(t_1)(T-t_1) + x_2(t_1)\frac{(T-t_1)^2}{2} = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} (x_1(t) + T-t_1)u_1(t) + \\ &+ \frac{(T-t_1)^2}{2}u_2(t)dt + x_1(t_0)(T-t_1) + x_2(t_0)\frac{(T-t_1)^2}{2}. \end{aligned}$$

Можно теперь рассматривать исходную простейшую задачу на отрезке  $[t_0, t_1]$  с целевой функцией:

$$J[u] = \int_{t_0}^{t_1} (x_1(t) + T-t)u_1(t) + \frac{(T-t_1)^2}{2}u_2(t)dt$$

и условиями:

$$u \in U(x_0), \quad x_1(t_0) = x_2(t_0) = 1.$$

Ясно, что решение этой задачи будет определяться положением плоскости  $(1+T-t_1)u_1(t_0) + \frac{(T-t_1)^2}{2}u_2(t_0) = \text{const}$  относительно многогранника  $U(x_0)$ . При  $t_1 \rightarrow t_0$  имеем:

$$(1+T-t_0)u_1(t_0) + \frac{(T-t_0)^2}{2}u_2(t_0) = \text{const}.$$

В случае  $T$ , близких к  $t_0$ , все определялось задачей линейного программирования (ЛП):

$$u_1(t_0) \rightarrow \max, \quad \begin{pmatrix} u_1(t_0) \\ u_2(t_0) \end{pmatrix} \in U(x_0).$$

Если увеличить  $T$  до тех пор, пока не выполнится

$$1+T-t_0 = \frac{(T-t_0)^2}{2},$$

то соответствующая задача ЛП примет вид:

$$u_1(t_o) + u_2(t_o) \rightarrow \max, \quad u(t_o) = U(x_o).$$

Ее решение не единственно, т. е. условия регулярности нарушены и решение не продолжимо на отрезке  $[t_o, T]$ , длина которых  $T - t_o$  не удовлетворяет условию  $T - t_o \leq \sqrt{3} + 1$ .

В случае конкретного простого примера, рассматриваемого здесь, нетрудно догадаться, что в окрестности точки  $t_o$  следует рассмотреть функционал

$$\bar{J}[u] = \int_{t_o}^{t_1} (x_2(t) + (x_1(t) - x_1(t_o))u(t)) dt \quad \text{при } u \in U(x_o)$$

и убедиться, что на отрезке  $[t_o, t_1]$  управление будет определяться следующим образом:  $u_1(t) = 0$ ,  $u_2(t) = 1$ . Таким образом, при  $T - t_o > \sqrt{3} + 1$  решение задачи будет определяться двумя режимами:  $u_1(t) = 0$ ,  $u_2(t) = x_2(t)$  при  $t \in [t_o, t_1]$ , и  $u_1(t) = x_2(t)$ ,  $u_2(t) = 0$  при  $t \in [t_1, T]$ ,  $t_1 = T - \sqrt{3} - 1$ . Нетрудно убедиться, что это решение сохранится при всех  $T - t_o$ .

Сформулируем теперь задачу, которую будем исследовать в следующих главах монографии:

$$J[u] = \int_{t_o}^{T} F_o(x(t), u(t)) dt \rightarrow \min, \quad (1.5.6)$$

$$\dot{x}(t) = u(t), \quad x(t_o) = x_o, \quad t \in [t_o, T], \quad T \text{ — фиксировано,}$$

$$G(x(t), u(t)) = 0, \quad (1.5.7)$$

$$F(x(t), u(t)) \geq 0, \quad (1.5.8)$$

$$x(\cdot): [t_o, T] \rightarrow R^n, \quad F_o(\cdot): R^n \times R^n \rightarrow R,$$

$$G(\cdot): R^n \times R^n \rightarrow R^m, \quad m < n, \quad F(\cdot): R^n \times R^n \rightarrow R^k.$$

Иногда задачу оптимального управления, записанную в такой форме, называют вариационной задачей Лагранжа с неравенствами. При помощи

простых замен переменных нетрудно убедиться, что более сложное задание уравнений динамики системы в виде  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$  можно учесть в ограничениях (1.5.7).

Будем считать, что требования гладкости к входящим в постановку задачи функциям достаточны для обеспечения корректности формулируемых далее утверждений и оговаривать их особо лишь в неочевидных случаях.

Везде далее мы будем рассматривать задачу оптимального управления, линейную по управляющим воздействиям. Эта задача занимает особое место в теории оптимального управления так как почти все сложные эффекты, возникающие при исследовании задач со смешанными ограничениями в ней присутствуют. Мы запишем задачу (будем называть ее *задачей А*) в виде:

$$J[u] = \int_{t_0}^T \langle g(x(t)), u(t) \rangle dt \rightarrow \min,$$

$$K(x(t)) u(t) = L(x(t)),$$

$$M(x(t)) u(t) \geq N(x(t)),$$

$$\dot{x}(t) = u(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in [t_0, T],$$

$K(\cdot), M(\cdot)$  — матрицы размерностей  $l \times n$  ( $l < n$ ) и  $m \times n$  соответственно;  $g(\cdot), L(\cdot), N(\cdot)$  — вектора размерностей соответственно  $w, l, m$ .

Будем считать, что требования гладкости к входящим в постановку задачи функциям достаточны для обеспечения корректности формулируемых далее утверждений, и оговаривать их особо лишь в неочевидных случаях.

## Глава II

# Возмущенные задачи математического и линейного программирования

Эта глава носит технический характер. Как уже отмечалось ранее, развиваемый в диссертации подход в существенной степени базируется на исследовании нерегулярных ситуациях в конечномерных задачах линейного и математического программирования. В настоящей главе в удобной для дальнейшего изложения форме приводятся элементы теории возмущений, используемые при доказательстве теорем в последующих главах.

### § 1. Устойчивость активных индексов ограничений задач математического и линейного программирования

Развиваемый далее подход существенным образом базируется на понятии устойчивости активных индексов ограничений задачи математического программирования (МП) по отношению к возмущениям.

Рассмотрим задачу МП:

$$f_0(x, y) \rightarrow \min_y, \quad (2.1.1)$$

$$y \in Y(x) = \{y : g(x, y) = 0, \quad f(x, y) \geq 0\}, \quad Y(x) \subset R^n, \quad (2.1.2)$$

где

$$q(\cdot) : M \times R^n \rightarrow R^m, \quad m < n, \quad f_0(\cdot) : M \times R^n \rightarrow R,$$

$$f(\cdot) : M \times R^n \rightarrow R^k, \quad x \in X, X \subset M,$$

$M$  — метрический компакт.

Будем называть задачу (2.1.1)–(2.1.2) возмущенной по отношению к задаче МП:

$$f_0(x_0, y) \rightarrow \min_y, \quad y \in Y(x_0), \quad (2.1.3)$$

где  $x_0$  — фиксированная точка множества  $X$ .

**Определение 2.1.1.** Пусть существует  $y^*(x)$  — локальный минимум задачи (2.1.1)–(2.1.2), полунепрерывный сверху в точке  $x_0$ .

Пусть  $f_i(x_0, y^*(x_0)) = 0$  — активное ограничение задачи (2.1.3).

Индекс  $i$  будем называть устойчивым активным индексом ограничений  $f_i(x, y^*(x)) \geq 0$  по отношению к возмущениям  $x$ , если  $f_i(x, y^*(x)) = 0$  при всех  $x \in X$ .

**Определение 2.1.2.** При тех же предположениях будем называть индекс  $j$  устойчиво пассивным по отношению к возмущениям  $x$ , если  $f_j(x, y^*(x)) > 0$  при всех  $x \in X$ .

**Утверждение 2.1.1.** Для устойчивости индекса  $i$  достаточно, чтобы двойственная переменная  $\lambda_i^*(x_0)$ , соответствующая ограничению в задаче (2.1.2), была строго положительна,  $f_i(x, y^*(x)) > 0$ .

Справедливость этого утверждения обеспечивается: требованием гладкости функций  $f_0(\cdot), f(\cdot), g(\cdot)$ ; полунепрерывностью сверху решения  $y^*(x)$  задачи (2.1.1)–(2.1.2); условием дополняющей нежесткости  $f_i(x, y^*(x)) \cdot \lambda_i^*(x) = 0$ .

**Определение 2.1.3.** Решение  $y^*(x_0)$  задачи (2.1.3) назовем регулярным, если существует  $X$ , такое что для  $\forall x \in X$  все индексы устойчивые.

Из этого определения сразу же следует очевидное

**Утверждение 2.1.2.** Если решение  $y^*(x_0)$  задачи (2.1.3) регулярно, то существует открытая область  $X$  такая, что для  $\forall x \in X$  решение  $y^*(x)$  задачи (2.1.1)–(2.1.2) регулярно.

**Утверждение 2.1.3.** Множество  $I_A$  активных индексов устойчиво, если

$$\text{rank} \frac{\partial}{\partial y} \left( \sum_{i \in I_A} \lambda_i^*(x_0) f_i(x_0, y) \right) \Big|_{y^*(x_0)} = \dim I_A^*.$$

**Утверждение 2.1.4.** Если локальный минимум задачи (2.1.3) регулярный, то вектор  $\begin{pmatrix} y^* & (x_0) \\ \lambda^* & (x_0) \end{pmatrix}$  состоит из одной точки

$$\left( \begin{pmatrix} y^* & (x_0) \\ \lambda^* & (x_0) \end{pmatrix} = \{ \cdot \} \right), \quad \lambda_i^*(x_0) > 0, \quad i \in I_A.$$

Рассмотрим некоторые ситуации, когда регулярность решения задачи (2.1.3) нарушается.

1. Пусть локальный минимум задачи (2.1.3) состоит из одной точки

$$locmin \{ f_0(x_0, y), y \in Y(x_0) \} = \{ \cdot \} = y^*, \text{ но при этом}$$

$$grad f_0(x_0, y) \Big|_{y^*} = \sum_{i \in I_1} \lambda_i grad f_i(x_0, y) \Big|_{y^*} + \sum_{i=1}^m \mu_i grad g_i(x_i, y) \Big|_{y^*}, \lambda_i > 0,$$

$$f_i(x_0, y^*) = 0 \text{ при } i \in I_2 \quad \text{и } \lambda_i = 0 \text{ при } i \in I_2.$$

Тогда множество активных индексов  $I_2$  неустойчиво.

2. Пусть  $locmin \{ f_0(x_0, y), y \in Y(x_0) \} = \{ \cdot \}$  и при этом

$$rank \frac{\partial \begin{pmatrix} g(x_0, y) \\ f_A(x_0, y) \end{pmatrix}}{\partial y} \Big|_{y^*} < m + dim I_A,$$

где через  $f_A(\cdot)$  обозначены активные ограничения с индексами из  $I_A$ .

3.  $locmin \{ f_0(x_0, y), y \in Y(x_0) \} \neq \{ \cdot \}$ .

Остановимся более подробно на случае, когда задача (2.1.1)–(2.1.2) линейна по  $y$ . В этом случае будем говорить об исследовании возмущенной задачи линейного программирования (ЛП)  $\min_y \{ \langle C(\varepsilon), y \rangle, y \in Y(\varepsilon) \}$ ,

$$Y(\varepsilon) = \{ y : A(\varepsilon)y = a(\varepsilon), B(\varepsilon)y \geq b(\varepsilon) \}.$$

Обратим внимание на следующие свойства задач ЛП.

А. Пусть существует регулярное решение  $y^*$  задачи ЛП:

$$\min_y \{ C(\varepsilon_0)y : y \in Y \}, \quad Y = \{ y : A(\varepsilon_0)y = a(\varepsilon_0), B(\varepsilon_0)y \geq b(\varepsilon_0) \}, \quad y \in R^n,$$

$$C(\varepsilon_0) \in R^n, \quad a(\varepsilon_0) \in R^l, \quad b(\varepsilon_0) \in R^m, \quad A(\varepsilon_0) \in R^{l \times n}, \quad B(\varepsilon_0) \in R^{m \times n}.$$

Это означает, что  $y^* = \begin{pmatrix} A(\varepsilon_0) \\ B'(\varepsilon_0) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a(\varepsilon_0) \\ b'(\varepsilon_0) \end{pmatrix}$ , где через  $B'(\varepsilon_0)$  и  $b'(\varepsilon_0)$

обозначены базисные строки матрицы  $B(\varepsilon_0)$  и соответствующая им часть вектора правых частей. При этом для остальных строк  $B''(\varepsilon_0)$  и правых частей  $b''(\varepsilon_0)$  имеет место неравенство:

$$B''(\varepsilon_0)y^* > b''(\varepsilon_0).$$

Свойство устойчивости регулярного решения задачи ЛП состоит в том, что существует окрестность  $E$  точки  $\varepsilon_0$  такая, что для всех  $\varepsilon \in E$  решение задачи

$$\min \{ \langle C(\varepsilon), y \rangle : y \in Y(\varepsilon) \}, \quad Y(\varepsilon) = \{ y : A(\varepsilon)y = a(\varepsilon), \quad B(\varepsilon)y \geq b(\varepsilon) \}$$

достигается на тех же базисных строках  $B'(\varepsilon)y = b'(\varepsilon)$  и  $A(b)y = a(\varepsilon)$ , лишь бы  $C(\cdot), a(\cdot), b(\cdot), A(\cdot), B(\cdot)$  были непрерывны в  $\varepsilon_0$  по всем компонентам.

Ограничения  $B'(\varepsilon_0)y = b'(\varepsilon_0)$  называют активными, а ограничения  $B''(\varepsilon_0)y > b''(\varepsilon_0)$  — пассивными.

Б. Если число строк в матрице  $\begin{pmatrix} A(\varepsilon_0) \\ B'(\varepsilon_0) \end{pmatrix}$  меньше  $n$  и при этом

$$c(\varepsilon_0) = (\lambda_A, \lambda_{B'}) \begin{pmatrix} A(\varepsilon_0) \\ B'(\varepsilon_0) \end{pmatrix}, \quad \langle c(\varepsilon_0), y \rangle = (\lambda_A, \lambda_{B'}) \begin{pmatrix} a(\varepsilon_0) \\ b'(\varepsilon_0) \end{pmatrix},$$

где  $\lambda_A, \lambda_{B'}$  — двойственные переменные, и кроме того

$$\text{rank} \begin{pmatrix} A(\varepsilon_0) \\ B'(\varepsilon_0) \end{pmatrix} = \dim \begin{pmatrix} a(\varepsilon_0) \\ b'(\varepsilon_0) \end{pmatrix},$$

то имеет место устойчивость активных ограничений  $B'(\varepsilon_0)y = b'(\varepsilon_0)$  в том смысле, что для  $\forall \varepsilon, \varepsilon \in E$ ,

$$\begin{aligned} & \operatorname{Argmin}\{\langle c(\varepsilon), y \rangle : y \in Y(\varepsilon)\} \in Y^*(\varepsilon) = \\ & = \left\{ y : \begin{pmatrix} A(\varepsilon) \\ B'(\varepsilon) \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} a(\varepsilon) \\ b'(\varepsilon) \end{pmatrix}, B''(\varepsilon) y \geq b''(\varepsilon) \right\}. \end{aligned}$$

Следует отметить, что двойственные переменные  $(\lambda_A, \lambda_{B'}) \neq 0$  и на оптимальном решении определены единственным образом. Решение  $y^*$  (неединственное) в рассматриваемой ситуации не устойчиво, так при различных возмущениях  $\varepsilon \in E$  к ограничениям  $B'(\varepsilon)y = b'(\varepsilon)$  будут добавляться разные ограничения из оставшихся  $B''(\varepsilon)y \geq b''(\varepsilon)$ .

В. Неустойчивой (в смысле сохранения набора активных ограничений) является ситуация, когда

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} A(\varepsilon_0) \\ B'(\varepsilon_0) \end{pmatrix} < \dim \begin{pmatrix} a(\varepsilon_0) \\ b'(\varepsilon_0) \end{pmatrix}.$$

## § 2. Ограниченность и непрерывность многозначных отображений, задаваемых линейными ограничениями

Исследуем вопрос, когда многозначное отображение

$$Y(x) = \{y : K(x)y = L(x), M(x)y \geq N(x)\}$$

обладает свойствами ограниченности и непрерывности. Здесь

$$K(\cdot) \in R^{l \times n}, \quad l < n, \quad M(\cdot) \in R^{m \times n}, \quad L(\cdot) \in R^l, \quad N(\cdot) \in R^m.$$

**Лемма 2.2.1.** Пусть задано многозначное отображение

$$Y(x) = \{y : M(x)y \geq N(x)\}.$$

Предположим, что  $\|M(0)\| \neq 0$ ,  $Y(0)$  — компакт,  $\operatorname{int} Y(0) \neq \emptyset$ ,  $M(x)$  и  $N(x)$  непрерывны. Тогда  $Y(x)$  непрерывно в точке  $\varepsilon = 0$ , т. е. для любой окрестности нуля  $W$  существует  $\varepsilon = 0$ , такое что из  $\|x\| < \delta$  следует:  $Y(x) \subset Y(0) + W$ ,  $Y(0) \subset Y(x) + W$ .

*Доказательство.* Пусть  $\bar{y} \in \text{int } Y(0)$ . Тогда  $M(0)\bar{y} > N(0)$ . Отсюда, в силу непрерывности  $M(x)$  и  $N(x)$ , следует, что существует такое  $X$ ,  $\forall x \in X \rightarrow \bar{y} \in Y(x)$ . Покажем, что  $Y(x)$  ограничено. В силу компактности  $Y(0) \exists D_R$  такое, что  $Y(0) \subset D_R$ . Следовательно,  $\exists D_{R+1}$  такое, что  $Y(x) \in D_{R+1}$  и  $\|y_n\| \leq \text{const}$ .  $D_R$  и  $D_{R+1}$  — компакты. Предположим противное, т. е.  $\exists y_n \in Y(x_n)$ ,  $x_n \rightarrow 0$  так, что  $\|y_n\| \geq R+1$ . Из  $\|y_n\| \leq \text{const} \Rightarrow y_n \rightarrow y_0$ ,  $M(x_n)y_n \geq N(x_n)$ ,  $M(0)y_0 \geq N(0)$ , т. е.  $y_0 \in Y(0)$ . Но из  $\|y_n\| \geq R+1$  следует  $\|y_0\| \geq R+1$ . Получено противоречие, т. е.  $Y(x)$  ограничено для  $\forall x \in X$ . Из ограниченности следует, что  $\forall y_n \in Y(x_n)$ ,  $x_n \rightarrow 0$ ,  $\exists y_{n_k} \rightarrow y_0 \in Y(0)$  и  $\|y_n\| \leq \text{const}$ , т. е. для любой окрестности нуля  $W$ ,  $\exists \delta > 0$ , что  $\forall x \|x\| < \delta$  имеет место  $Y(x) \subset Y(0) + W$ . Для  $\forall \varepsilon > 0$  определим

$$Y_\varepsilon(0) = \{y : M(0)y \geq N(0) + \varepsilon\}.$$

Ясно, что  $\rho_H(Y_\varepsilon(0), Y(0)) \leq 0(\varepsilon)$ , где  $\rho_H(\cdot)$  — хаусдорфова метрика. Тогда  $\exists X, \forall x \in X$ ,  $Y(x) \supset Y_\varepsilon(0)$ . Пусть  $X$  такое, что

$$\|M(x) - M(0)\| < \frac{\varepsilon}{2r}, \quad \|N(x) - N(0)\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда  $\forall y \in Y_\varepsilon(0)$  имеет место  $M(0)y \geq N(0) + \varepsilon$ . Отсюда следует, что для  $y \in Y(x)$ ,  $Y(x) = \{y : M(x)y \geq N(x)\}$  выполняется

$$Y(0) \subset Y_\varepsilon(0) + W \subset Y(x) + W.$$

**Лемма 2.2.2.** Пусть

$$L(x) = \{y : K(x)y = L(x)\},$$

плоскость  $L(x) \subset R^n$ . Пусть  $\text{rank}(K(x), L(x)) = \text{const}$ . Отметим, что если  $\text{rank } K(x) = \dim K(x)$ , то это условие будет выполнено.

Пусть многозначное отображение  $Y(x)$  удовлетворяет условиям леммы 2.2.1 и, кроме того,  $\text{int } Y(0) \neq \emptyset$  в  $L$ . Пусть также для каждого из

ограничений  $\langle M_i(0), y \rangle \geq N_i(0)$ ,  $i = \overline{1, m}$  имеет место  $P_{r_L} M_i(0) \neq 0$ . Тогда  $\rho_H(Y(x), Y(0)) \rightarrow 0$ . В частности,  $Y(x)$  — ограничено и имеет непустую внутренность в  $L$ .

*Доказательство.* Так как  $L(x)$  непрерывна и постоянной размерности, то

$$M'_i(x) = P_{r_{L(x)}} M(x).$$

$$\text{Рассмотрим } \bar{Y}(x) = \left\{ y : \langle M'_i(x), y \rangle \geq N'_i(x) \right\}.$$

Из того, что  $\bar{Y}(x)$  удовлетворяет условию леммы 2.2.1, получаем доказательство леммы 2.2.2.

Кроме рассмотренных выше лемм 2.2.1 и 2.2.2, в дальнейшем будет очень полезна лемма Хоффмана [83].

Приведем ее в той формулировке, которую будем использовать в следующих главах.

**Лемма 2.2.3** (Хоффмана). Пусть задано полунепрерывное сверху многозначное отображение:

$$Y(x) = \left\{ y : K(x)y = L(x), M(x)y \geq N(x) \right\}$$

и  $Y(0) \neq \emptyset$ ,  $Y(0)$  — компакт.

Пусть  $M(x), K(x), L(x), N(x)$  удовлетворяют покомпонентно условию Липшица с константой  $\alpha$  в окрестности точки  $x = 0$ . Тогда найдется окрестность  $X$  точки  $x = 0$  и константа  $\beta$ , такие что  $\text{dis}(Y(x), Y(0)) \leq \beta \|x\|$  для  $\forall x \in X$ .

### § 3. Оценки расстояний в возмущенных задачах математического программирования

Основной целью настоящего параграфа является установление условий, при которых нелокальные оценки расстояний в многозначных отображениях, задаваемых нелинейными неравенствами, являются липшицевыми. Пусть ограничения возмущенной задачи МП, описывающие множество допустимых решений, имеют вид:

$$f(x, y) \geq 0. \tag{2.3.1}$$

Предположим, что  $f : R^n \times M \rightarrow R^k$ ,  $y \in R^n$  — независимая переменная,  $x \in M$  — возмущенный параметр,  $M$  — некоторая окрестность точки  $x_0$ , все компоненты функции  $f(x, y)$  непрерывны по совокупности переменных. Множество  $Y(x_0) = \{y : f(x_0, y) \geq 0\}$  будем называть стационарным и обозначать  $Y_0$ . Многозначное отображение задается формулой:

$$Y(x) = \{y : f(x, y) \geq 0\}. \quad (2.3.2)$$

Нетрудно убедиться, что если функции  $f_i(\cdot)$ ,  $i = \overline{1, K}$  выпуклы по совокупности переменных, то отображение (2.3.2) будет выпуклым. Ясно также, что если  $f_i(x, y)$  выпуклы по  $y$  при любых  $x \in M$ , то отображение (2.3.2) выпуклозначно. Введем в рассмотрение функцию:

$$F(x, y) = \min_i \{f_i(y, x), \quad i = \overline{1, K}\}.$$

Очевидно, что если все  $f_i(x, y)$  непрерывны по совокупности переменных, то и  $F(x, y)$  также непрерывна. Отображение (2.3.2) в этом случае будет задаваться формулой:

$$Y(x) = \{y : F(x, y) \geq 0\}. \quad (2.3.3)$$

Рассмотрим некоторые отображения, обладающие свойством полунепрерывности сверху.

### 1. Отображение

$$Y(\xi) = \{y : F(y) \leq \xi\} \quad (2.3.3)$$

удовлетворяет условию Липшица в точке  $\xi = 0$ , если  $F(x)$  выпуклая непрерывная функция, а множество  $Y(0)$  ограничено. Следовательно, отображение (2.3.3) полунепрерывно сверху в точке  $\xi = 0$ .

#### Утверждение 2.3.1. Отображение

$$Y(x) = \{y : F(x, y) \geq 0\}$$

полунепрерывно сверху в точке  $x_0$ , если:

- а)  $Y(x_0)$  ограничено и непусто;  
 б)  $F(x, y)$  — непрерывная по  $y$  функция при всех  $x \in M$ ;  
 в)  $F(x, y)$  — выпуклая по  $y$  функция при всех  $x \in M$ ;  
 г)  $F(x, y)$  — равномерно непрерывная по  $x$  функция при  $y \in W$ ,

где  $W$  — ограниченное множество в  $R^n$  и  $Y(x_0) \subset W$ .

*Доказательство.* 1. Рассмотрим отображение

$$Y(\xi) = \{y : F(x_0, y) \geq \xi, \quad \xi \in R^+\},$$

так как оно непрерывно сверху, то для любой окрестности нуля  $U$  найдется  $\bar{\xi}$  такое, что для всех  $\bar{y} \notin Y(0) + U \subset W$  имеет место  $F(\bar{y}, x_0) < \bar{\xi}$ .

2. Существует окрестность  $X$  точки  $x_0$  такая, что если

$$y \in \{y : F(x, y) \geq 0\} \cap W,$$

то  $y \in Y(\xi)$ . Это следует из неравенств:

$$F(x_0, y) - \varepsilon > F(x, y) > F(y, x_0) + \varepsilon, \quad F(x_0, y) > F(x, y) + \varepsilon > \varepsilon \quad (2.3.4)$$

в силу условия г).

3. Рассмотрим случай, когда множество  $\{y : F(y, x) \geq 0\} \cap Y(x_0)$  пусто. Очевидно, что при этом с необходимостью должно выполняться  $F(x_0, y) = 0$  при всех  $y \in Y(x_0)$ . Возможны два случая: либо множество  $Y(x) = \{y : F(x, y) \geq 0\}$  — пусто (и будем считать, что оно содержится в  $Y(x_0)$ ), либо  $Y(x) \in Y(x_0) + U$ .

4. Пусть множество  $\mathcal{Y}(x) = \{y : F(x, y) \geq 0\} \cap Y(x_0) + U$  непусто. Заметим, что в силу 1 и 2:

$$F(x, y) < F(x_0, y) - \varepsilon < \bar{\xi} - \varepsilon < 0,$$

при  $y \in W \setminus Y(\bar{\xi}) + U$ . Покажем, что не существует точек  $y \in Y(x)$ , таких, что  $y \in Y(x_0) + U$ . Предположим противное и обозначим эту точку  $\bar{y}$ . В силу выпуклости  $F(x, y)$  все точки отрезка  $\lambda \bar{y} + (1 - \lambda) \mathcal{Y}$ ,  $\lambda \geq 0$ ,

$y \in Y^0(x)$  принадлежат  $Y(x)$ . С другой стороны, среди точек этого отрезка всегда найдется точка  $y^* \in W \setminus Y(\bar{x}) + U$ , откуда следует, что  $F(x, y^*) > 0$ ,  $y^* \notin Y(x)$ . Противоречие. Следовательно, выпуклозначное отображение  $Y(x)$  полунепрерывно сверху в точке  $x_0$ .

Отметим специально, что при условиях доказанного утверждения имеет место именно полунепрерывность сверху, а не непрерывность рассмотренного многозначного отображения. Это иллюстрируется следующим примером.

**Пример 1.**  $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ ,  $x_0 = 0$ ,

$$0 \leq y_1 \leq 1, \quad 0 \leq y_2 \leq 1, \quad x^2 (y_1 + y_2) \leq 0.$$

При  $x_0 = 0$   $Y(x_0) = \{y : 0 \leq y_1 \leq 1, \quad 0 \leq y_2 \leq 1\}$ . При любом  $x \neq 0$   $Y(x) = \{y : y_1 = 0, y_2 = 0\}$ . В общем случае установить условия, при которых многозначное отображение, задаваемое нелинейными неравенствами, будет полунепрерывно сверху, по-видимому, очень сложно. Ниже приводятся примеры, когда нелинейные неравенства задаются гладкими функциями, а стационарные множества выпуклы и тем не менее соответствующие многозначные отображения не являются полунепрерывными сверху.

**Пример 2.**  $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ ,  $x_0 = 0$ ,

$$F(x, y) = (y_1^2 + y_2^2) \exp(-x^2 (y_1^2 + y_2^2)) - 1 \leq 0.$$

При  $x = x_0 = 0$  функция  $F(x, y)$  имеет вид  $F(0, y) = y_1^2 + y_2^2 - 1$  и стационарным множеством является круг  $y_1^2 + y_2^2 \leq 1$ . При  $x \neq 0$  допустимое множество состоит из двух подмножеств:  $y_1^2 + y_2^2 \leq r^2$  и  $y_1^2 + y_2^2 \geq R^2$ ,  $r < R$ . При увеличении  $|x|$   $r \rightarrow R$ .

**Пример 3.**  $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ ,  $x_0 = 0$ ,

$$F(x, y) = \min_{i=1,2,3} \left\{ f_1(x, y) = -y_1 + \frac{1-y_2}{y_2^2+1} + x^2, f_2(x, y) = y_1, f_3(x, y) = y_2 \right\} \geq 0.$$

$$\text{При } x_0 = 0 \text{ неравенства } \begin{cases} y_1 \leq \frac{1-y_2}{y_2^2+1}, \\ y_1 \geq 0, \\ y_2 \geq 0 \end{cases}$$

определяют ограниченное выпуклое множество. При  $x \neq 0$  возникают два выпуклых множества, одно из которых неограниченно.

Пусть задано отображение:

$$Y(x) = \{y : F(x, y) \geq 0\}.$$

Будем рассматривать его в следующих предположениях:

1. Отображение  $Y(x)$  полунепрерывно сверху в точке  $x_0$ .
2. Множество  $Y(x_0)$  непусто и ограничено.
3. Функция  $F(x, y)$  удовлетворяет условию Липшица с константой  $K$  для всех  $y \in W$ , где  $W$  — ограниченное множество, содержащее  $Y(x_0)$ .
4. Функция  $F(x_0, y)$  регулярно локально выпукла.
5. Производная по всем направлениям  $\bar{y} \in \partial F(x_0, y)$ ,  $\|\bar{y}\| = 1$  функции  $F(x_0, y)$  во всех граничных точках множества  $Y(x)$  больше некоторой константы  $a > 0$ .  $\partial F(x_0, y)$  — субдифференциал функции  $F(x_0, y)$ , граничная точка — точка, содержащая в любой своей окрестности точки дополнения  $R^n \setminus Y(x_0)$ . Совокупность граничных точек множества  $Y(x_0)$  будем обозначать  $\Gamma Y(x_0)$ . Имеет место [105].

**Теорема 2.3.1.** Расстояние от множества  $Y(x)$  до множества  $Y(x_0)$  (далее будем использовать обозначение  $\text{dis}(Y(x), Y(x_0))$ ) удовлетворяет условию Липшица в некоторой окрестности точки  $x_0$ .

**Доказательство.**

*Предложение 1.* Пусть  $\bar{y} \in Y(x)$ ,  $\bar{y} \notin Y(x_0)$ . Пусть, кроме того,  $\text{dis}(y, Y(x_0))$  реализуется в точке  $y_0 \in \Gamma Y(x_0)$ . Тогда  $\bar{y} - y_0 \in \partial F(x_0, y_0)$ .

Доказательство предложения 1 основывается на следующих посылах:  $\partial F(x_0, y_0)$  — конус, сопряженный конусу  $K_{y_0}$  — касательных направлений;  $K_{y_0}$  — выпуклый конус; в шаре  $\|y - \bar{y}\| < \|\bar{y} - y_0\|$  не содержатся точки множества  $Y(x_0)$ , следовательно, он отделен от  $K_{y_0}$  функционалом  $\langle y^*, y \rangle$ , где  $y^* \in \partial F(x_0, y_0)$ ,  $\langle y^*, \bar{y} - y_0 \rangle = \|\bar{y} - y_0\|^2$ ,  $y^* = \bar{y} - y_0$  в силу рефлексивности пространства  $R^n$ .

*Предложение 2.* В первом условии предложения 1 возможны две ситуации: либо  $F(x, \bar{y}) = 0$ ; либо  $F(x, \bar{y}) > 0$ . Если  $F(x, \bar{y}) > 0$ , рассмотрим одномерную функцию  $\Gamma(\bar{y}, x_0 + \theta \cdot (x - x_0))$ . Эта функция непрерывна и на отрезке  $0 \leq \theta \leq 1$  меняет знак. Следовательно, найдется  $\theta^*$  такое, что  $F(\bar{y}, x_0 + \theta^* \cdot (x - x_0)) = 0$ .

*Предложение 3.* Рассмотрим функцию  $t(x)$ , заданную неявно следующим образом:

$$F\left(y_0 + t \cdot \frac{\bar{y} - y_0}{\|\bar{y} - y_0\|}, x_0 + \theta \cdot (x - x_0)\right) = 0,$$

$$0 \leq \theta \leq 1,$$

причем  $F(x_0, y_0) = 0$ . Применяя теорему о неявной функции и учитывая то обстоятельство, что

$$F'_x\left(y_0 + t \cdot \frac{\bar{y} - y_0}{\|\bar{y} - y_0\|}, x_0 + \theta \cdot (x - x_0)\right) \geq a,$$

получим  $\|\bar{y} - y_0\| = t \leq \frac{K\theta}{a} \cdot \|x - x_0\|$ . В силу полунепрерывности сверху отображения  $Y(x)$ , приведенные рассуждения справедливы для любой точки  $y \in Y(x)$ . Теорема доказана.

**Замечание 1.** Нетрудно показать, что если отображение  $Y(x)$  непрерывно в  $x_0$ , то расстояние между  $Y(x)$  и  $Y(x_0)$  оценивается по формуле  $\rho_H(Y(x), Y(x_0)) \leq S \cdot \|x - x_0\|$ , где  $\rho_H$  — хаусдорфово расстояние.

**Следствие 1.** Если а)  $F(x, y) = \min_i \{f_i(x, y), i = \overline{1, k}\} \leq 0$ ; б) функции  $f_i(x, y)$  удовлетворяют условию Липшица с константой  $k$  при всех  $y \in W$ , где  $W$  — ограниченное множество в  $R^n$ , и

$$Y(x_0) = y : F(x, y) \geq 0 \subset W ;$$

в) функции  $f_i(x, y)$  непрерывно дифференцируемы по Фреше при всех  $x \in X$ ; г) отображение  $Y(x)$  полунепрерывно сверху в  $x_0$ , то:

$$1) \partial F(x_0, y) = \left\{ y^* : y^* = \sum_{i=1}^N \lambda_i \frac{\partial f_i(x_0, y)}{\partial y}, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1, i \in I(y) \right\},$$

$y \in \Gamma F(x_0, y)$ ,  $I(y)$  — набор активных индексов ограничений

$f_i(x_0, y) \geq 0, i = \overline{1, k}$  в точке  $y$ ,  $\frac{\partial f_i(x_0, y)}{\partial y}$  — градиент функции

$f_i(x_0, y)$ ;

2) если, кроме того,  $y^* > 0$  для всех  $y \in \Gamma Y(x_0)$ , то  $dis(Y(x), Y(x_0))$  удовлетворяет условию Липшица.

**Следствие 2.** Пусть выполняются условия (а)–(г) предыдущего следствия и, кроме того, выполняются условия регулярности: существует  $\delta$

такое, что  $\left\langle \frac{\partial f_i(y, x_0)}{\partial y}, \delta \right\rangle > 0$  для всех  $i \in I(y)$  при  $y \in \Gamma Y(x_0)$ . Тогда

$\rho_H(Y(x), Y(x_0))$  удовлетворяет условию Липшица.

Продолжим исследование задачи.

Пусть  $x \in R^n, y \in R^m$ ,

$$G(x, y) : U(x_0) \times R^m \rightarrow R^1,$$

$U(x_0)$  — ограниченная окрестность точки  $x_0 \in R^n$ ,

$$Y(x) = \{y \mid G(x, y) \leq 0\}.$$

Нас будет интересовать «уклонение»  $Y(x)$  от  $Y(x_0)$ , обозначаемое  $dis(Y(x), Y(x_0))$ .

По определению

$$\text{dis}(B, A) = \sup_{y \in B} \rho(y, A) = \sup_{y \in B} \inf_{y' \in A} |y - y'|.$$

Нас будут интересовать условия, гарантирующие оценку

$$\text{dis}(Y(x), Y(x_0)) \leq \text{const} |x - x_0| \quad (2.3.5)$$

в малой окрестности точки  $x_0$ .

**Предложение 1.** Пусть  $\exists L > 0$  такая, что

$$G(x_0, y) - G(x, y) \leq L|x - x_0|$$

для всех  $x \in U(x_0)$ ,  $y \in Y(x)$  (это меньше, чем условие Липшица по  $x$ ).

Тогда для любого  $x \in U(x_0)$  и для любого  $y \in Y(x)$  имеет место оценка:

$$G(x_0, y) \leq L|x - x_0|.$$

*Доказательство.* Пусть  $x \in U(x_0)$ ,  $y \in Y(x) \rightarrow G(x, y) \leq 0$ . Тогда

$$G(x_0, y) = G(x, y) + G(x_0, y) - G(x, y) \leq G(x_0, y) - G(x, y) \leq L|x - x_0|$$

что и требовалось доказать.

\* \* \*

Положим:

$$U_{\varepsilon}^+ = \{y | G(x_0, y) > 0, \rho(y, Y(x_0)) < \varepsilon\},$$

где  $\varepsilon > 0$ ,  $\rho(y, A) = \inf_{y' \in A} |y - y'|$ .

**Предложение 2.** Пусть:

- 1) для  $G$  выполнено условие предложения 1;
- 2) отображение  $x \rightarrow Y(x)$  полунепрерывно сверху в точке  $x_0$ , то есть  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  такое, что  $|x - x_0| < \delta \rightarrow Y(x) \subset U_{\varepsilon}(Y(x_0))$  (где  $U_{\varepsilon}(A) - \varepsilon$  — окрестность множества  $A$ );

3) существует  $\varepsilon_0 > 0$  такое, что  $\forall y \in U_{\varepsilon_0}^+$  имеет место оценка рас-  
стояния

$$\rho(y, \delta_0) \leq \text{const } G(x_0, y), \quad \text{где } \delta_0 = \{y \mid G(x_0, y) = 0\}.$$

Тогда существует окрестность  $U'(x^0) \subset U(x_0)$  точки  $x_0$  такая, что  
 $\text{dis}(Y(x), Y(x_0)) \leq \text{const}' |x - x_0| \quad \forall x \in U'(x_0)$ .

*Доказательство.* Поскольку отображение  $x \rightarrow Y(x)$  полунепрерывно  
сверху в точке  $x_0$ , то  $\exists \delta_0 > 0$  такое, что

$$|x - x_0| < \delta_0 \Rightarrow Y(x) \subset U'_{\varepsilon_0}(Y(x_0)).$$

Пусть  $|x - x_0| < \delta_0$ ,  $y \in Y(x)$ ,  $y \notin Y(x_0)$ , т. е.  $G(x_0, y) > 0$ .

Тогда  $y \in U_{\varepsilon_0}(x_0)$ . Согласно свойству 3)  $\rho(y, \Gamma_0) \leq \text{const } G(x_0, y)$ .

Но в силу предложения 1

$$F(x_0, y) \leq L|x - x_0|.$$

Следовательно,

$$\rho(y, \Gamma_0) \leq \text{const} \cdot L|x - x_0| \Rightarrow \sup_{y \in Y(x_0)} \rho(y, \Gamma_0) \leq \text{const} \cdot L \cdot |x - x_0|.$$

Предложение доказано.

Конечно, здесь предположение о конечномерности  $x$ ,  $y$  не существен-  
но, все это верно просто в нормированных пространствах.

Теперь мы будем интересоваться условиями, при которых выполнено  
**свойство 3** предложения 2.

Положим для краткости  $G(x_0, y) = G_0(y)$ .

Рассмотрим случай, когда  $G_0(y) = \max_{1 \leq i \leq k} g_i(y)$ .

Пусть:

а)  $Y_0 = \{y \mid F(y)_0 \leq 0\}$  — компакт;

б)  $g_i(y)$  — непрерывно дифференцируема в окрестности

$$\Gamma_0 = \{y \mid F_0(y) = 0\} \quad \forall i;$$

в) активные  $g'_i(y)$  позитивно независимы на  $\Gamma_0$ , т. е.  $\forall y \in \Gamma_0$  набор  $\{g_i(y)\}_{i \in I(y)}$  (где  $I(y) = \{i \mid g_i(y) = G_0(y)\}$ ) обладает свойством:

$$\alpha_i \geq 0 : \in I(y) \quad \sum \alpha_i g'_i(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_i = 0 \quad \forall i \in I(y).$$

Тогда имеет место условие 3 предложение 2.

Действительно, пусть  $y \in \Gamma_0$ ,  $\bar{y}$  — мало. Тогда

$$G_0(y + \bar{y}) = \max_{I(y)} \{g_i(y)\bar{y} + r_i(y, \bar{y})\}.$$

Отсюда в силу теоремы 1.4 (УМН. Т. 35. Вып. 6. 1918. «Теорема Люстерника и теория экстремума». Дмитрук, Милютин, Осмоловский, с. 17) легко следует свойство 3 предложения 2.

Можно посмотреть и другие случаи, когда имеет место накрывание (например, для липшицевых функционалов условия для накрывания реализуются в терминах производной Кларка, см. там же).

Мы рассмотрим другой случай, когда имеет место свойство 3).

Вместо  $G_0(y)$  будем писать просто  $G(y)$ .

**Предложение 3.** Пусть в каждой точке  $y \in \Gamma_0$  существует производная по любому направлению  $G(y, \bar{y})$  причем,  $\bar{y} \rightarrow G'(y, \bar{y})$  — сублинейный функционал (например, пусть  $G$  локально выпукла). Пусть множество  $\{\bar{y} \mid G'(y, \bar{y}) < 0\}$  непусто  $\forall y \in \Gamma_0$  (условие Слейтера).

Тогда имеет место следующее.

Пусть  $y_1 \notin Y(x_0)$   $\rho(y_1, \Gamma_0)$  достигается в точке  $y_0$ . Положим  $y_1 - y_0 = \bar{y}$ .

Тогда  $\bar{y} \in \text{con } dG(y_0, \cdot)$ .

*Доказательство.* Пусть выполнены условия предложения. Тогда система условий  $G'(y_0, \bar{y}) < 0$ ;  $(\bar{y}, \bar{y}) > 0$  несовместна.

Действительно, пусть она совместна и  $\bar{y}$  — ее решение. Рассмотрим

$y^\varepsilon = y^0 + \varepsilon \bar{y}$ . Тогда при  $\varepsilon \rightarrow +0$

$$\begin{aligned} G(y^\varepsilon) &= G(y^0 + \varepsilon \bar{y}) = G(y^0 + \varepsilon \bar{y}) - G(y^0) = \\ &= G'(y^0, \bar{y}) \cdot \varepsilon + o(\varepsilon) = \varepsilon \left( G'(y^0, \bar{y}) + \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} \right) < 0 \end{aligned}$$

при  $\varepsilon \rightarrow +0$ .

Далее расстояние от  $y_1$  до  $y^\varepsilon$  в квадрате

$$\begin{aligned} |y_1 - y^\varepsilon|^2 &= |(y_1 - y_0) - \varepsilon \mathbb{y}|^2 = |\bar{y} - \varepsilon \mathbb{y}|^2 = \\ &= |\bar{y}|^2 + \varepsilon^2 |\mathbb{y}|^2 - 2\varepsilon (\bar{y}, \mathbb{y}) = |\bar{y}|^2 + \varepsilon \left( \varepsilon |\mathbb{y}|^2 - 2(\bar{y}, \mathbb{y}) \right) < |\bar{y}|^2 \end{aligned}$$

при  $\varepsilon \rightarrow +0$ .

Следовательно,  $y_0$  не есть реализатор расстояния.

Итак, система

$$G'(y^0, \mathbb{y}) < 0, \quad -(\bar{y}, \mathbb{y}) < 0 \tag{*}$$

несовместна.

Пусть  $\varphi_1, \varphi_2$  — сублинейные функционалы. Система  $\varphi_1 < 0, \varphi_2 < 0$  несовместна  $\Leftrightarrow \exists \alpha_1, \alpha_2, y_1^*, y_2^*$  такие, что

$$(A) \begin{cases} \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \alpha_1 + \alpha_2 > 0, y_1^* \in d\varphi_1, y_2^* \in d\varphi_2, \\ \alpha_1 y_1^* + \alpha_2 y_2^* = 0. \end{cases}$$

Пусть множество  $\varphi_1 < 0$  непусто, тогда  $0 \notin d\varphi_1$ . (Действительно, пусть  $y^* = 0 \in d\varphi_1$ . Пусть  $\varphi_1(\bar{y}^0) < 0$  тогда  $0 = \langle y^*, \bar{y}^0 \rangle \leq 0$  — противоречие.)

Если  $0 \in d\varphi_1$ , то в условиях (A) можно считать, что  $\alpha_2 = 1$  (если  $\alpha_2 = 0$ , то:  $\alpha_1 > 0 \Rightarrow y_1^* = 0, y_1^* \in d\varphi_1$  — противоречие).

Воспользуемся критерием A для системы (\*), полагая  $\alpha_2 = 1$ , поскольку  $\{\mathbb{y} \mid G'(y^0, \mathbb{y}) < 0\}$  непусто.

Итак (\*) несовместна  $\Leftrightarrow$

$$\exists \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 = 1, y_1^* \in dF'(y^0, \cdot), y_2^* \in d(-\bar{y}) = \{-\bar{y}\},$$

$$\alpha_1 y_1^* + \alpha_2 y_2^* = 0 \quad \sim$$

$$\alpha_1 y_1^* = \bar{y} \Rightarrow \bar{y} \in \text{con } dG(y^0, \cdot).$$

Предложение доказано.

**Предложение 4.**

- 1) выполнено условие предложения 3;
- 2)  $Y(x_0)$  — непустой компакт;
- 3) отображение  $y \in \Gamma_0 \rightarrow dF'(y, \cdot)$  полунепрерывно сверху на  $\Gamma_0$ ;
- 4) из условий  $y_n^0 \in \Gamma_0$ ,  $y_n^0 \rightarrow y^0 \in \Gamma_0$ ,  $|\bar{y}_n| = 1$ ,  $\bar{y}_n \rightarrow \bar{y}$ ,  $\varepsilon_n \rightarrow +0$  следует, что

$$\lim_n \frac{G(y_n^0 + \varepsilon_n \bar{y}) - G(y_n^0)}{\varepsilon_n} \geq G'(y^0, \bar{y})$$

(это не то же самое, что регулярно локально выпуклая функция, здесь  $y_n^0$  меняется);

- 5)  $G(y, \bar{y}) > 0 \quad \forall y \in \Gamma_0, \quad \bar{y} \in dG(y, \cdot)$ .

Тогда имеет место свойство 3 из предложения 2, т. е.  $\exists \varepsilon_0 > 0$  такое, что

$$\rho(y, \Gamma_0) \leq \text{const } G(y) \quad \forall y \in U_{\varepsilon_0}^+, \quad (**)$$

где  $\Gamma_0 = \{y \mid G(y) = 0\}$ .

*Доказательство.* Предположим, что ни в какой  $U_{\varepsilon}^+$  оценки (\*\*\*) нет. Это означает, что  $\exists$  последовательности  $y_n, y_n^0$  такие, что  $y_n^0 \in \Gamma_0$ ,  $y_n \notin Y(x_0)$ ,  $\|y_n - y_n^0\| \rightarrow 0$ ,  $y_n^0$  — реализатор расстояния  $\rho(y_n, Y(x_0)) = \rho(y_n, \Gamma_0)$  и при этом

$$G(y_n) = 0 (\|y_n - y_n^0\|).$$

Положим  $\|y_n - y_n^0\| = \varepsilon_n$ ;  $(y_n - y_n^0)/\varepsilon_n = \bar{y}_n$ .

Тогда  $\|y_n\| = 1$ ,  $y_n = y_n^0 + \varepsilon_n \bar{y}_n$ ,  $\varepsilon_n \rightarrow +0$ .

Не ограничивая общности мы можем считать, что  $\bar{y}_n \rightarrow \bar{y}$ ;  
 $y_n^0 = y^0 \Rightarrow y_n \rightarrow y^0$ .

Поскольку  $0 < G(y_n) = G(y_n) - G(y_n^0) = o(\varepsilon_n)$ , то

$$\Rightarrow G'(y^0, \bar{y}) \leq \lim_{\varepsilon_n} \frac{G(y_n^0 + \varepsilon_n \bar{y}_n) - G(y_n^0)}{\varepsilon_n} = 0 \Rightarrow G'(y^0, \bar{y}) \leq 0$$

(см. свойство 4).

Далее, согласно предложению 3  $\bar{y}_n \in dG(y_n^0, \cdot)$ . Поскольку  $\bar{y}_n \rightarrow \bar{y}$ ,  $y_n^0 \rightarrow y^0$  и отбор  $y \rightarrow dG'(y, \cdot)$  полунепроницаем сверху на  $\Gamma_0$ , то  $\bar{y} \in dG'(y^0, \cdot)$ .

Тогда в силу свойства 5  $G'(y^0, \bar{y}) > 0$ . Противоречие. Предложение доказано.

Из предложений 2, 4 вытекает

**Теорема 2.3.2.** Пусть для  $G(x, y)$  выполнены условия:

- 1)  $\exists L > 0: G(x_0, y) - G(x, y) \leq L|x - x_0| \quad \forall x \in U(x_0), y \in Y(x)$ ;
- 2) отображение  $x \rightarrow Y(x)$  полунепроницаемо сверху в точке  $X_0$ ;
- 3) функция  $G(y) = G(x_0, y)$  удовлетворяет условиям предложения 4.

Тогда  $\exists$  окрестность  $U'(x_0) \subset U(x_0)$  такая, что

$$dis(Y(x), Y(x_0)) \leq \text{const} |x - x_0|,$$

$$\forall x \in U'(x_0).$$

## Глава III

### Изопериметрическая задача

Название этой главы объясняется тем, что рассматриваемый в ней класс задач является обобщением классической изопериметрической задачи, которая может быть записана в форме задачи оптимального управления следующим образом:

$$\int_0^1 \langle Px(t), u(t) \rangle dt \rightarrow \max,$$

$$\dot{x}(t) = u(t), \varphi(u) \leq 1, x(0) = x(1) = 0,$$

где  $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  — кососимметричная матрица, задающая вращение на плоскости,  $x(t), u(t)$  — двумерные вектор-функции,  $\varphi(u)$  — сублинейная функция.

Эта форма записи изопериметрической задачи была предложена А. А. Милютиним. Такая запись генерирует каноническую форму, в которую может быть вложен гораздо более широкий и важный класс задач, который А. А. Милютин предлагает также называть изопериметрическим.

Важность этого класса задач подчеркивается и настоящей главой диссертации, в которой рассматриваются обобщения классической изопериметрической задачи, позволяющие исследовать широкий класс нерегулярностей, приводящей к возникновению переключений и новых режимов в задаче оптимального управления.

#### § 1. Линейные по управлениям задачи понтрягинского типа с билинейным интегрантом в целевой функции

Линейные по управлениям задачи понтрягинского типа с билинейным интегрантом в целевой функции могут быть записаны в следующей канонической форме: найти траекторию  $x(t)$  и управление  $u(t)$ , обеспечивающие минимум целевой функции

$$\int_0^1 \langle Ax(t), u(t) \rangle dt \tag{3.1.1}$$

при ограничениях

$$\mathfrak{K}(t) = u(t) \in U = \{u : B_1 u = b_1, B_2 u \geq b_2\}, \quad (3.1.2)$$

многогранник  $U$  ограничен, где  $x(t) : [0, 1] \rightarrow R^n$  — абсолютно непрерывная по своим компонентам функция,  $B_1$  — матрица  $k \times n$ ,  $b_1 \in R^k$ ,  $k < n$ ,  $B_2$  — матрица  $m \times n$ ,  $b_2 \in R^m$ ,  $x^T A u(t)$  — форма  $m$ -го порядка по  $x(t)$  и  $u(t)$ ,  $T$  — транспонирование,  $A$  — матрица, задающая эту форму. Начальное условие  $x(0) = 0$ . Отметим специально, что именно такое начальное условие порождает вырождение задачи.

### Редукция задачи

Обозначим через  $\left\{ R_i = (r_1^i, r_2^i, K, r_n^i), i = 1 \dots p \right\}$  совокупность вершин

многогранника  $U$ . Известно, что  $u(t)$  в каждый момент времени можно представить в виде выпуклой комбинации вершин  $U$ , а именно:

$$u(t) = \sum_{i=1}^p R_i^T w_i(t), \quad (3.1.3)$$

$$w_i(t) \geq 0, \sum_{i=1}^p w_i(t) = 1,$$

где  $w_i(t) = \mathfrak{K}_i(t)$  — измеримая функция. Считая  $R_i^T$  столбцами матрицы  $R$ , а  $w(t)$  — компонентами  $p$ -мерной вектор-функции  $w(t) = \mathfrak{K}(t)$ , равенство (3.1.3) можно переписать в виде:

$$u(t) = R w(t). \quad (3.1.4)$$

Имея в виду, что  $x(t) = R \int_0^t w(\tau) d\tau = R y(t)$ ,  $y(0) = 0$ , форма в целевой

функции примет вид:  $y^T(t) C w(t)$ , где  $C = R^T A R$ .

Таким образом, задача (3.1.1)–(3.1.2) редуцировалась к виду:

$$J[w] = \int_0^1 y^T(t) C w(t) dt, \quad (3.1.5)$$

$$w(t) = \mathfrak{K}(t) \in S,$$

$S$  —  $(p-1)$ -мерный симплекс.

Учитывая, что любая матрица может быть представлена в виде суммы симметричной и антисимметричной, получим:

$$C = C^S + C^A, C^S = \frac{1}{2}(C + C^T), C^A = \frac{1}{2}(C - C^T),$$

$$J[w] = \int_0^1 (y^T(t)C^S w(t) + y^T(t)C^A w(t)) dt =$$

$$= \frac{1}{2} y^T(t)C^S y(1) + \int_0^1 y^T(t)C^A w(t) dt. \quad (3.1.6)$$

### Конечномерный аналог

Рассмотрим следующую разностную конструкцию. Пусть  $w(t)$  на отрезке  $[0, 1]$  принимает конечное число значений  $N \geq p$ . Имеем

$$w(t) = \begin{cases} w_0 \quad npu \quad t \in [t_0, t_1), \\ w_1 \quad npu \quad t \in [t_1, t_2), \\ \text{К К К К К К К} \\ w_i \quad npu \quad t \in [t_i, t_{i+1}), \\ \text{К К К К К К К} \\ w_{N-1} \quad npu \quad t \in [t_{N-1}, t_N], \end{cases} \quad (3.1.7)$$

$$t_0 = 0, t_1 = 1.$$

Заметим, что покомпонентное разбиение  $w(t)$  на конечное число значений легко сводится к (3.1.7), при этом лишь увеличится число  $N \geq p$ , что не принципиально. Тогда

$$y(t) = \int_0^t \mathfrak{K}(\tau) d\tau = w_0(t - t_0)$$

при  $t \in [t_0, t_1)$ , и

$$y(t) = \int_0^t \mathfrak{K}(\tau) d\tau = \sum_{i=0}^{k-1} w_i(t_{i+1} - t_i) + w_k(t - t_k)$$

при  $t \in [t_k, t_{k+1}), k \geq 1, y(1) = \sum_{i=1}^{N-1} w_i(t_{i+1} - t_i)$ . Целевая функция (3.1.5) примет вид:

$$\begin{aligned} J[w] &= y^T(1)C^S y(1) + \int_{t_0}^{t_1} (\tau - t_0) w_0^T C^A w_0 d\tau + \\ &+ \sum_{k=1}^N \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left( \sum_{i=0}^{k-1} w_i(t_{i+1} - t_i) + w_k(\tau - t_k) \right)^T C^A w_k d\tau = \\ &= y^T(1)C^S y(1) + \frac{(t_1 - t_0)^2}{2} w_0^T C^A w_0 + \sum_{k=1}^N \left( \sum_{i=0}^{k-1} w_i(t_{i+1} - \right. \\ &\left. - t_i)(t_{k+1} - t_k) + w_k \frac{(t_{k+1} - t_k)^2}{2} \right)^T C^A w_k. \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

Требуется найти  $w_i \in S, i = 0 \dots N-1$  и  $\tau_i = t_{i+1} - t_i \geq 0$ , доставляющие минимум целевой функции (3.1.7) (задача А). Введем обозначение  $w_i(t_{i+1} - t_i) = y_i$  и учтем, что  $w_k^T C^A w_k = 0, k = 0 \dots N-1$  в силу антисимметричности матрицы  $C^A$ . Тогда

$$J[w] = \left( \sum_{i=0}^{N-1} y_i \right)^T C^S \left( \sum_{i=0}^{N-1} y_i \right) + \sum_{k=1}^N \left( \sum_{i=0}^{k-1} y_i \right)^T C^A y_k. \quad (3.1.9)$$

## § 2. Специальный класс задач билинейного программирования

К рассматриваемому в настоящем параграфе классу задач приводит разностная аппроксимация, проведенная в предыдущем параграфе. На этих задачах базируется изучение изопериметрической задачи (или задачи с вырождением в целевой функции).

**Лемма 3.2.1.** Среди всех оптимальных решений задачи билинейного программирования (БП)

$$\left\{ \xi^T A \eta : \xi + \eta = z, \xi, \eta \geq 0 \right\} \rightarrow \max_{\xi, \eta}$$

где  $\xi \in R^n, \eta \in R^n, z \in R^n, A$  — кососимметричная матрица, всегда существует такое, что  $\langle \xi, \eta \rangle = 0$ .

*Доказательство.* Пусть  $e_1, e_2, \dots, e_n$  — ортонормированный базис в

$$R^n, \quad e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} i, i=1 \dots n. \quad \text{Тогда } \langle \xi, e_i \rangle = \xi_i, \langle \eta, e_i \rangle = \eta_i. \quad \text{Введем множества}$$

индексов  $I_\xi$  и  $I_\eta$  такие, что  $I_\xi = \{i : \xi_i > 0\}$ ,  $I_\eta = \{i : \eta_i > 0\}$ .

Рассмотрим  $K = I_\xi \cap I_\eta$ . Если  $\langle \xi, \eta \rangle \neq 0$ , то  $K \neq \emptyset$  и  $K = \{k\}$  (так как  $\xi \geq 0, \eta \geq 0$ ). Введем  $\delta \in R^n$  и рассмотрим выражение

$$J = (\varepsilon + \delta)^T A(\eta - \delta) = \xi^T A\eta + \delta^T A(\xi + \eta) = \xi^T A\eta + \delta^T Az.$$

Положим  $\delta = \sum_{k \in K} \left( \frac{\xi_k + \eta_k}{2} \lambda_k + \frac{\eta_k - \xi_k}{2} \right) e_k, |\lambda_k| \leq 1$ . Очевидно, что векторы  $\xi + \delta$  и  $\eta - \delta$  в этом случае являются допустимыми для задачи БП.

$$\text{Имеем } \Delta J = \delta^T Az = \sum_{k \in K} \left( \frac{\xi_k + \eta_k}{2} \lambda_k + \frac{\eta_k - \xi_k}{2} \right) e_k^T Az.$$

Полагая  $\lambda_k = \text{sgn}(e_k^T Az)$ , получаем  $\Delta J \geq 0$ , и кроме того, нетрудно убедиться, что  $\langle \xi + \delta, \eta - \delta \rangle = 0$ . Что и доказывает лемму 1.

**Теорема 3.2.1.** Среди всех оптимальных решений задачи БП

$$\max_{x_i, i=1 \dots N} \left\{ \sum_{i=1}^{N-1} x_i^T A \sum_{j=i+1}^N x_j : \sum_{i=1}^N x_i = z, x_i \geq 0, i=1 \dots N \right\},$$

где  $x_i \in R^n, i=1 \dots N, z \in R^n, A$  — кососимметричная матрица, всегда существует такое, что  $\langle x_i, x_j \rangle = 0$  для всех  $i \neq j$ .

*Доказательство.* Воспользуемся леммой 1 и сделаем для этого замену переменных  $x_1 = \xi, \sum_{i=2}^N x_i = \eta$ . Тогда слагаемое в целевой функции, содержащее  $x_1$  и имеющее вид  $x_1^T A \sum_{i=2}^N x_i$  можно записать в виде  $\xi^T A\eta$  и рассмотреть его при ограничениях  $\xi + \eta = z, \xi \geq 0, \eta \geq 0$ . Из леммы 1 сле-

дует, что  $\langle \xi, \eta \rangle = 0$ , или, что то же самое,  $\left\langle x_1, \sum_{i=2}^{N-1} x_i \right\rangle = \sum_{i=2}^{N-1} \langle x_1, x_i \rangle = 0$ . Так

как  $x_i \geq 0, i = 1 \dots N$ , то  $\langle x_1, x_i \rangle = 0, i = 2 \dots N$ .

Рассмотрим теперь член в целевой функции, содержащий  $x_2 x_2^T (A \sum_{i=3}^n x_i - Ax_1)$ . Полагая  $x_2 = \xi, \sum_{i=3}^N x_i = \eta, \bar{z} = z - x_1$  и применяя лемму 1, получаем  $\langle x_2, x_i \rangle = 0, i = 3 \dots N$ . Рассуждая далее аналогичным образом, получаем  $\langle x_i, x_j \rangle = 0, i \neq j, i, j = 1 \dots N$ . Теорема доказана.

Из теоремы 3.2.1 вытекает следующее очевидное.

**Следствие.** Пусть в векторе  $z$  имеется  $n_1$  ненулевых компонент (ясно, что  $n_1 \leq n$ ). Тогда каким бы ни было  $N \geq n_1$ , решение задачи БП может быть реализовано не более чем  $n_1$  взаимно ортогональными векторами  $x_i$ .

Рассмотрим теперь последовательность задач БП вида

$$J_N = \sum_{i=1}^{N-1} x_i^T A \sum_{j=i+1}^N x_j \rightarrow \max_{x_i, z}, \quad (3.2.1)$$

$$\sum_{i=1}^N x_i = z, \quad x_i \geq 0, \quad i = 1 \dots N, \quad N \geq 2, \quad (3.2.2)$$

$$z \in Z, \quad (3.2.3)$$

где  $x_i \in R^n, i = 1 \dots n, Z$  — компакт,  $Z \subset R^n, A$  — кососимметричная матрица  $n \times n$ .

Из теоремы 1 и ее следствия вытекает, что задачу (3.2.1)–(3.2.3) имеет смысл рассматривать лишь при  $N \leq n$ .

Выясним, как ведет себя  $\max J_n$  при различных значениях  $N$ .

**Лемма 3.2.2.**  $\max J_N \geq \max J_{N-1}$ .

*Доказательство.* Как уже указывалось, при  $N \geq n \max J_N = \max J_{N-1}$ . Из теоремы 3.2.1 следует, что при  $N-1 \leq n$  среди всех векторов  $x_i, i = 1 \dots N$  всегда найдется вектор  $x_{i_0}$ , у которого, вообще говоря, более чем одна ненулевая компонента. Тогда можно разбить вектор  $x_{i_0}$  на два вектора  $x_{i_1}$  и  $x_{i_2}$  таким образом, что  $x_{i_0} = x_{i_1} + x_{i_2}, x_{i_1} \geq 0, x_{i_2} \geq 0, \langle x_{i_1}, x_{i_2} \rangle = 0$ .

Выделим в  $J_{N-1}$  член, содержащий  $i_0$  :

$$J_{N-1,i_0} = \sum_{i=1}^{i_0-1} x_i^T A x_{i_0} + x_{i_0}^T A \sum_{i=i_0+1}^N x_i .$$

С учетом того, что вместо  $x_{i_0}$  появилось два вектора  $x_{i_1}$  и  $x_{i_2}$ , имеем:

$$J_{N|i_2} = \sum_{i=1}^{i_1-1} x_i^T A (x_{i_1} + x_{i_2}) + x_{i_1}^T A x_{i_2} + (x_{i_1} + x_{i_2})^T A \sum_{i=i_0+1}^N x_i .$$

Из того, что  $A$  — кососимметричная следует, что  $x_{i_1}^T A x_{i_2} = -x_{i_1}^T A x_{i_2}$ . Поэтому векторы  $x_{i_1}$  и  $x_{i_2}$  можно всегда перенумеровать так, чтобы было  $x_{i_1}^T A x_{i_2} \geq 0$ . Таким образом, какими бы ни были  $J_{N-1}$  и  $z$ , всегда существует такой переход к  $J_N$ , что  $J_N \geq J_{N-1}$  и, следовательно,  $\max J_N \geq \max J_{N-1}$ . Лемма доказана.

Решение задачи (1)–(3) при  $N = k < n$  будем называть  $k$ -оптимальным.

**Лемма 3.2.3.**  $k$ -оптимальное решение задачи (3.2.1)–(3.2.3) является стационарным для задач  $N > k$ .

*Доказательство.* Если  $z, x_i, i = 1 \dots k$  — оптимальное решение задачи (3.2.1)–(3.2.3) при  $N = k$ , то, очевидно, для  $x_i, i = 1 \dots k$ , с необходимостью выполняется

$$(\text{grad } L) D(x_i) = 0, i = 1 \dots k,$$

где  $L = J_k + \left\langle \lambda, z - \sum_{i=1}^k x_i \right\rangle$ ,  $D(x_i)$  — диагональная матрица  $n \times n$  с диагональю, составленной из компонент вектора  $x_i$  (в силу формы задачи (3.2.1)–(3.2.3) вектор  $z$  можно считать параметром). Итак, система уравнений, которой нетривиально удовлетворяют  $\lambda$  и  $x_i, i = 1 \dots k$ , имеет вид:

$$\left( A \sum_{j=i+1}^k x_j - A \sum_{j=1}^{i-1} x_j - \lambda \right) D(x_i) = 0, i = 1 \dots k, \quad (3.2.4)$$

$$\sum_{i=1}^k x_i = z. \quad (3.2.5)$$

Если в задаче (3.2.1)–(3.2.3)  $N > k$ , то набор векторов  $\lambda, z, x_i, i = 1 \dots k$  дополненный векторами  $x_{k+1} = x_{k+2} = \dots = x_N = 0$ , также является нетривиальным, удовлетворяет уравнениям (3.2.4) и уравнению  $\sum_{i=1}^N x_i = z$  и, следовательно, реализует ее стационарное решение. Лемма доказана.

Установленная в приведенных выше утверждениях структура решения задачи (3.2.1)–(3.2.3) может быть интерпретирована следующим образом.

В произведениях  $x_i^T A x_j$  ненулевые элементы векторов  $x_i$  и  $x_j$  выделяют матрицу  $A_{ij}$ , т. е.  $x_i^T A x_j = x_i^T A_{ij} x_j$ . Тогда имеем:

$$J = \sum_{i=1}^{n-1} x_i^T A \sum_{j=i+1}^n x_j = \sum_{i=1}^{n-1} x_i^T \sum_{j=i+1}^n A_{ij} x_j .$$

Кроме того,  $x_i^T A x_j = \frac{1}{2} (x_i^T A_{ij} x_j + x_j^T A_{ji}^T x_i)$ . В результате несложных преобразований легко убедиться, что

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i^T \bar{A} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{2} z^T \bar{A} z , \tag{3.2.6}$$

где  $\bar{A}$  — симметричная матрица, составленная из блоков  $A_{ij}$  и  $\bar{A}_{ji} = A_{ij}^T$ . Ясно, что все  $A_{ii} = 0$ .

Таким образом, матрица  $\bar{A}$  получается из  $A$  следующим преобразованием. Пусть  $I$  — множество индексов, нумерующих строки и, соответственно, столбцы матрицы  $A$ . Разобьем  $I$  на  $k$  подмножеств  $I_i, i = 1 \dots k, k \leq n$ . В каждом  $I_i$  индексы упорядочены в порядке возрастания. Возьмем столбцы, соответствующие какому-либо набору индексов  $I_i$ , и заменим их строками с теми же номерами, а элементы, оказавшиеся на пересечении, обнулим. Затем сделаем то же самое по отношению к следующему набору  $I_i$ . И так далее  $k$  раз. В результате получим симметричную матрицу  $\bar{A}$ . Очевидно, что вид  $\bar{A}$  зависит от порядка, в котором перебираются подмножества  $I_i$ . Будем называть переход от  $A$  к  $\bar{A}$  процедурой симметризации матрицы  $A$ .

Таким образом, нахождение  $k$ -оптимального решения задачи (3.2.1)–(3.2.3) (а при  $k = n$  — оптимального) сводится к задаче: найти  $\bar{A}$  и  $z$  такие, чтобы обеспечить  $\max \frac{1}{2} z^T \bar{A} z$ .

Выясним теперь, какими должны быть наборы  $I_i$ ,  $i=1\text{K}k$ , и в каком порядке их следует расположить, чтобы соответствующая симметризованная матрица  $\bar{A}$  обеспечивала  $k$ -оптимальное решение задачи (3.2.1)–(3.2.3).

Пусть имеется последовательность  $I_i$ ,  $i=1\text{K}k$ . Рассмотрим  $I_\mu$  и  $I_\nu$ ,  $\mu < \nu$ . Переместим индекс с номером  $\beta \in I_\nu$  в набор  $I_\mu$ . В наборе  $I_\mu$  образовался лишний элемент. Переместим его (но не элемент  $\beta$ ) в  $I_{\mu+1}$ . Соответственно лишний элемент из  $I_{\mu+1}$  переместим в  $I_{\mu+2}$  и т. д. вплоть до  $I_\nu$ . Вычислим теперь приращение  $\Delta J$  целевой функции задачи (3.2.1)–(3.2.3). Обозначим через  $x_\beta$  вектор, имеющий единственную ненулевую координату с номером  $\beta$ .

Слагаемое в целевой функции, содержащее  $x_\beta$ , до перестановки имело вид:

$$J_\beta = x_\beta A \left( \sum_{j=\nu+1}^n x_j - \sum_{j=1}^{\nu-1} x_j \right)$$

( $x_\beta$  — часть вектора  $x_\nu$ ).

После перестановки  $x_\beta$  войдет в слагаемое

$$J_\beta^1 = x_\beta A \left( \sum_{j=\mu+1}^n x_j - \sum_{j=1}^{\mu-1} x_j \right).$$

Очевидно, что суммы  $\sum_{j=\nu+1}^n x_j$ ,  $\sum_{j=1}^{\nu-1} x_j$ ,  $\sum_{j=\mu+1}^n x_j$  не зависят от перемещений элементов в наборах  $I_i$ ,  $i=1\text{K}k$ . Поэтому

$$\Delta J = J_\beta^1 - J_\beta = 2x_\beta A \sum_{j=\mu+1}^{\nu-1} x_j = 2 \sum_{j=\mu+1}^{\nu-1} x_\beta A_{\beta j} x_j = 2 \sum_{j=\mu+1}^{\nu-1} x_\beta a_{\beta j} z_j, \quad (3.2.7)$$

где  $a_{\beta j}$  — элементы матрицы  $A$ , а  $z_j$  — компоненты вектора  $z$ .

Прделавав то же самое для  $\mu > \nu$ , получим окончательно:

$$\Delta J = 2x_\beta \sum_{j=\mu+1}^{\nu-1} a_{\beta j} z_j \operatorname{sgn}(\nu-1-\mu-1).$$

Подбирая для каждого  $I_\mu, \mu = 1 \text{K} n$  индекс  $\beta$  так, чтобы было  $\Delta J > 0$ , можно за конечное число шагов получить  $k$ -оптимальное решение задачи (3.2.1)–(3.2.3).

Приведенные рассуждения являются доказательством следующего теоремы.

**Теорема 3.2.2.** Если  $z^T = (z_1, z_2, \text{K}, z_n)$  — оптимальное решение задачи (3.2.1)–(3.2.3), то с необходимостью должно выполняться

$$\sum_{j=\mu+1}^{v-1} a_{\beta j} z_j \operatorname{sgn}(v-1-\mu-1) \text{ для любых } \beta = 1 \text{K} N \text{ и } \mu = 1 \text{K} k.$$

Теорема 3.2.2 имеет следующее очевидное

**Следствие 1.** Пусть перестановка  $[i_1, i_2, \text{K}, i_n]$  соответствует оптимальной симметризованной матрице  $\bar{A}$ . Разобьем ее на  $k$  частей следующим образом:

$$I_1 = [i_1, i_2, \text{K}, i_{\eta_1}], I_2 = [i_{\eta_1+1}, i_{\eta_1+2}, \text{K}, i_{\eta_2}], \dots, I_k = [i_{\eta_{k-1}+1}, i_{\eta_{k-1}+2}, \text{K}, i_n].$$

Тогда перестановки  $[I_1, I_2, \text{K}, I_k]$  обеспечивает  $k$ -оптимальное решение задачи (1)–(3).

**Замечание.** Очевидно, что  $k$ -оптимальное решение инвариантно по отношению к перестановке индексов внутри каждого  $I_k$ .

**Следствие 2.** Если строка  $a$  матрицы  $A$  представима в виде  $a = \lambda_1 a_i + \lambda_2 a_{i+1}, \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ , то ее индекс следует расположить между  $i$  и  $i+1$ .

Пусть в оптимальном решении набору  $I_j$  соответствуют ненулевые компоненты вектора  $z$ . Обозначим вектор, составленный из них, через  $z_{I_j}$ . Через  $\bar{A}_{I_j}$  обозначим блок симметризованной матрицы  $\bar{A}$ , стоящей на пересечении строк и столбцов с номерами из  $I_j$ . Очевидно, что в симметризованной матрице для  $k$ -оптимального решения на том же самом месте всегда стоит нулевой блок. Поэтому имеет место следующая очевидная

**Лемма 3.2.4.**  $\max J_n - \max J_k \geq \frac{1}{2} z_{I_j}^T A_{I_j} z_{I_j}$ , где  $\max J_n$  — значение целевой функции оптимального решения, а  $J_k$  —  $k$ -оптимального.

**Лемма 3.2.5.** Пусть кососимметрическая матрица  $A$  — неполного ранга. Тогда  $A = R^T BR$ , где  $B$  — кососимметрическая матрица полного ранга, а многогранник  $M(R)$ , натянутый на столбцы матрицы  $R$ , содержит нуль в качестве внутренней точки.

*Доказательство.* Пусть  $0 \notin M(R)$ . Пусть  $a \in \text{int } M(R)$ . Тогда  $0 \in M(R) - a = M(R - \{a\})$ , где  $\{a\}$  — матрица такой же размерности, что и  $R$ , каждый столбец которой равен  $a$ . Окончательно имеем

$$A = (R - \{a\})^* B (R - \{a\}) = R^T BR - \{a\}^T BR - R^T B \{a\} + \{a\}^T B \{a\}.$$

Так как  $\{a\}^T BR = -R^T B \{a\}$ ,  $\{a\}^T B \{a\} = 0$ . Поэтому можно считать, что  $0 \in M(R)$ . Лемма доказана.

Пусть  $R = \text{rank } A$ ,  $R \in R^{r \times N}$ ,  $r < N$ . Из того, что  $\text{int } M(R) \supset 0$  следует, что  $\exists \lambda > 0$  такое, что  $R\lambda = 0$ . Из рассмотрения задачи линейного программирования  $Z_0 + \langle Z, 1 \rangle \rightarrow \max$ ,  $R\lambda + Z = 0$ ,  $\lambda \geq 0$ ,  $\langle \lambda, 1 \rangle + Z_0 = 1$  и того, что  $R$  — матрица полного ранга следует, что существует  $R_b$  и  $\lambda_b > 0$  такие, что  $R_b \lambda_b$ ,  $R_b$  — матрица  $r \times (r+1)$ ,  $M(R_b)$  — тетраэдр в пространстве  $R^r$ . Так как  $\text{cone } M(R_b)$  (коническая оболочка) — все пространство  $R^r$ , то для любой вершины  $R_i \in M(R)$  имеет место  $R_i = R_b \lambda$ ,  $\langle \lambda, 1 \rangle = \bar{\lambda} > 1$ ,  $\lambda \geq 0$ . Отсюда в свою очередь следует

**Лемма 3.2.6.** В матрице  $A$  всегда можно выделить  $r+1$  строку (обозначим их через  $a_1, a_2, \dots, a_{r+1}$ ),  $r$  из которых линейно независимы, так что любая строка может быть представлена в виде строго выпуклой комбинации  $a = \sum_{i=1}^{r+1} \lambda_i a_i$ ,  $\sum_{i=1}^{r+1} \lambda_i > 1$ ,  $\lambda_i \geq 0$ .

Рассмотрим теперь задачу БП:

$$J = \sum_{i=1}^{N-1} x_i^T A \sum_{j=i+1}^N x_j \rightarrow \max, \quad (3.2.8)$$

$$R \sum_{i=1}^N x_i = Z, \quad x_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^N x_i = x, \quad \langle x, 1 \rangle = 1, \quad (3.2.9)$$

где  $A = R^T PR$ ,  $\text{rank } R = \text{rank } P = n$ .

Рассмотрим все  $R_\alpha \in R^{n \times (n+1)}$ , удовлетворяющие лемме 3.2.5 и соответствующие им задачи:

$$J_\alpha = \sum_{i=1}^n x_i^T R_\alpha^T P R_\alpha \sum_{j=i+1}^{n+1} x_j \rightarrow \max,$$

$$R_\alpha x = Z, \quad \langle x, 1 \rangle = 1, \quad x_i \geq 0.$$

Среди всех оптимальных значений  $J_\alpha$  выберем максимальное. Соответствующую матрицу  $R_\alpha$  будем обозначать через  $R_0$ . Ясно, что тетраэдр  $M(R_0)$  вписан в  $M(R)$ . (Все вершины  $M(R_0)$  являются вершинами  $M(R)$ .)

Пусть нумерация  $1, 2, \dots, n+1$  столбцов матрицы  $R_0$  соответствует оптимальной перестановке. Пусть  $\text{cone}(R_{0i}, R_{0i+1})$  — конус, натянутый на векторы  $R_{0i}, R_{0i+1}$ . Рассмотрим сечения  $C_{i+1} = M(R) \mid \text{cone}(R_{0i}, R_{0i+1})$ . Совокупность крайних точек сечения обозначим через  $\{R^{ii+1}\}$ . Ясно, что номера этих точек упорядочены от  $i$  до  $i+1$ , так как граница сечения — плоская ломаная.

**Теорема 3.2.3.** Последовательность вершин

$$R_{0i} \{R^{12}\} \quad R_{02} \{R^{23}\} \quad R_{03} \dots R_{0n} \{R^{nm+1}\} \quad R_{0n+1}$$

реализует оптимальное решение задачи (3.2.8)–(3.2.9).

*Доказательство.* Заметим, что  $a_i = R_{0i}P$  и  $a_{i+1} = R_{0i+1}P$  являются соответственно  $i$  и  $i+1$  строками матрицы  $A$ . Пусть  $R' \in \{R^{ii+1}\}$  является вершиной  $M(R)$ . Тогда, очевидно, имеет место  $R' = \lambda_1 R_{0i} + \lambda_2 R_{0i+1}$ ,  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_1 + \lambda_2 > 1$  и соответствующая строка  $a'$  матрицы  $A$  в силу следствия 2 теоремы 3.2.2 должна быть помещена между  $a_i$  и  $a_{i+1}$ . Если крайняя точка сечения принадлежит ребру  $(R' R^2)$  многогранника  $M(R)$ , то

$$\mu_1 R' + \mu_2 R^2 = \lambda_1 R_{0i} + \lambda_2 R_{0i+1}, \quad \mu_1 + \mu_2 = 1, \quad \lambda_1 + \lambda_2 > 1, \quad \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 > 0.$$

$$P_2(R', C_{i+1}) = P_2(R^2, C_{i+1}) \in C_{i+1}.$$

В самом деле, если проекция  $R^1$  (или  $R^2$ ) не принадлежит  $C_{ii+1}$ , то

$$P_r(R', C_{ii+1}) = \bar{\lambda}_1 R_{0i} + \bar{\lambda}_2 R_{0i+1} \quad \text{и} \quad \bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 > \lambda_1 + \lambda_2 > 1.$$

Рассмотрим приращение целевой функции, возникающее за счет прибавления строки  $R'P$ , имея в виду, что, вообще говоря,  $R^1 = \sum_{i=1}^{n+1} \nu_i R_{0i}$ ,  $\nu_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^{n+1} \nu_i > 1$ . Обозначим  $(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{n+1})^T = \nu$ .

$$\begin{aligned} J + \Delta J &= \sum_{k=1}^n x_k R_0^T P R_0 \sum_{j=i+1}^{n+1} x_j + x' R' P R_0 \left( \sum_{j=i+1}^{n+1} x_j - \sum_{j=1}^i x_j \right) = \\ &= \sum_{k=1}^n x_k R_0^T P R_0 \sum_{j=i+1}^{n+1} x_j + \bar{x}' R_0^T P R_0 \left( \sum_{j=i+1}^{n+1} x_j - \sum_{j=1}^i x_j \right). \end{aligned}$$

$$\text{Нетрудно показать, что } \Delta J = \bar{x}' \nu R_0^T P R_0 \left( \sum_{j=i+1}^{n+1} x_j - \sum_{j=1}^i x_j \right) > 0.$$

Очевидно также, что тогда  $P_r(R_{0i}, C_{i-1}) \in C'_{i-1}$ , где

$$C'_{i-1} = M(R) \mid \text{cone}(R_{0i-1}, R').$$

Откуда сразу следует, что если  $R_{0i}$  заменить на  $R'$ , то целевая функция получит положительное приращение и, следовательно,  $M(R_0)$  не является максимальным тетраэдром.

Рассмотрим теперь любую точку  $R'$  многогранника  $M(R)$ . Если найдется  $C_{ii+1}$  такое, что  $P_r(R^1, C_{ii+1}) \notin C_{ii+1}$ , то рассмотрение аналогично предыдущему. Таким образом, если  $M(R_0)$  — максимальный, то из  $R' \in M(R)$  следует, что  $R^1 \in \bigcup_{i=1} C_{ii+1}$ .

В заключение параграфа покажем, что переход от рассмотренной задачи БП к задаче оптимального управления достаточно прост в случае, когда  $U$  — многогранник.

$$J[U] = \int_0^1 \langle P x(t), u(t) \rangle dt \rightarrow \max, \quad (3.2.10)$$

$$\mathfrak{K}(t) = u(t), \quad x(0) = 0, \quad u(t) \in U \quad (3.2.11)$$

— многогранник,  $x(t) : [0, 1] \rightarrow R^n$ .  $P$  — кососимметрическая матрица,  $x(1) \in X$  — компакт.

Так как  $x(1) = \int_0^1 u(t) dt = U$ , то для существования решения необходимо и достаточно, чтобы  $U \perp X \neq 0$ .

Пусть имеется последовательность  $\{W^N(t)\}$  простых (ступенчатых) функций ( $N$  — число значений, которые эта функция принимает), сходящаяся при  $N \rightarrow \infty$  к измеримой ограниченной функции  $W^*(t)$ , доставляющей минимум задаче (3.2.10)–(3.2.11). Тогда:

$$W^N(t) \rightarrow W^*(t),$$

$$y^N(t) = \int_0^t W_i^N(\tau) d\tau \rightarrow y^*(t) = \int_0^t W^*(\tau) d\tau,$$

$$J[y^N] \rightarrow J[y^*].$$

При каждом  $N$  возникает разностная задача оптимизации, свойства решения которой описаны в теоремах 3.2.1–3.2.3.

Таким образом, начиная с  $N \geq p$ , оптимальная траектория  $y_N(t)$  аппроксимирующей разностной задачи, соответствующая  $W^N(t)$ , не зависит от  $N$  и  $J[y^{N+L}] - J[y^N \equiv 0]$  при любом  $L \geq 0$ , откуда сразу следует, что оптимальное решение  $W^*(t)$  задачи (3.2.10)–(3.2.11) совпадает при  $N \geq p$  с  $W^N(t)$ .

Так как переход от редуцированной задачи к исходной в силу соотношения (3.1.4) тривиален, то можно считать, что доказана следующая теорема, устанавливающая свойства решения задачи (3.2.8)–(3.2.9).

**Теорема 3.2.4.** Оптимальное решение  $u^*(t)$ ,  $x^*(t)$  задачи (3.2.10)–(3.2.11) существует и обладает свойствами:

1. Траектория  $x^*(t)$  состоит не более чем из  $p$  режимов, где  $p$  — число вершин многогранника  $U$ .
2. Каждому режиму соответствует отрезок  $[t_i, t_{i+1}]$ , в течение которого управление  $u^*(t)$ ,  $t \in [t_i, t_{i+1}]$  либо является вершиной многогранника  $U$ , либо принадлежит его грани или ребру, либо может быть вообще любой его точкой. Моменты  $t_i$  называются моментами переключения и их не более  $p$ , считая момент включения  $t_0$ . На траектории не может быть двух и более режимов, характеризующихся одинаковыми вершинами, ребрами или гранями.
3. Если управление  $u^*(t)$  при  $t \in [t_i, t_{i+1}]$  не является вершиной многогранника, то может быть реализована любая абсолютно непрерывная траектория  $x^*(t)$ , соединяющая однозначно определяемые точки  $x(t_i)$  и  $x(t_{i+1})$ , лишь бы только  $u^*(t)$  принимало свои значения на соответствующем ребре или грани, или во всем многограннике.

Теорема 3.2.4 может иметь и другую, более компактную формулировку: решение задачи может быть реализовано не более чем  $P$  переключениями, где  $P$  — число вершин многогранника  $U$ .

### § 3. Максимизация суммы наддиагональных элементов матриц

В предыдущем параграфе было показано, что решение задачи (3.1.1)–(3.1.2) всегда можно представить в виде  $u(t) = e(i)$ , при  $t \in (t_{i-1}, t_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ ,

$$e(i) = \begin{pmatrix} 0 \\ \text{М} \\ 1 \\ \text{М} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ — } k\text{-я компонента, } \langle e(i), e(j) \rangle = 0,$$

где  $e(i)$  переменная следующей задачи целочисленного программирования: найти целочисленную функцию  $e(i)$ , доставляющую минимум функционалу

$$J[e] = \sum_{i=1}^{N-1} \left\langle \tau_i e(i), A \sum_{j=i+1}^N \tau_j e(j) \right\rangle \rightarrow \min, \quad (3.3.1)$$

при ограничениях

$$R \sum_{i=1}^N \tau_i e(i) = 0, \quad \sum_{i=1}^N \tau_i = 1, \quad \tau_i \geq 0. \quad (3.3.2)$$

Если  $R$  — матрица  $N \times N$  и имеет полный ранг, то набор  $\{\tau_i\}$  определяется из системы уравнений (3.3.2). Введем матрицу  $\bar{A} = \{\tau_i \tau_j a_{ij}\}_{N \times N}$ .

Тогда задача (3.3.1)–(3.3.2) переходит в следующую:

$$J[e] = \sum_{i=1}^{N-1} \left\langle e(i), \bar{A} \sum_{j=i+1}^N \tau_j e(j) \right\rangle \rightarrow \min_e. \quad (3.3.3)$$

А задача (3.3.3) есть не что иное, как задача максимизации суммы наддиагональных элементов кососимметрической матрицы  $N \times N$  путем перестановки ее строк и соответствующих этим строкам столбцов. Нетрудно убедиться, что при произвольной матрице  $R$  основным элементом алгоритма решения задачи (3.3.1)–(3.3.2) будет задача (3.3.3).

Рассмотрим задачу максимизации суммы наддиагональных элементов вещественной кососимметрической матрицы  $A$   $n \times n$  при помощи перестановок ее строк и соответствующих этим строкам столбцов, т. е. если строки  $i$  и  $j$  меняются местами, то меняются местами также  $i$ -й и  $j$ -й столбцы. Такие перестановки, очевидно, оставляют преобразуемую матрицу кососимметричной, и конечная матрица зависит только от конечной перестановки строк (и столбцов) и не зависит от способа выполнения этой перестановки.

Введем обозначения:

$a_{ij}$  — элемент  $i$ -й строки  $j$ -го столбца матрицы  $A$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ;

$h_{ijk} := \sum_{s=j}^k a_{is}$ ,  $i, j, k = 1, 2, \dots, n$ ,  $k \geq j$  — сумма всех элементов от  $j$  до  $k$  в

$i$ -й строке;

$h_i := h_{iin}$  — сумма всех задиагональных элементов строки  $i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ;

$v_{jlm} := \sum_{s=l}^m a_{sj}$ ,  $j, l, m = 1, 2, \dots, n$ ,  $l \geq m$  — сумма всех элементов от  $l$  до  $m$  в  $j$ -м столбце;

$v_j := v_{jj1}$  — сумма всех над наддиагональных элементов столбца  $j$ ,  
 $j = 1, 2, \dots, n$ ;

$$\gamma_{ij} := \begin{cases} 0, & i < j, \\ a_{ij}, & i > j; \end{cases}$$

$(i_1, i_2, \dots, i_n)$  — конечная перестановка строк (и столбцов) матрицы, т. е. строка  $i_1$  переставлена на первое место  $i_2$  — на второе, и т. д.;

$m(i_1, i_2, \dots, i_p)$ ,  $p \leq n$  — последовательность перестановок строк (и столбцов)  $i_1, i_2, \dots, i_p$  на место первой строки (столбца) со сдвигом остальных строк вниз (! Нумерация строк задается исходной матрицей). Очевидно, что  $m(\dots)$  задает некоторую перестановку, ниже будет показано, что любая перестановка может быть записана в виде  $m(\dots)$  при  $p = n$ .

Отметим также следующие очевидные свойства:

$$a_{ij} = -a_{ji}, \quad a_{ii} = 0, \quad h_{ijk} = -v_{ikj}, \quad h_n = 0, \quad v_1 = 0.$$

### Условие локального экстремума

Данное условие было получено в предыдущем параграфе, а в выше введенных обозначениях его можно сформулировать так:

**Лемма 1.** *Для того, чтобы перестановка  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$  была оптимальной необходимо, чтобы*

$$\text{а) } \forall i = 1, 2, \dots, n-1, \quad \forall j = i+1, i+2, \dots, n : h_{ii+1j} \geq 0, \quad (3.3.4)$$

$$\text{б) } \forall j = 2, 3, \dots, n, \quad \forall i = j-1, j-2, \dots, 1 : v_{jj-i} \geq 0. \quad (3.3.5)$$

*Доказательство.* Докажем только пункт (3.3.4) ((3.3.5) доказывается совершенно аналогично). Пусть условие нарушено для некоторых  $i = i_k$  и  $j = j_m$ , т. е.  $h_{ii+1j} < 0$ . Произведем следующую перестановку:

$$\begin{aligned} & (i_1, i_2, \dots, i_k, i_{k+1}, \dots, i_{m-1}, i_m, i_{m+1}, \dots, i_n) \rightarrow \\ & \rightarrow (i_1, i_2, \dots, i_{k-1}, i_{k+1}, i_{k+2}, \dots, i_{m-1}, i_m, i_k, i_{m+1}, \dots, i_n). \end{aligned}$$

При этом в силу антисимметричности матрицы  $A$  сумма наддиагональных элементов возрастает на  $-2h_{ii+1j}$ , что противоречит оптимальности исходной перестановки.

Чтобы показать, что данное условие не является достаточным, приведем следующий пример:

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & 2 & -7 \\ -6 & 0 & 3 & -2 \\ -2 & -3 & 0 & 10 \\ 7 & 2 & -10 & 0 \end{pmatrix}.$$

Данная матрица удовлетворяет условиям локального экстремума, однако перестановкой (3, 4, 1, 2) она может быть приведена к матрице

$$\begin{pmatrix} 0 & 10 & -2 & -3 \\ -10 & 0 & 7 & 2 \\ 2 & -7 & 0 & 6 \\ 3 & -2 & -6 & 0 \end{pmatrix},$$

у которой сумма наддиагональных элементов на 8 больше.

### **Дополнительные необходимые условия глобального экстремума. Достаточные условия глобального экстремума.**

В этом пункте мы будем предполагать, что рассматриваемая перестановка является локально оптимальной, и будем считать, что это и есть исходное состояние матрицы. Это позволяет получить некоторые необходимые и достаточные условия оптимальности в более простом виде, чем в общем случае. Все дальнейшие рассуждения будут опираться на следующую лемму:

**Лемма 2.** *Любая перестановка может быть представлена как последовательность перестановок строк исходной матрицы на место первой строки со сдвигом остальных строк вниз, т. е. для любой перестановки  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$  существует эквивалентная ей перестановка  $m(j_1, j_2, \dots, j_n)$ .*

*Доказательство.* Проведем доказательство явным выписыванием  $m(\dots) : (i_1, i_2, \dots, i_n) \Leftrightarrow m(i_n, i_{n-1}, \dots, i_1)$ . Действительно, при таком способе выполнения перестановок строка  $i_k$  будет переставлена на первое место на  $n-k+1$ -м шаге, соответственно после нее на первое место будет поставлена  $n-(n-k+1) = k-1$  строка, т. е. она окажется на  $k$ -м месте.

Теперь рассмотрим изменение максимизируемой суммы при перестановке  $m(i_1, i_2, \dots, i_p)$ . Рассмотрим пару строк  $i_k$  и  $i_m$ ,  $m > k$ . Возможны два случая:

а)  $i_k < i_m$ , т. е. строка с меньшим номером  $i_k$  переставляется первой, и эта перестановка не оказывает никакого влияния на сумму задиагональных элементов строки  $i_m$  (см. рис. 3).

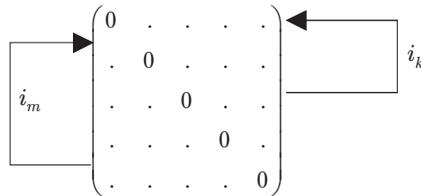


Рис. 3

Соответственно, приращение максимизируемой суммы равно:

$$\Delta = -2v_{i_k} - 2v_{i_m}.$$

б)  $i_k < i_m$ , т. е. строка с большим номером  $i_k$  переставляется первой. В этом случае эта перестановка изменяет сумму задиагональных элементов строки  $i_m$  на  $-\alpha_{i_m i_k}$  (соответственно для столбца  $i_m$  сумма наддиагональных элементов возрастает на  $\alpha_{i_k i_m}$ ).

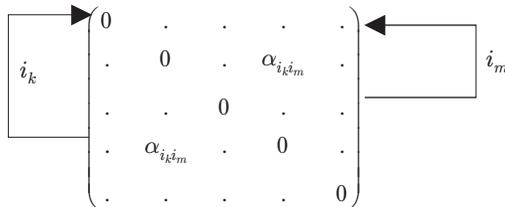


Рис. 4

Поэтому,  $\Delta = -2v_{i_k} - 2v_{i_m} - 2\alpha_{i_k i_m}$ .

Эти оба варианта могут быть записаны так:  $\Delta = -2v_{i_k} - 2v_{i_m} - 2\gamma_{i_k i_m}$ .

При этом формула полного приращения может быть записана так:

$$\Delta(i_1, i_2, \dots, i_p) = -2 \sum_{k=1}^p V_{ik} - 2 \sum_{k=1}^{p-1} \sum_{m=k+1}^p \gamma_{i_k i_m}. \quad (3.3.6)$$

Теперь можно сформулировать:

**Лемма 3.** *Для того, чтобы матрица была оптимальной, необходимо и достаточно, чтобы  $\forall t(i_1, i_2, \dots, i_p), p \leq n : \Delta(i_1, i_2, \dots, i_p) \leq 0$ .*

*Доказательство.* Необходимость очевидна, а достаточность следует из Леммы 2, так как данное условие охватывает все возможные перестановки.

К сожалению, задача проверки данного условия почти ничем не легче, чем исходная, однако из (3.3.6) можно получить несколько более простых необходимых условий, которые могут быть использованы при построении переборного алгоритма:

1)  $\forall k :$

$$-\sum_{m=1}^{k-1} \gamma_{i_m i_k} - \sum_{m=k+1}^p \gamma_{i_k i_m} > V_{ik}, \quad (3.3.7)$$

в противном случае

$$\Delta(i_1, i_2, \dots, i_{k-1}, i_k, i_{k+1}, \dots, i_p) < \Delta(i_1, i_2, \dots, i_{k-1}, i_{k+1}, \dots, i_p),$$

т. е. данная перестановка может быть отброшена.

2)  $\exists k :$

$$i_k > i_{k+1}, \quad \alpha_{i_k i_{k+1}} \geq 0, \quad (3.3.8)$$

иначе

$$\Delta(i_1, i_2, \dots, i_{k-1}, i_k, i_{k+1}, i_{k+2}, \dots, i_p) < \Delta(i_1, i_2, \dots, i_{k-1}, i_{k+1}, i_k, i_{k+2}, \dots, i_p),$$

т. е. выгодно поменять порядок перестановки строк  $i_k$  и  $i_{k+1}$  на место первой строки.

3)  $\exists k :$

$$i_1 > i_k, \quad (3.3.9)$$

что является простым следствием (3.3.7).

**Замечание.** *При осуществлении перебора вариантов достаточно рассматривать  $t(\dots)$  с  $p = n$ . Введение в рассмотрение  $p < n$  целесообразно ввиду более легкого обоснования (3.3.7), (3.3.9).*

#### § 4. Гамильтоновы циклы в системе, задаваемой многогранником

Рассмотрим изопериметрическую задачу вида

$$J[u] = \frac{1}{2} \int_0^1 \langle Px(t), u(t) \rangle dt \rightarrow \max, \quad (3.4.1)$$

$$\mathfrak{K}(t) = u(t), \quad x(0) = x(1) = 0, \quad (3.4.2)$$

$u(t) \in U$ ,  $0 \in \text{int} U$ .  $U$  — выпуклый компакт.

$x(1) : [0, 1] \rightarrow R^n$ .  $P$  — кососимметрическая матрица.

Редуцируем эту задачу к задаче о числе циклов в гамильтоновой системе. Эта редукция была проделана А. А. Милютиним и А. В. Дмитриуком. Аналогичная идея содержалась в работе [84].

Выпишем функцию Понтрягина:

$$H = \frac{1}{2} \langle Px(t), u(t) \rangle + \langle \psi(t), u(t) \rangle.$$

Тогда  $\psi'(1) = -\frac{\partial H}{\partial x} = -Pu(t)$ ,

$$\psi(t) = c - \frac{1}{2} Px(t).$$

В результате имеем:

$$H = \langle Px(t) + c, u \rangle \rightarrow \max, \quad u \in U.$$

Обозначим  $Px(t) + c = \eta$ . Тогда  $h(\eta) = \max_{u \in U} \langle \eta, u \rangle$  (преобразование Лежандра),  $\langle \eta, u^* \rangle = h(\eta)$ , отсюда получаем

$$u^* \in \partial h(\eta). \quad \mathfrak{K} = (Px + c)' = P\mathfrak{K} = Pu$$

и окончательно имеем  $\mathfrak{K} \in P\partial h(\eta)$ .

Число несовмещающихся циклов в гамильтоновой системе  $\mathfrak{K} \in P\partial h(\eta)$  равно числу стационарных решений в исходной изопериметрической задаче.

Пусть в задаче (3.4.1)–(3.4.2)  $U$  —  $n$ -мерный тетраэдр  $M(R)$ . Вершины тетраэдра — столбцы матрицы  $R \in R^{n \times (n+1)}$ .

$$u = R w, \quad \langle w, 1 \rangle = 1, \quad x(t) = R y(t),$$

$$x(0) = R y(0) = 0, \quad y(0) = 0,$$

$$x(1) = R y(1) = 0, \quad \langle y(1), 1 \rangle = 1.$$

В силу теоремы 3.2.4 решение этой задачи полностью определяется решением задачи (3.2.8)–(3.2.9) и сводится к процедуре симметризации матрицы  $R^T P R$ . Рассмотрим конечномерный аналог:

$$J = \sum_{i=1}^n x_i^T R^T P R \sum_{j=i+1}^{n+1} x_j, \quad x_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{n+1} x_i = y(1),$$

$$R y(1) = 0, \quad \langle y(1), 1 \rangle = 1.$$

Тогда  $J = \sum_{i=1}^n x_i^T R^T S^T \bar{P} S R \sum_{j=i+1}^{n+1} x_j,$

$$S R y(1) = 0, \quad \langle y(1), 1 \rangle = 1.$$

Это означает, что  $\bar{R} = S R \in R^{k \times (n+1)}$ ,  $k < n$ . Следовательно, часть компонент вектора  $y(1)$  можно параметризовать. Тогда  $\bar{R} y_1(1) = -R_2 C$ ,

$$\langle y_1(1), 1 \rangle = 1 - \langle C, 1 \rangle \quad C = y_2(1), \quad \begin{pmatrix} y_1(1) \\ y_2(1) \end{pmatrix} = y(1), \quad (\bar{R}_1 \bar{R}_2) = \bar{R}.$$

И множество стационарных решений определяется  $n - k$ -мерным параметром  $C$ .

Рассмотрим теперь случай, когда  $P$  — полного ранга. Пусть установлен оптимальный обход вершин многогранника  $M(R)$ . Тогда соответствующим образом упорядочены столбцы и строки матрицы  $R^T P R$ . Отметим, что  $R^T P R y(1) = 0$ . Отметим также, что  $rank R^T P R = n$ . Отсюда следует, что в матрице  $R^T P R$  в верхней наддиагонали всегда есть ненулевой элемент. (В противном случае верхняя и нижняя наддиагонали нуле-

вые и ранг матрицы падает на 2.) Пусть номер соответствующей строки  $i$ . Образует набор из индексов  $i$  и  $i + 1$  и перейдем к  $n$ -оптимальному решению (оптимальное решение —  $n + 1$ -оптимальное).

Отметим, что переход к  $n$ -оптимальному решению эквивалентен сложению соседних строк (и соответствующих столбцов), т. е. по сути происходит понижение размерности задачи. Тогда в силу леммы 3.2.4  $\max J - \max J_n > 0$ . Тем самым получено стационарное решение, отличающееся от оптимального. Переходя от  $n - i$ -оптимального решения к  $n - i - 1$ -оптимальному по изложенной схеме, будем получать либо серии решений, если ранг новой матрицы меньше полного более чем на единицу, либо новые стационары.

Таким образом доказана **теорема 3.4.1**. В гамильтоновой системе, задаваемой тетраэдром, не менее  $n - 1$  стационарного решения.

Рассмотрим теперь случай, когда  $U$  — произвольный многогранник.

В силу теоремы 3.2.3 оптимальное решение определяется максимальным тетраэдром, вписанным в  $M(R)$ .

Стационарные решения будем формировать следующим образом. Переход к очередному стационару заключается в сложении строк  $a_i$  и  $a_{i+1}$ , и соответственно, векторов  $R_i$  и  $R_{i+1}$ . В результате получается  $\bar{a}_i = a_i + a_{i+1}$  и  $\bar{R}_i = R_i + R_{i+1}$ .

Вершины, соответствующие полученному стационарному решению, будут содержаться в сечениях  $M(R) \mid \text{cone}(R_{i-1}, R_i)$  и  $M(R) \mid \text{cone}(\bar{R}_i, R_{i+2})$ . В силу леммы 3.2.4 и в силу того, что новые вершины полностью проектируются на сечения  $C_{i-1}$  и  $C_{i+1}$ , имеем, что  $J - J_1 > 0$ . В силу теорем 3.2.2 и 3.2.3 новое решение — стационар. Таким образом, имеет место

**Теорема 3.4.2.** В гамильтоновой системе, задаваемой многогранником, не менее  $n - 1$  стационарного решения.

## § 5. Нелинейная форма в целевой функции изопериметрической задачи

Выпишем еще раз задачу оптимального управления со смешанными ограничениями, свободным правым концом и фиксированным временем:

$$J[u] = \int_0^T f(x(t), u(t)) dt \rightarrow \min, \quad \dot{x}(t) = u(t), \quad F(x(t), u(t)) = 0, \\ G(x(t), u(t)) \geq 0, \quad x_0 = x(0), \quad x(T) \in X,$$

$$x(\cdot) : [0, T] \rightarrow R^n, \quad f : R^n \times R^n \rightarrow R,$$

$$F : R^n \times R^n \rightarrow R^m, \quad m < n, \quad G : R^n \times R^n \rightarrow R^k.$$

Если  $T$  — параметр задачи, то при малых значениях  $T$  при определенных условиях (подробнее см. в § 3) поведение точечно-множественного отображения

$$U(x(t)) = \{u : F(x(t), u(t)) = 0, G(x(t), u(t)) \geq 0\}$$

полностью определяется свойствами множества  $U(x_0)$ .

Рассмотрим теперь целевую функцию задачи. Может оказаться, что интеграл  $f(x(t), u(t))$  имеет вырождение в точке  $x_0$ , т. е.  $f(x_0, u(t)) = 0$  при любых  $u(t)$ . Тогда, чтобы  $u(t)$  вошло в целевую функцию явно, заменим  $f(x(t), u(t))$  двумя первыми членами разложения в ряд Тейлора и получим

$$J[u] = \int_0^T \left\langle \frac{\partial}{\partial x} f(x, u(t)) \Big|_{x_0}, (x(t) - x_0) \right\rangle dt.$$

Обозначим вектор  $\frac{\partial}{\partial x} f(x, u(t)) \Big|_{x_0}$  через  $F_0(u(t))$  и введем обозначение:  $y(t) = x(t) - x_0$ . Конечно, всё это можно проделать, если  $T$  достаточно мало. Тогда получим следующую задачу:

$$J[u] = \int_0^T \langle y(t), F_0(u(t)) \rangle dt \rightarrow \min, \quad (3.5.1)$$

$$F(u(t)) = 0, \quad G(u(t)) \geq 0, \quad y(0) = 0, \quad y(T) \in Y. \quad (3.5.2)$$

Эта задача обладает свойством инвариантности по отношению к замене времени (основной признак локальных вариационных задач). Проверим это. Положим:

$$\tau = \frac{t}{T}, \quad x(\tau) = \frac{1}{T} y(t).$$

Тогда

$$J[u] = T^2 \int_0^1 \langle x(\tau), F_0(u(\tau)) \rangle d\tau,$$

так как  $\mathfrak{X}(\tau) = \mathfrak{Y}(t) = u(t) = u(\tau)$ .

Итак, можно выписать класс задач, который будет исследоваться далее в параграфе:

$$J[u] = \int_0^1 \langle x(t), F_0(u(t)) \rangle dt \rightarrow \min, \quad (3.5.3)$$

$$F(u(t)) = 0, \quad G(u(t)) \geq 0, \quad \dot{x}(t) = u(t), \quad x_0 = 0, \quad x(1) \in X. \quad (3.5.4)$$

Будем считать, что множество, задаваемое ограничениями (3.5.4), непусто и ограничено; обозначим его  $U$ .

Рассмотрим теперь изопериметрическую задачу вида:

$$J[u] = \int_0^1 \langle Px(t), u(t) \rangle dt \rightarrow \min, \quad (3.5.5)$$

$$\dot{x}(t) = u(t), \quad u(t) \in U, \quad x(0) = 0, \quad x(1) \in X, \quad (3.5.6)$$

где

$U$  — выпуклое непустое ограниченное замкнутое множество,  $\dim U \leq n$ ,

$x(\cdot): [0, 1] \rightarrow R^n$ ,  $P$  — кососимметричная матрица.

Обозначим  $\partial U$  — множество граничных точек  $U$ ,

$$\partial U = \{ \bar{u} : B(\bar{u}, \varepsilon) \cap \text{aff } U \neq \emptyset, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \bar{u} \in U \},$$

$B(\bar{u}, \varepsilon)$  — шар радиуса  $\varepsilon$  с центром в  $\bar{u}$ ,  $\text{aff } U$  — аффинная оболочка множества  $U$ .

Так как  $U$  — выпуклый компакт, то  $\partial U$  — компакт.

Обозначим:  $M(\varepsilon, R) = \{R_1, R_2, \dots, R_p\}$  — совокупность вершин  $p$ -вершинного многогранника  $M_p$ , обладающего свойством:  $\forall R_i \Rightarrow \exists R_j, R_j \in B(R_i, \varepsilon)$ . Будем говорить, что  $M_p$  аппроксимирует  $U$ , если  $M(\varepsilon, R) \in \partial U$ . Отметим сразу, что перечисленные свойства обеспечивают

$$M(\varepsilon, R) \rightarrow \partial U \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad p \rightarrow \infty. \quad (3.5.7)$$

В предыдущем § 2 показано, что решение задачи

$$J[u] = \int_0^1 \langle Px(t), u(t) \rangle dt \rightarrow \min, \quad (3.5.8)$$

$$\mathfrak{K}(t) = u(t), \quad x(0) = 0, \quad x(1) \in X, \quad (3.5.9)$$

$$u(t) \in M_p \quad (3.5.10)$$

существует и  $u(t)$  принимает свои значения на множестве вершин  $\bar{M}(\varepsilon, R)$ . Тем самым можно считать, что доказана следующая

**Теорема 3.5.1.** *Решение задачи (3.5.3), (3.5.4) существует.*

1. Пусть  $\text{locmin } J[u] = u^*(t) \in U^*(t), U^*(t)$  всюду плотно в  $U$ . Тогда существует  $\bar{u}^*(t)$ , принимающая все свои значения на  $\partial U$ ,  $\bar{u}^*(t) \in \partial U$ .

**Следствие.** Если  $\text{locmin } J[u] = \{ \cdot \}$ , то  $u^*(t) \in \partial U$ .

Рассмотрим теперь случай, когда в ограничении (6) множество  $U$  не выпукло. (Требования непустоты, ограниченности и замкнутости пусть остаются в силе.) Пусть  $\overline{\text{conv } U}$  — выпуклая оболочка  $U$ . Так как  $U$  — ограничено и замкнуто, то  $\overline{\text{conv } U} = \text{conv } U$ . Отметим также, что  $\text{conv } U$  — выпуклый компакт. Таким образом, получено, что при  $u(t) \in \text{conv } U$  свойства решения соответствующей задачи оптимального управления описываются теоремой 1.

Обозначим:  $\partial U = U \cap \partial \text{conv } U$  — множество граничных точек, принадлежащих собственно множеству  $U$ , а через  $\partial^0 \text{conv } U = \partial \text{conv } U \setminus \partial U$  — множество граничных точек, принадлежащих выпуклой оболочке, но не принадлежащих исходному множеству  $U$ .

Пусть теперь  $M(\varepsilon, R) \in \partial \text{conv } U$ . Рассмотрим

$$M^0(\varepsilon, R) = \{ R_i : R_i \in \partial^0 \text{conv } U \}.$$

В силу процедуры овыпукления множества  $U$  очевидно, что для любой вершины  $R_i \in M^0(\varepsilon, R)$  найдутся такие вершины  $R_\alpha$  и  $R_\beta$ ,  $R_\alpha \in \partial U$ ,  $R_\beta \in \partial U$  и такие точки  $u_1$  и  $u_2$ ,  $u_1 \in \partial U \cap B(R_\alpha, \varepsilon)$ ,  $u_2 \in \partial U \cap B(R_\beta, \varepsilon)$ , что будет иметь место  $R_i = \lambda u_1 + (1 - \lambda) u_2$ ,  $\lambda \geq 0$ . Имея в виду предель-

ный переход, ясно, что любое  $R_i \in M^0(\varepsilon, R)$  будет стремиться к выпуклой комбинации вершин из  $\partial U$ . (Отметим, что можно было бы сразу выбрать вершины аппроксимирующего многогранника на множестве  $\partial U \cap \partial^0 \text{conv } U$ .) Отсюда сразу же следует, что все точки  $u^0 \in \partial^0 \text{conv } U$  оказываются «глухими», т. е. время пребывания оптимального решения на любой из таких точек равно нулю.

Таким образом, можно считать доказанным следующее утверждение.

**Теорема 3.5.2.** *Если в задаче (3.5.5), (3.5.6) множество  $U$  — произвольное непустое ограниченное замкнутое множество, то:*

- 1) *оптимальное решение существует;*
- 2) *среди всех управлений  $u^*(t)$ , обеспечивающих данный локальный минимум, всегда будет такое  $\bar{u}^*(t)$ , что  $\bar{u}^*(t) \in \partial U$ .*

**Следствие.** Если  $\text{locmin } J[u] = \{ \cdot \}$ , то  $u^*(t) \in \partial U$ . Рассмотрим теперь задачу:

$$J[u] = \int_0^1 \langle x(t), F_0(u(t)) \rangle dt \rightarrow \min, \quad (3.5.11)$$

$$\mathfrak{A}(t) = u(t), \quad u(t) \in U \quad x(0) = 0, \quad x(1) \in X, \quad (3.5.12)$$

где  $x(\cdot): [0, 1] \rightarrow R^n$ ,  $F_0(\cdot): R^n \rightarrow R^n$ ,  $U$  — относительно непустое ограниченное замкнутое множество в  $R^n$ . Произведем замену:

$$u_2(t) = F_0(u(t)), \quad x_2(t) = \int_0^t u_2(\tau) d\tau, \quad u(t) = u_1(t).$$

Ясно, что  $x_2(0) = 0$ . Обозначим

$$x(t) = x_1(t).$$

Тогда

$$\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad \bar{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix},$$

$$\bar{u}(t) \in W = \left\{ \bar{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} : u_1 \in U, u_2 = F_0(u_1) \right\}$$

и задача (11), (12) редуцировалась к виду:

$$J[u] = \int_0^1 \langle x(t), Au(t) \rangle dt \rightarrow \min, \quad (3.5.13)$$

$$\mathfrak{K}(t) = u(t), \quad x(0) = 0, \quad x(1) \in X, \quad u(t) \in W, \quad x(\cdot): [0,1] \rightarrow R^{2n}, \quad (3.5.14)$$

$A$  — матрица  $2n \times 2n$  вида  $A = \begin{pmatrix} 0 & E \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Непустота множества  $W$  определяется свойствами множества  $U$  и отображением  $F_0(\cdot)$ .

Выделим в функционале (3.5.13) симметричную и кососимметричную части:

$$A = \frac{1}{2}A^s + \frac{1}{2}P, \quad \text{где } A^s = \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix},$$

$P$  — симплектическая кососимметричная матрица. Тогда (3.5.13) примет вид:

$$J[u] = \langle x(1), A^s x(1) \rangle + \int_0^1 \langle P x(1), u(t) \rangle dt.$$

Имея в виду произведенную редукцию задачи (3.5.11), (3.5.12), ее решение можно исследовать посредством теорем 3.5.1 и 3.5.2.

**Заключение.** Таким образом, установлено, что в рассмотренном классе задач оптимального управления решение всегда достигается на границе области допустимых управлений и, более того, решение имеет однообходный характер, т. е. в каждой точке функция управления оказывается не более одного раза.

## § 6. Об одном классе локальных вариационных задач с произвольным вырождением в целевой функции

Выпишем еще раз задачу оптимального управления, со смешанными ограничениями, линейную по управлениям,

$$J[u] = \int_0^T \langle g(x(t)), u(t) \rangle dt \rightarrow \max,$$

$$\mathfrak{K}(t) = u(t),$$

$$u(t) \in U(x(t)) = \{u : K(x(t))u(t) = L(x(t)), M(x(t))u(t) \geq N(x(t))\},$$

$$x(0) = x_0, \quad x(T) \in X,$$

где  $x(\cdot), u(\cdot), g(\cdot)$  —  $n$ -мерные вектор-функции,  $L(\cdot), N(\cdot)$  — соответственно  $k$ -,  $m$ -мерные вектор-функции,  $k(\cdot), M(\cdot)$  — матрицы соответственно  $k \times n, m \times n, k < n$ .

Как это уже обсуждалось в предыдущих параграфах, при малых значениях  $T$  переход к локальным задачам происходит за счет того многогранник  $U(x(t))$  считается возмущением многогранника  $U(x_0)$  (в дальнейшем будем обозначать его  $M$ ).

Рассмотрим теперь целевую функцию задачи. Может оказаться, что в силу ограничений типа равенств  $\langle g(x(t)), u(t) \rangle = g_1(x(t))$ . Тогда, чтобы  $u(t)$  вошло в целевую функцию явно, проведем следующее несложное преобразование:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \langle g(x(t)), u(t) \rangle dt = \\ & = \int_0^T g_1(x(t)) dt = t g_1(x(t)) \Big|_0^T - \int_0^T t \left\langle \frac{\partial}{\partial x} g_1(x(t)), u(t) \right\rangle dt = \\ & = T g_1(x_0) + \int_0^T (T-t) \left\langle \frac{\partial}{\partial x} g_1(x(t)), u(t) \right\rangle dt. \end{aligned}$$

Если, в свою очередь,

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x} g_1(x(t)), u(t) \right\rangle = g_2(x(t)),$$

то, повторяя преобразование, получим:

$$J[u] = T g_1(x_0) + T g_2(x_0) + \int_0^T (T-t)^2 \left\langle \frac{\partial}{\partial x} g_2(x(t)), u(t) \right\rangle dt.$$

Если такая ситуация повторится  $k$  раз, то опуская не варьируемые члены в целевой функции, получим:

$$J[u] = \int_0^T (T-t)^k \langle q(x(t)), u(t) \rangle dt,$$

где  $q(x(t)) = \frac{\partial}{\partial x} g_k(x(t))$ . Проблема возникает, если  $q(x_0) = 0$ . Тогда, заменяя  $q(x(t))$  двумя первыми членами разложения в ряд Тейлора, получим:

$$J[u] = \int_0^T (T-t)^k \left\langle \frac{\partial}{\partial x} q(x_0) (x(t) - x_0), u(t) \right\rangle dt.$$

Обозначим матрицу  $\frac{\partial}{\partial x} q(x_0)$  через  $A$ , введем обозначение

$$y(t) = x(t) - x_0$$

и вспомним, что  $\mathfrak{X}(t) = \mathfrak{Y}(t) = u(t) \in M$  ( $M$  — многогранник). Тогда получим следующую задачу:

$$J[u] = \int_0^T (T-t)^k \langle Ay(t), u(t) \rangle dt \rightarrow \min,$$

$$\mathfrak{X}(t) = u(t), \quad u(t) \in M, \quad y(0) = 0, \quad y(T) \in Y.$$

Эта задача обладает свойством инвариантности по отношению к замене времени (основной признак локальных вариационных задач). Проверим это. Положим  $\tau = \frac{t}{T}$ ,  $x(\tau) = \frac{1}{T} y(t)$ . Тогда:

$$J[u] = T^{k+2} \int_0^1 (1-\tau)^k \langle Ax(\tau), u(\tau) \rangle d\tau,$$

так как  $\mathfrak{X}(t) = \mathfrak{Y}(t) = u(t) = u(\tau)$ .

Итак, можно выписать класс задач, который будет исследоваться далее в параграфе:

$$J[u] = \int_0^1 (1-\tau)^k \langle Ax(\tau), u(\tau) \rangle d\tau, \quad (3.6.1)$$

$$\dot{x}(\tau) = u(\tau), \quad u(\tau) \in M, \quad x(0) = 0, \quad x(1) \in X. \quad (3.6.2)$$

**Редукция задачи.** Представим многогранник  $M$  в виде  $M = \{R_i\}$ , где  $R_i$  — вектор-столбцы, задающие вершины многогранника  $M$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Тогда  $u(t) \in M$  означает, что существует измеримая функция

$$w^T(t) = (w_1(t), w_2(t), \dots, w_N(t))$$

такая, что

$$u(t) = \sum_{i=1}^N R_i w_i(t), \quad \sum_{i=1}^N w_i(t) = 1,$$

$$w_i(t) \geq 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

Если обозначить упорядоченную последовательность столбцов  $R_i$  через  $R$ , то последнее равенство можно записать в виде  $u(t) = R w(t)$ . Имея в виду, что  $x(0) = 0$ , получим:

$$x(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau = R \int_0^t w(\tau) d\tau = R y(t),$$

где  $\dot{x}(t) = w(t)$ ,  $y(0) = 0$ . Реализуя образовавшуюся замену переменных, будем иметь:

$$J[w] = \int_0^1 (1-t)^k \langle B y(t), w(t) \rangle dt \rightarrow \min, \quad (3.6.3)$$

$$\dot{x}(t) = w(t),$$

$$w(t) \in S = \{w : \langle w, 1 \rangle = 1, \quad w_i \geq 0\}, \quad (3.6.4)$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) \in Y,$$

$B = R^T A R$ ,  $\langle w, 1 \rangle = 1$  означает  $\sum_{i=1}^N w_i = 1$ ,  $S$  —  $N$ -мерный симплекс.

**Симметричный случай.** Учтем, что любая матрица может быть представлена в виде суммы симметричной и кососимметричной, и представим матрицу  $B$ , входящую в целевую функцию задачи, в виде  $B = C + P$ ,  $C$  — симметричная матрица,  $P$  — кососимметричная. Рассмотрим простейший случай, когда в целевой функции (3.6.3) фигурирует только  $C$ , а  $X$  — все пространство (свободный правый конец). Тогда:

$$J[w] = \int_0^1 (1-t)^k \langle C y(t), w(t) \rangle dt = \frac{k}{2} \int_0^1 (1-t)^{k-1} \langle C y(t), y(t) \rangle dt.$$

Ясно, что  $y(t) \in S \cdot t = \{y : \langle y, 1 \rangle = t, y \geq 0\}$  в силу равенства

$$\int_0^t \langle w(\tau), 1 \rangle d\tau = \langle y(t), 1 \rangle = \int_0^t 1 d\tau = t.$$

Поэтому имеет место почти очевидная

**Теорема 3.6.1.** *Если в задаче (3), (4)  $B = C$  и правый конец не фиксирован, то среди всех оптимальных решений всегда существует  $w_{opt}(t) = \eta t$ , где  $\eta$  — глобальный минимум задачи квадратичного программирования*

$$\langle C \eta \rangle \rightarrow \min \text{ при } \eta \in S.$$

**Разностный аналог для задачи с кососимметричной матрицей.** Рассмотрим теперь не тривиальный случай, когда  $B = P$ . Для дальнейшего нам понадобится разностный аналог этой задачи, имеющей вид:

$$J[w] = \int_0^1 (1-t)^k \langle P y(t), w(t) \rangle dt \rightarrow \min, \quad (3.6.5)$$

$$\dot{y}(t) = w(t), \quad w(t) \in S, \quad y(0) = 0, \quad y(1) \in Y. \quad (3.6.6)$$

Разобьем отрезок  $[0, 1]$  точками  $t_0 = 0, \quad t_1 > t_0, \quad t_2 > t_1, \dots, t_L = 1$  на  $L$  отрезков и потребуем, чтобы вектор-функция  $w(t)$  на каждом из отрезков принимала постоянное значение. Введем обозначение:

$$w(t) = w_i \text{ при } t \in [t_{i-1}, t_i], \quad i = 1, \dots, L.$$

Преобразуем целевую функцию

$$\begin{aligned} J[w] &= \sum_{i=1}^L \int_{t_{i-1}}^{t_i} (1-t)^k \left\langle Pw_i(t-t_i) + \sum_{j=1}^{i-1} w_j(t_j - t_{j-1}), w_i \right\rangle dt = \\ &= \sum_{i=1}^L \left( \int_{t_{i-1}}^{t_i} (1-t)^k dt \left\langle P \sum_{j=1}^{i-1} w_j(t_j - t_{j-1}), w_i \right\rangle \right) = \\ &= \sum_{i=1}^L \sum_{l=0}^k (1-t_{i-1})^{k-l} (1-t_i)^l \times \left\langle P \sum_{j=1}^{i-1} w_j(t_j - t_{j-1}), w_i(t_i - t_{i-1}) \right\rangle. \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$w_i(t_i - t_{i-1}) = y_i, \quad i = 1, \dots, L,$$

$$\sum_{l=0}^k (1-t_{i-1})^{k-l} (1-t_i)^l = F(t_i).$$

Окончательно образовавшаяся конечномерная задача имеет вид:

$$J[y, \{t_i\}] = \sum_{i=1}^L F\{t_i\} \left\langle P \sum_{j=1}^{i-1} y_j, y_i \right\rangle \rightarrow \min, \quad (3.6.7)$$

$$\sum_{i=1}^L y_i = y(1), \quad y(1) \in S, \quad y(1) \in Y, \quad y_i \in R^N. \quad (3.6.8)$$

**Специальный класс задач линейного программирования.** В этом разделе устанавливаются основные свойства задачи билинейного программирования (3.6.7), (3.6.8). Дальнейшее исследование опирается на лемму 3.2.1. Выпишем эту лемму в виде:

**Лемма.** В задаче билинейного программирования

$$\langle Px, y \rangle \rightarrow \min, \quad x + y = a, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad a \in Q,$$

где  $Q$  — компакт,  $x, y, a$  —  $N$ -мерные векторы, на оптимальном решении с необходимостью выполняется  $\langle x, y \rangle = 0$ .

Используя лемму и следуя технике, развитой в параграфе 2 настоящей главы, можно доказать следующее утверждение.

**Теорема 3.6.2.** *В задаче (3.6.7), (3.6.8) на оптимальном решении всегда с необходимостью выполняется*

$$\langle y_i, y_j \rangle = 0, i \neq j, i = 1, \dots, L, j = 1, \dots, L.$$

*Доказательство*, как уже отмечалось, базируется на лемме 3.2.1, и при этом существенно используется тот факт, что  $F\{t_i\} \geq 0$ .

Эта теорема имеет очевидное, но важное

**Следствие 3.6.2.** *Если  $L > N$ , то среди множества индексов  $\{i = 1, \dots, L\}$  всегда существует подмножество  $L_0$  с числом индексов  $L-N$  такое, что  $y_i = 0$  при всех  $i \in L_0$ .*

Иными словами, при переходе от задачи (3.6.5), (3.6.6) к разностному аналогу бессмысленно разбивать отрезок  $[0, 1]$  на более чем  $N$  отрезков постоянства  $w(t)$ .

Из теоремы 3.6.2 следует, что каждый вектор  $y_i$  имеет не более одной ненулевой компоненты. Для того чтобы решить задачу (3.6.7), (3.6.8), следует выяснить, как оптимальным образом распределить ненулевые компоненты по всем векторам  $y_i$ , или, другими словами, в каком порядке обходить вершины симплекса  $S$ , а затем решить задачу математического программирования для нахождения оптимального набора  $\{t_i\}$ . Для случая  $F\{t_i\} = 1$  удается построить алгоритм, позволяющий устанавливать оптимальный обход вершин симплекса  $S$  (или, что то же самое, многогранника  $M$ ). Для задачи (3.6.7), (3.6.8) этот вопрос пока остается открытым.

**Теорема о числе переключений.** Вернемся к задаче (3.6.5), (3.6.6). Имеет место следующая

**Теорема 3.6.3.** *Среди всех решений задачи (3.6.5), (3.6.6) всегда существует такое, что управление  $w(t)$  принимает свои значения последовательно в вершинах симплекса  $S$ , причем в каждой не более одного раза (т. е. имеет не более  $N$  переключений).*

*Доказательство* основывается на следующих двух обстоятельствах: измеримая функция  $w(t)$  может с любой точностью аппроксимироваться простой (ступенчатой) функцией; функция, обеспечивающая решение разностного аналога (3.6.7), (3.6.8), является простой и, как легко можно проверить, удовлетворяет условиям задачи (3.6.5), (3.6.6). Очевидно, что ступенчатая функция, доставляющая решение задаче (3.6.7), (3.6.8), всегда

будет пределом последовательности ступенчатых функций, оптимизирующих задачу (3.6.5), (3.6.6).

**Заключение.** Рассмотренный в этой работе класс задач является дальнейшим развитием обобщенной изопериметрической задачи и во многом с ней схож. Однако не во всех случаях при исследовании этого класса задач удается продвинуться столь же далеко, как в случае изопериметрической. В особенности это относится к алгоритмической стороне проблемы.

## § 7. Линейное смещение в целевой функции обобщенной изопериметрической задачи

В настоящем параграфе рассматривается случай, когда в билинейном интегранде целевой функции изопериметрической задачи возникает линейное смещение. Конечно, основную сложность при исследовании задачи представляет билинейная часть. Однако взаимодействие линейной и билинейной частей приводят к интересным эффектам, и, кроме того, существуют задачи, в которых фигурирует только линейная часть.

**Постановка и редукция задачи. Существование решения.** Задача оптимального управления со смешанными ограничениями может быть записана в следующей канонической форме:

$$J[u] = \int_{t_0}^T F_0(x(t), u(t)) dt \rightarrow \min_u, \quad (3.7.1)$$

$$\dot{x}(t) = u(t), \quad (3.7.2)$$

$$F(x(t), u(t)) = 0, \quad (3.7.3)$$

$$G(x(t), u(t)) \leq 0, \quad (3.7.4)$$

где  $x(t) : [t_0, T] \rightarrow R^n$ ,  $F_0(\cdot) : R^n \times R^n \rightarrow R$ ,  $F(\cdot) : R^n \times R^n \rightarrow R^m$ ,  $m < n$ ,

$G(\cdot) : R^n \times R^n \rightarrow R^k$ ,  $x(t_0) = x_0$ ,  $x(T)$  — не фиксирован.

При применении процедуры продолжения оптимальных траекторий возникают локальные вариационные задачи, речь о которых пойдет в главе IV. Решение локальных задач первого порядка сводится к изучению задач математического программирования, на основании исследования которых устанавливается структура решения задачи (выясняется набор активных ограничений типа неравенств, который будет сохраняться в течении некоторого времени). Процедура продолжения оптимальных траекторий начинается с локальной вариационной задачи и, соответственно, задачи математического программирования следующего вида:

$$F_0(x_0, y) \rightarrow \min_y, \quad (3.7.5)$$

$$F(x_0, y) = 0, \quad (3.7.6)$$

$$G(x_0, y) \leq 0, \quad (3.7.7)$$

где функции  $F_0(\cdot), F(\cdot), G(\cdot)$  определены также, как и в задаче (3.7.1)–(3.7.4).

Может оказаться, что решение задачи (3.7.5)–(3.7.7) не определяется единственным образом. Тогда осуществляется переход к локальной вариационной задаче второго порядка. Будем считать, что ограничения типа неравенств  $G_A(x_0, y) = 0$ , на которых достигается неединственное решение, устойчивы (т. е. соответствующие им двойственные переменные не равны нулю). Остальные ограничения обозначим через  $G_P(x_0, y) \leq 0$ .

Забегая вперед и следуя теореме 4.1.1, пользуемся тем, что существует отрезок  $[t_0, T]$  такой, что решение задачи (1)–(4) достигается на ограничениях  $F(x(t), \dot{x}(t)) = 0$ ,  $G_A(x(t), \dot{x}(t)) = 0$  при  $t \in [t_0, T]$ . В предположении, что  $F_0(\cdot)$ ,  $F(\cdot)$ ,  $G_A(\cdot)$  обладают необходимой степенью гладкости, заменим их первыми двумя членами разложения в ряд Тейлора по  $\Delta x(t) = x(t) - x_0$ . Это достигается благодаря тому, что  $x(t)$  — абсолютно непрерывная вектор-функция, а отрезок  $[t_0, T]$  можно считать сколь угодно малым. Итак, имеем:

$$F_0(x(t), \dot{x}(t)) \rightarrow F_0(x_0, \dot{x}(t)) + \frac{\partial F_0(x, \dot{x}(t))}{\partial x} /_{x_0} \Delta x(t),$$

$$F(x(t), \dot{x}(t)) \rightarrow F(x_0, \dot{x}(t)) + \frac{\partial F(x, \dot{x}(t))}{\partial x} /_{x_0} \Delta x(t),$$

$$G_A(x(t), \dot{x}(t)) \rightarrow G_A(x_0, \dot{x}(t)) + \frac{\partial G_A(x, \dot{x}(t))}{\partial x} /_{x_0} \Delta x(t).$$

Введем обозначение  $R(\cdot) = \begin{pmatrix} F(\cdot) \\ G_A(\cdot) \end{pmatrix}$ . Так как решение задачи (3.7.5)–(3.7.7) неединственно, то существует функция  $\varphi(\cdot)$  такая, что имеет место равенство  $F_0(x_0, y) = \varphi(R(x_0, y))$ . Пусть  $\varphi(\cdot)$  обладает также необ-

ходимой гладкостью, обеспечивающей разложение в ряд Тейлора. Тогда получим:

$$F_0(x(t), \dot{x}(t)) \rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial R} \frac{\partial R(x, \dot{x}(t))}{\partial x} /_{x_0} \Delta x(t) + \frac{\partial F_0(x, \dot{x}(t))}{\partial x} /_{x_0} \Delta x(t).$$

Введем обозначение  $A(\dot{x}(t)) = \frac{\partial \varphi}{\partial R} \frac{\partial R(x, \dot{x}(t))}{\partial x} /_{x_0} + \frac{\partial F_0(x, \dot{x}(t))}{\partial x} /_{x_0}$ .

В рассматриваемой задаче, не нарушая общности, можно считать, что  $x_0 = 0$ . Тогда  $\Delta x(t) = x(t)$ , и мы приходим к задаче:

$$J[u] = \int_{t_0}^T \langle A(u(t)), x(t) \rangle dt \rightarrow \min_u, \quad (3.7.8)$$

$$\dot{x}(t) = u(t), \quad (3.7.9)$$

$$R(x_0, u(t)) = 0, \quad (3.7.10)$$

$$G_P(x_0, u(t)) \leq 0, \quad (3.7.11)$$

$$x(t_0) = 0, \quad x(T) \in X, \text{ где } X \text{ — компакт.} \quad (3.7.12)$$

Эта задача обладает свойством инвариантности по отношению к замене переменной  $t$  (основной признак локальных вариационных задач).

Проверим это. Положим  $\tau = \frac{t}{T-t_0}$ ,  $x(\tau) = \frac{1}{T-t_0} x(t)$ . Тогда:

$$J[u] = T^2 \int_0^1 \langle A(u(\tau)), x(\tau) \rangle d\tau \rightarrow \min_u, \quad (3.7.13)$$

$$\dot{x}(\tau) = u(\tau), \quad (3.7.14)$$

$$R(x_0, u(\tau)) = 0, \quad (3.7.15)$$

$$G_A(x_0, u(\tau)) \leq 0, \quad (3.7.16)$$

$$x(0) = 0, \quad x(1) \in X. \quad (3.7.17)$$

Введем обозначения:  $U = \{u : R(x_0, u) = 0, G_P(x_0, u) \leq 0\}$ ,  $\text{conv}U$  — выпуклая оболочка множества  $U$ .

Имеет место

**Теорема 3.7.1.** Пусть  $U$  — компакт. Решение задачи (3.7.13)–(3.7.17) существует тогда и только тогда, если выполняется условие  $\text{conv}U \cap X \neq \emptyset$ .

**Доказательство.** Так как  $x(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau$ , то нетрудно убедиться, что  $x(t) \in t \cdot \text{conv}U$ ,  $x(1) \in \text{conv}U$  (\*) какой бы не была ограниченная измеримая вектор-функция  $u(t)$  (фактически, операция интегрирования эквивалентна операции выпукления множества).

1°. Пусть  $\text{conv}U \cap X = \emptyset$ . Тогда множество  $X$  не достижимо и задача (3.7.13)–(3.7.17) не имеет решения.

2°. Пусть траектория  $x(t)$  существует. Тогда  $x(1) \in \text{conv}U$  в силу (\*).

Поэтому с необходимостью и достаточностью должно выполняться  $\text{conv}U \cap X \neq \emptyset$ .

### Линейное смещение в интеграле целевой функции обобщенной изопериметрической задачи

Пусть  $U = \{u : R(x_0, u) = 0, G_p(x_0, u) \leq 0\}$  — компакт. Рассмотрим  $A(u(t))$ . Введем обозначение  $B(u(t)) + C = A(u(t))$ , где

$$B(u(t)) = A(u(t)) - A(0), C = A(0).$$

Таким образом  $B(0) = 0$ . Опуская множитель  $T^2$  и пользуясь введенной заменой запишем целевую функцию (3.7.13) в виде

$$J[u] = \int_0^1 (\langle c, x(t) \rangle + \langle B(u(t)), x(t) \rangle) dt.$$

Введем замену  $B(u(t)) = w(t)$ ,  $\dot{y}(t) = w(t)$ ,  $y(0) = 0$ . Билинейный член в целевой функции преобразуется к виду  $\langle w(t), x(t) \rangle$ . Сделаем еще одну замену:

$$z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad \dot{z}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}, \quad v(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ w(t) \end{pmatrix}.$$

Ясно, что  $z(0) = 0$ ,  $z(1) \in X \cup y(1) = Z$ . Положим  $s = \begin{pmatrix} c, 0, 0, \dots, 0 \\ \vdots \\ 0, \dots, 0 \end{pmatrix}$ .

В конце концов целевая функция примет вид:

$$J[v] = \int_0^1 (\langle s, z(t) \rangle + \langle Av(t), z(t) \rangle) dt,$$

где  $A = \begin{pmatrix} 0 & E \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  — матрица  $2n \times 2n$ ,  $E$  — единичная матрица  $n \times n$ .

Представим матрицу  $A$  в виде  $A = S + P$ , где  $S$  — симметричная матрица  $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}$ , а  $P$  — кососимметрическая матрица  $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$ . Окончательно получим

$$J[v] = \langle Sz(1), z(1) \rangle + \int_0^1 (\langle s, z(t) \rangle + \langle Pv(t), z(t) \rangle) dt.$$

Таким образом, рассматриваемая нами задача отличается от обобщенной изопериметрической задачи, исследованной в предыдущих параграфах и имеющей вид:

$$J[u] = \langle Sx(1), x(1) \rangle + \int_0^1 \langle Pu(t), x(t) \rangle dt \rightarrow \min_u, \quad (3.7.18)$$

$$\dot{x}(t) = u(t), \quad (3.7.19)$$

$$u(t) \in U, \quad U \text{ — компакт}, \quad (3.7.20)$$

$$x(0) = 0, \quad x(1) \in X, \quad (3.7.21)$$

где  $x(\cdot)$ ,  $u(\cdot)$  определены также как и в задаче (3.7.1)–(3.7.4),  $P$  — кососимметрическая матрица  $n \times n$ ,  $S$  — симметричная матрица  $n \times n$ , наличием в интегранде целевой функции члена  $\langle s, z(t) \rangle$ , называемого нами линейным смещением. После всех преобразований исследуемая задача принимает вид:

$$J[v] = \langle Sz(1), z(1) \rangle + \int_0^1 (\langle s, z(t) \rangle + \langle Pv(t), z(t) \rangle) dt \rightarrow \min_v, \quad (3.7.22)$$

$$\dot{z}(t) = v(t), \quad z(0) = 0, \quad z(1) \in Z, \quad (3.7.23)$$

$$v(t) \in V, \quad V = \left\{ v : v = \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}, u \in U, w = B(u) \right\}. \quad (3.7.24)$$

Далее, если это не будет специально оговариваться, мы будем считать, что множество допустимых управлений  $V$  — произвольный компакт.

Остановимся подробнее на наиболее исследованном случае, когда множество  $V$  — многогранник.

### Обобщенная изопериметрическая задача с линейным смещением в интегранде целевой функции на множестве допустимых решений — многограннике

Пусть  $P$  — произвольная кососимметрическая матрица, а компакт  $V$  — многогранник. Обозначим его  $M$ . Ограничение (24) будет иметь вид  $v(t) \in M$ . Рассмотрим возникающие ситуации.

**1. Смещение  $s = 0$ .** Это изученная в предыдущих параграфах обобщенная изопериметрическая задача. При  $v(t) \in M$  она редуцируется к виду:

$$J[u] = \int_0^1 \langle Bu(t), x(t) \rangle dt \rightarrow \min_u,$$

$$\dot{x}(t) = u(t), \quad u(t) \in S, \quad x(0) = 0, \quad x(1) \in X,$$

где  $B$  — кососимметрическая матрица, а многогранник  $S$  — симплекс.

**2. Матрица  $P = 0$ .** Пусть в целевой функции (22) матрица  $P$  — нулевая. Тогда формулу (3.7.22), пренебрегая терминальным членом, можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} J[v] &= \int_0^1 \langle s, z(t) \rangle dt = \langle s, z(t) \rangle \Big|_0^1 - \int_0^1 \langle s, dz(t) \rangle = \\ &= \int_0^1 (1-t) \langle s, \dot{z}(t) \rangle dt = \int_0^1 (1-t) \langle s, v(t) \rangle dt. \end{aligned}$$

В результате мы приходим к локальной вариационной задаче:

$$J[v] = \int_0^1 (1-t) \langle s, v(t) \rangle dt \rightarrow \min_v, \quad (3.7.25)$$

$$\dot{z}(t) = v(t), \quad z(0) = 0, \quad (3.7.26)$$

$$v(t) \in M. \quad (3.7.27)$$

Условие  $z(1) \in Z$  исключается, так как локальные вариационные задачи — всегда задачи со свободным правым концом.

Задаче (3.7.25)–(3.7.27) соответствует следующая задача линейного программирования:

$$\langle s, y \rangle \rightarrow \min_y, \quad (3.7.28)$$

$$y \in M. \quad (3.7.29)$$

Если задача (3.7.28)–(3.7.29) имеет регулярное решение, то оптимальная вершина многогранника  $M$  определяет оптимальный режим в задаче (3.7.25)–(3.7.27).

Отметим особо, что существует класс задач, для которого исследование вырождений в целевой функции исчерпывается локальными вариационными задачами вида (3.7.25)–(3.7.27). Этот класс задач часто возникает в математической экономике и имеет вид:

$$J[u] = \langle c, x(T) \rangle \rightarrow \min_u, \quad (3.7.30)$$

$$\dot{x}(t) = u(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad x(T) \in X, \quad t \in [t_0, T], \quad (3.7.31)$$

$$Au(t) = Bx(t), \quad (3.7.32)$$

$$Cu(t) \leq Dx(t), \quad (3.7.33)$$

где  $x(t) : [t_0, T] \rightarrow R^n$ ,  $A, B$  — матрицы  $k \times n$ ,  $k < n$ ,  $C, D$  — матрицы  $m \times n$ .

**3. Матрица  $P$  в задаче (3.7.22)–(3.7.24) имеет полный ранг.** Пусть  $\text{rank} P = \dim\{z(\cdot)\} = n$  ( $n$  — четное). Тогда уравнение  $2P\xi + s = 0$  имеет решение  $\xi = -\frac{1}{2}P^{-1}s$ . Произведем замену переменных  $v(t) = w(t) + \xi$ ,

$z(t) = y(t) + \xi t$  и совершим преобразования в интегральной части целевой функции (3.7.22). Получим:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (\langle s, z(t) \rangle + \langle P v(t), z(t) \rangle) dt = \\ & \int_0^1 (\langle s, y(t) + \xi t \rangle + \langle P(w(t) + \xi), y(t) + \xi t \rangle) dt = \\ & = \int_0^1 \langle P w(t), y(t) \rangle dt + \int_0^1 (\langle s, y(t) \rangle + \langle P \xi, y(t) \rangle + \\ & \langle P w(t), \xi t \rangle) dt + \int_0^1 (\langle s, \xi t \rangle + \langle P \xi, \xi t \rangle) dt = \\ & = \int_0^1 \langle P w(t), y(t) \rangle dt + \int_0^1 \langle s + 2P \xi, y(t) \rangle dt + \langle \xi, s \rangle + \\ & + \langle \xi, y(t) \rangle = \langle \xi, y(1) + s \rangle + \int_0^1 \langle P w(t), y(t) \rangle dt \end{aligned}$$

в силу того, что  $\langle P \xi, \xi \rangle = 0$ ,  $s + 2P \xi = 0$ . В новых переменных задача (3.7.22)–(3.7.24) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} J[w] = & \left\langle S(y(1) - \frac{1}{2} P^{-1} s), y(1) - \frac{1}{2} P^{-1} s \right\rangle - \left\langle \frac{1}{2} P^{-1} s, y(1) \right\rangle + \\ & + \int_0^1 \langle P w(t), y(t) \rangle dt \rightarrow \min_w, \end{aligned} \quad (3.7.34)$$

$$y(t) = w(t), \quad y(0) = z(0) = 0, \quad y(1) \in Z - \xi, \quad (3.7.35)$$

$$w(t) \in V - \xi. \quad (3.7.36)$$

Таким образом, в результате замены переменных, линейный член в интегранде целевой функции исчез, но множество допустимых управлений  $V$  сместилось на вектор  $\xi = -\frac{1}{2} P^{-1} s$  по отношению к началу координат.

**4. Матрица  $P$  в задаче (3.7.22)–(3.7.24) имеет произвольный ранг.** Пусть в задаче (3.7.22)–(3.7.24) смещение  $s$  — не нулевой вектор, а  $P$  — произвольная антисимметрическая матрица. Будем использовать обозначение

$$A = \text{diag}(A_1 A_2 \dots A_l) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & & \dots \\ \dots & & \dots & \dots \\ 0 & \dots & & A_l \end{pmatrix},$$

где  $A_i$  — матрица  $n_i \times n_i$ , а  $A$  — матрица  $\left(\sum_{i=1}^l n_i\right) \times \left(\sum_{i=1}^l n_i\right)$ . Известно, что произвольная кососимметрическая матрица представима в виде:  $P = L^T \text{diag}(O \bar{P}) L$ , где  $L$  — невырожденная матрица  $n \times n$ ,  $O$  — нулевая матрица,  $\bar{P} = \text{diag}(P_1 P_2 \dots P_l)$ ,  $l < \frac{n}{2}$ ,  $P_i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Это представление позволяет осуществить следующую замену переменных:

$$w(t) = Lv(t),$$

$$y(t) = Lz(t), \quad L^{-1}s = c,$$

$$\text{diag}(O \bar{P})w(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{P} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{P}w_2(t) \end{pmatrix}, \quad w(t) = \begin{pmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{pmatrix},$$

$$\text{diag}(O \bar{P})y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{P} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{P}y_2(t) \end{pmatrix}, \quad y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

и мы можем переписать нашу задачу в следующем виде:

$$J \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \langle L^T S L y(1), y(1) \rangle + \tag{3.7.37}$$

$$+ \int_0^1 (\langle c_1, y_1(t) \rangle + \langle c_2, y_2(t) \rangle + \langle \bar{P}w_2(t), y_2(t) \rangle) dt \rightarrow \min_w,$$

$$\dot{y}_1(t) = w_1(t), \quad \dot{y}_2(t) = w_2(t), \quad y(0) = 0, \quad L^{-1}y(t) \in V, \tag{3.7.38}$$

$$Lw(t) = L \begin{pmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{pmatrix} \in V. \tag{3.7.39}$$

Так как матрица  $\bar{P}$  имеет полный ранг, мы можем произвести такую же замену переменных, как и в предыдущем разделе:  $v(t) = w_2(t) + \xi$ ,

$\xi = -\frac{1}{2}\bar{P}^{-1}c_2$ ,  $z(t) = y_2(t) + \xi t$ . Положим также  $c_1 = s$ ,  $y_1(t) = y(t)$ ,  $w_1(t) = w(t)$  и перепишем задачу (3.7.37)–(3.7.39) в виде:

$$J \begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix} = \left\langle L^T SL \begin{pmatrix} y(1) \\ z(1) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(1) \\ z(1) \end{pmatrix} \right\rangle + \int_0^1 (\langle s, y(t) \rangle + \langle \bar{P}v(t), z(t) \rangle) dt \rightarrow \min_{w,v} \quad (3.7.40)$$

$$\dot{y}(t) = w(t), \quad \dot{z}(t) = v(t), \quad y(0) = 0, \quad z(0) = 0, \quad (3.7.41)$$

$$L^{-1} \begin{pmatrix} y(1) \\ z(1) \end{pmatrix} \in Z - \begin{pmatrix} 0 \\ \xi \end{pmatrix},$$

$$L \begin{pmatrix} w(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \in V - \begin{pmatrix} 0 \\ \xi \end{pmatrix}. \quad (3.7.42)$$

Целевая функция (40) является сепарабельной по переменным  $(y(\cdot), w(\cdot))$ ,  $(z(\cdot), v(\cdot))$  и для построения методов ее решения можно применять алгоритмы балансирующего типа.

### **Существование циклических решений в обобщенной изопериметрической задаче с линейным смещением в целевой функции и в порождаемой ею гамильтоновой системе**

Пусть в задаче (3.7.22)–(3.7.24) имеет место следующее краевое условие:  $z(0) = z(1) = 0$ . Если решение этой задачи существует, то оно циклическое. В силу **теоремы 1** для существования решения необходимо и достаточно, чтобы  $0 \in \text{conv}V$ .

Если выпуклая оболочка множества допустимых управлений не содержит начало координат, то в силу результатов предыдущих двух разделов можно при помощи замены переменных сместить эту оболочку таким образом, чтобы она накрыла начало координат. Тогда в новых переменных у рассматриваемой задачи уже будет циклическое решение.

Перейдем к рассмотрению гамильтоновой системы, порождаемой задачей (3.7.22)–(3.7.24). Оставим в целевой функции (22) только интегральную часть и применим к задаче (3.7.22)–(3.7.24) принцип максимума Понтрягина, положив при этом  $z(0) = z(1) = 0$ ,  $0 \in \text{conv}V$ .

$$H = \langle Pz(t), v(t) \rangle - \langle s, z(t) \rangle + \langle \psi(t), v(t) \rangle \rightarrow \max_v, \quad v \in V, \quad (3.7.43)$$

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{\partial H}{\partial z} = Pv(t) + s. \quad (3.7.44)$$

Интегрируем систему для сопряженных переменных и получаем  $\psi(t) = Pz(t) + st + \text{const}$ . Подставляем это выражение в (3.7.43), тогда:

$$H = \langle 2Pz(t) + st + \text{const}, v(t) \rangle - \langle s, z(t) \rangle.$$

Положим  $\eta(t) = Pz(t) + \frac{st+c}{2}$ , тогда

$$H = 2 \langle \eta(t), v(t) \rangle - \langle s, z(t) \rangle \rightarrow \max_{v \in V}.$$

Выпишем  $h(\eta) = \max_{v \in V} H$  (преобразование Лежандра) и получим

$v(t) \in \partial h(\eta(t))$ . Учтем, что  $Pv(t) = \frac{\dot{\eta}(t) - s}{2}$ . Тогда

$$\frac{\dot{\eta}(t) - s}{2} = Pv(t) \in P\partial h(\eta(t)).$$

Окончательно получим

$$\dot{\eta}(t) \in P\partial h(\eta(t)) + \frac{s}{2}. \quad (3.7.45)$$

Таким образом в гамильтоновой системе (3.7.45) число периодических решений равно числу стационарных циклических решений в смысле принципа максимума Понтрягина в задаче (3.7.22)–(3.7.24). Для случая, когда множество допустимых управлений  $V$  — симплекс, на задачу (3.7.22)–(3.7.24) легко распространяется результат теоремы 3.4.1. Если  $V$  — симплекс, то в гамильтоновой системе (3.7.45) не менее  $n$  различных периодических решений, где  $n$  — порядок этой системы.

**Заключение.** Наличие «двойственности» между линейным смещением в интегранде целевой функции обобщенной изопериметрической задачи и положением множества допустимых управлений по отношению к началу координат, проявляющееся при линейной замене переменных задачи обеспечивает те же качественные свойства решений, как и в ранее изученных классах изопериметрических задач.

## Глава IV

### Локальные вариационные задачи

В этой главе вводится понятие локальной вариационной задачи. Отметим прежде всего, что это задачи со свободным правым концом. Смысл этих задач заключается в том, чтобы подобрать достаточно малую длину отрезка  $[t_0, T]$  так, чтобы свести их исследование к исследованию конечномерных задач математического и линейного программирования на регулярность решения. В случае нерегулярности решений и, как следствие, появления неустойчивых ограничений, по исходной задаче строятся возмущения более высоких порядков, позволяющие перейти к задачам математического программирования, уменьшающим число неустойчивых ограничений [77, 80, 81, 82, 84].

#### § 1. Локальная вариационная задача первого порядка для нелинейных задач оптимального управления со смешанными ограничениями

Исследуется задача оптимального управления со смешанными ограничениями, записанная в следующей форме:

$$J[u] = \int_{t_0}^T F_0(x(t), u(t)) dt \rightarrow \min, \quad (4.1.1)$$

$$F(x(t), u(t)) = 0, \quad (4.1.2)$$

$$G(x(t), u(t)) \leq 0, \quad (4.1.3)$$

$$\dot{x}(t) = u(t), \quad (4.1.4)$$

где  $x(\cdot): [t_0, T] \rightarrow R^n$ ,  $F(\cdot): R^n \times R^n \rightarrow R$ ,

$F(\cdot): R^n \times R^n \rightarrow R^m$ ,  $m < n$ ,  $G(\cdot): R^n \times R^n \rightarrow R^k$ .

Будем считать, что  $x(t_0) = x_0$ ,  $[t_0, T]$  — фиксированный интервал, значение вектора  $x(T)$  не фиксировано.

#### Формулировка основной теоремы.

Свяжем с задачей (4.1.1)–(4.1.4) следующую задачу математического программирования (МП):

$$F_0(x_0, y) \rightarrow \min, \quad (4.1.5)$$

$$F(x_0, y) = 0, \quad (4.1.6)$$

$$G(x_0, y) \leq 0, \quad (4.1.7)$$

где функции  $F_0(\cdot)$ ,  $F(\cdot)$ ,  $G(\cdot)$  определяются также как и в (4.1.1)–(4.1.4). Множество допустимых значений в задаче (4.1.5)–(4.1.7) будем обозначать в дальнейшем

$$Y_{FG}(x_0) = \{y : F(x_0, y) = 0, G(x_0, y) \leq 0\}, \quad (4.1.8)$$

и если  $x$  изменяется в некоторой окрестности  $x_0$ , то соответствующее многозначное отображение будем обозначать через

$$Y_{FG}(x) = \{y : F(x, y) = 0, G(x, y) \leq 0\}. \quad (4.1.9)$$

Наряду с этим отображением нас будет интересовать также отображение

$$Y(x) = \{y, G(x, y) \leq 0\}.$$

Опишем теперь свойства функций  $F_0(\cdot)$ ,  $F(\cdot)$ ,  $G(\cdot)$ , которые потребуются для формулировки и доказательства основной теоремы.

1. Пусть функция  $F_0(x, y)$  удовлетворяет по  $x$  условию Липшица с константой  $K$  в некоторой окрестности  $(x_0)$  точки  $x_0$  и при  $y \in W$ , где  $W$  — ограниченная область в  $R^n$ .
2. Функции  $F(x, y)$  удовлетворяют условию Липшица по  $x$ , непрерывно дифференцируемы по  $y$  и функционально независимы по  $y$  при

$$x \in U_{(x_0)}, y \in W, \text{ т. е. } \text{rank} \frac{dF(x, y)}{dy} = m.$$

3.  $\text{dis}(Y(x), Y(x_0)) \leq \text{const}|x - x_0|$ , где через  $\text{dis}(\cdot, \cdot)$  — обозначено Хаусдорфово расстояние между множествами.

Свойство 3 будет подробно исследовано ниже. Сейчас же перечислим условия, которые его обеспечивают:

- 3.1. Каждая из функций  $G(x, y)$  удовлетворяет условию Липшица с общей константой  $L$  при  $x \in U(x_0)$ ,  $y \in Y(x)$ .
- 3.2. Отображение  $x \rightarrow Y(x)$  полунепрерывно сверху в точке  $x_0$ , а  $Y(x_0)$  — непустой компакт.

3.3. В каждой точке  $y \in \Gamma_0$  существует производная по любому направлению  $\Gamma'_0(y, \bar{y})$ , причем  $\bar{y} \rightarrow \Gamma'_0(y, \bar{y})$  — сублинейная функция, где  $\Gamma_0 = \left\{ y : \max_i G_i(x_0, y) = 0, i = 1, 2, \dots, k \right\}$  и при этом множество  $\left\{ \bar{y} : \Gamma'_0(y, \bar{y}) < 0 \right\}$  непусто при  $\forall y \in \Gamma_0$  (условие Слейтера).

3.4. Отображение  $y \in \Gamma_0 \rightarrow d \Gamma'_0(y, \cdot)$  полунепрерывно сверху на  $\Gamma_0$ .

3.5. Из условий

$$y_n^0 \in \Gamma_0, \quad y_n^0 \rightarrow y^0 \in \Gamma_0, \quad |\bar{y}_n| = 1, \quad \bar{y}_n \rightarrow \bar{y}, \quad \xi_n \rightarrow +0$$

следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G(y_n^0 + \varepsilon_n \bar{y}) - G(y_n^0)}{\varepsilon_n} \geq \Gamma'_0(y^0, \bar{y}).$$

3.6. Имеет место  $G(y, \bar{y}) > 0$  для  $\forall y \in \Gamma_0$  и  $\bar{y} \in d \Gamma'_0(y, \cdot)$ .

Пусть существует абсолютный минимум задачи МП (4.1.5)–(4.1.7) и часть ограничений (4.1.7) активна при этом решении. Пусть также среди этих ограничений есть устойчивые (будем обозначать их через  $G_A(\cdot, \cdot)$ ), т. е. соответствующие двойственные переменные определяются единственным образом и отличны от нуля.

Тогда справедлива следующая **теорема 4.1.1.**

При выполнении предположений 1–4 для задачи (4.1.1)–(4.1.4):

- а) существуют отрезок  $[t_0, T]$  и окрестность  $U(x_0)$  точки  $x_0$  такие, что существует абсолютно непрерывная вектор-функция  $x^*(t)$ , начинающаяся из любой точки окрестности  $U(x_0)$  и являющаяся решением задачи (4.1.1)–(4.1.4);
- б) при  $t \in [t_0, T]$  с необходимостью выполняется:

$$G_A(x^*(t), \dot{x}^*(t)) = 0.$$

Теорема 4.1.1 имеет следующее очевидное *следствие*:

Если все активные ограничения, доставляющие решение задаче (4.1.5)–(4.1.7) устойчивы, то оптимальное решение задачи (4.1.1)–(4.1.4)

при  $t \in [t_0, T]$  определяется из системы уравнений Эйлера—Лагранжа для задачи:

$$\int_{t_0}^T F(x_0(t), \mathfrak{k}(t)) dt \rightarrow \min, \quad (4.1.11)$$

$$F(x(t), \mathfrak{k}(t)) = 0, \quad (4.1.12)$$

$$G_A(x(t), \mathfrak{k}(t)) = 0, \quad (4.1.13)$$

$$x_0 \in U(x_0). \quad (4.1.14)$$

То есть в этом случае удается установить оптимальный режим (набор активных ограничений) для отрезка  $[t_0, T]$ . При более сложном поведении активизирующихся ограничений задачи (4.1.5)–(4.1.7) для установления оптимального режима (или последовательности оптимальных режимов) требуются дополнительные исследования, основанные на формировании локальных вариационных задач более высоких порядков.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 4.1.1.

#### Доказательство теоремы 4.1.1

Доказательство теоремы 4.1.1 проведем в несколько этапов, разбив его на предложения.

*Предложение 1.* Существует отрезок  $[t_0, T]$  такой, что множество  $Y_{FG}(x(t)) = \{u(t) : F(x(t), u(t)) = 0, G(x(t), u(t)) \leq 0\}$  ограничено.

*Доказательство.* В силу условия 2 теоремы 4.1.1 и теоремы 2.3.2 многозначное отображение

$$Y(x) = \{y : F(x, y) = 0, G(x, y) \leq 0\}$$

удовлетворяет условию Липшица в окрестности точки  $x_0$ , т. е.  $\exists c > 0$  такое, что

$$\text{dis}(Y(x), Y(x_0)) \leq c \|x - x_0\|.$$

Поэтому, учитывая ограниченность  $Y_n(x_0)$  и, следовательно, ограниченность  $u(t_0)$  (т. е.  $\exists A > 0 \rightarrow \|u(t_0)\| \leq A$ ), имеем неравенство:

$$\|u(t)\| \leq A + c \|x(t) - x_0\|.$$

Вспомнив, что  $\dot{x}(t) = u(t)$  и используя лемму Гронуолла, получаем  $\|u(t)\| \leq Ae^{c(t-t_0)}$ , откуда немедленно следует утверждение предложения 1. Вернемся к задаче (4.1.1)–(4.1.4). Разобьем отрезок  $[t_0, T]$  точками  $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n = T$  на  $n$  отрезков и выпишем соответствующий разностный аналог:

$$J\{u_i\} = \sum_{i=0}^n \int_{t_i}^{t_{i+1}} F(x(t_i) + u(t_i)(t - t_i)) dt \rightarrow \min, \quad (4.1.15)$$

$$F(x(t_i), u(t_i)) = 0, \quad (4.1.16)$$

$$G(x(t_i), u(t_i)) \leq 0, \quad (4.1.17)$$

$$x(t_{i+1}) - x(t_i) = u(t_i)(t_{i+1} - t_i), \quad (4.1.18)$$

где функции  $F_0(\cdot), F(\cdot), G(\cdot), x(\cdot), u(\cdot)$  определены в соответствии с условиями теоремы 4.1.1.

*Предложение 2.* Существует отрезок  $[t_0, T]$  такой, что набор устойчивых активных ограничений  $G_A(\cdot)$  задачи МП:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} F_0(x_n + u_n(t - t_n), u_n) dt \rightarrow \min, \quad (4.1.19)$$

$$F(x_n, u_n) = 0, \quad (4.1.20)$$

$$G(x_n, u_n) \leq 0 \quad (4.1.21)$$

совпадает с набором устойчивых ограничений невозмущенной задачи (4.1.5)–(4.1.7).

Здесь и в дальнейшем для краткости будем пользоваться обозначениями  $x(t_i) = x_i, u(t_i) = u_i$ .

*Доказательство.* Свойство устойчивости активных ограничений означает, что существует такое возмущение задачи МП (4.1.5)–(4.1.7), при котором эти ограничения остаются активными (т. е. соответствующие этим ограничениям двойственные переменные строго отличны от нуля). В силу предложения 1 и свойств функций  $F_0(\cdot), F(\cdot), G(\cdot)$  для задачи (4.1.19)–(4.1.21) имеет место оценка:

$$\left| F_0(x_n + u_n(t - t_n), u_n) - F_0(x_0, u_n) \right| \leq k_1(T - t_0),$$

$$F(x_n, u_n) = F(x_0, u_n) + k_2(T - t_0),$$

$$G(x_n, u_n) = G(x_0, u_n) + k(T - t_0).$$

Следовательно, можно указать такое значение  $T - t_0$ , что активность ограничений  $G_A(\cdot)$  сохранится, что и доказывает предложение 2.

*Предложение 3.* Существует отрезок  $[t_0, T]$  такой, что набор устойчивых активных ограничений  $G_A(\cdot)$  задачи МП

$$J = \int_{t_{n-1}}^{t_n} F_0(x_{n-1} + u_{n-1}(t - t_{n-1}), dt + \tag{4.1.22}$$

$$+ \int_{t_n}^{t_{n+1}} F_0(x_n + u_n(t - t_{n-1}), u_n) dt \rightarrow \min,$$

$$u_{n-1} \in Y_{PG}(x_{n-1}), \tag{4.1.23}$$

$$u_n \in Y_{PG}(x_n) \tag{4.1.24}$$

совпадает с набором устойчивых активных ограничений задачи (4.1.5)–(4.1.7).

*Доказательство.* Сразу отметим, что предложение 2 справедливо для всех  $x_n \in U(x_0)$ , т. е. ничего не изменится, если заменить  $x_n$  на  $x_{n-1}$ . Добавим и вычтем к сумме (27) член вида

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} F_0(x_{n-1} + u_{n-1}(t - t_n), u_{n-1}) dt$$

и оценим выражение

$$\Delta J = J_1 - J_2 = u_n \in Y_{FG}(x_n) \int_{t_n}^{t_{n+1}} F_0(x_n + u_n(t - t_n), u_n) dt -$$

$$- u_{n-1} \in Y_{FG}(x_{n-1}) \int_{t_n}^{t_{n+1}} F_0(x_{n-1} + u_{n-1}(t - t_n), u_{n-1}) dt,$$

где, соответственно, через  $J_1$  обозначен первый интеграл, а через  $J_2$  — второй. Если  $Argmin J_1$  и  $Argmin J_2$  принадлежат пересечению множеств  $Y_{FG}(x_n)$  и  $Y_{FG}(x_{n-1})$ , то  $\Delta J = 0$ . Если нет, то после несложных оценок можно установить, что существует константа  $A$  такая, что  $|\Delta J| \leq A|x_n - x_{n-1}| \cdot (t_{n+1} - t_n)$ . Пользуясь этим, целевую функцию (4.1.22)–(4.1.24) преобразуем к виду:

$$J = \int_{t_{n-1}}^{t_n} (F_0(x_{n-1} + u_{n-1}(t - t_{n-1}), u_{n-1}) + (t_{n+1} - t_n) \langle u_{n-1}(t), u_{n-1} \rangle) dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} F_0(x_{n-1} + u_{n-1}(t - t_n), u_{n-1}) dt \rightarrow min, \quad (4.1.25)$$

где  $|u_{n-1}(t)| \leq A$ , а  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  — скалярное произведение.

Рассуждая так же, как и при доказательстве предложения 2, и принимая во внимание, что хотя возмущение в целевой функции и имеет более сложный вид, но оценивается по той же схеме, т. е. существуют такие константа  $K_n$  и отрезок  $[t_0, T]$ , что

$$|F_0(x_{n-1} + u_{n-1}(t - t_{n-1}), u_{n-1}) + (t_{n+1} - t_n) \langle u_{n-1}(t), u_{n-1} \rangle - F_0(x_0, u_{n-1})| \leq \leq K_n (T - t_0),$$

получаем доказательство предложения 3.

**Предложение 4.** Существует отрезок  $[t_0, T]$  такой, что набор устойчивых ограничений  $G_A(\cdot)$  задачи МП

$$J_j = \sum_{i=j}^n \int_{t_i}^{t_{i+1}} F_0(x_i + u_i(t - t_i), u_i) dt \rightarrow min, \quad (4.1.26)$$

$$u_i \in Y_{FG}(x_i), \quad i = j, n \quad (4.1.27)$$

совпадает с набором устойчивых ограничений задачи (4.1.5)–(4.1.7).

*Доказательство.* Содержательная интерпретация преобразования, проделанного при доказательстве предыдущего предложения заключается в том, что оно учитывает влияние будущего поведения функции управления на ее поведение на рассматриваемом отрезке. Повторяя это преобразование каждый раз при переходе от отрезка  $[t_i, t_{i+1}]$  к отрезку  $[t_{i-1}, t_i]$  можно трансформировать задачу (4.1.26)–(4.1.27) к виду:

$$J_j = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left( F_0(x_j + u_j(t-t_j), u_j) + \langle \mu_j(t), u_j \rangle (T-t_j) \right) dt \rightarrow \min,$$

$$u_j \in Y_{FG}(x_j).$$

И, по аналогии с предыдущими предложениями, заключить, что набор устойчивых активных ограничений сохраняется.

**Предложение 5.** Завершение доказательства теоремы 4.1.1. Пусть  $n \rightarrow \infty$ . Последовательность простых функций

$$u^n(t) = \{u_i : t \in [t_i, t_{i+1}], i = 0, n\},$$

аппроксимирующих оптимальное управление  $u(t)$ , обладает следующими свойствами:

- 1)  $x^n(t) = x_0 + \int_0^t u^n(\tau) d\tau$  равномерно ограничены, так как в силу предложения 1  $|u^n(\tau)| < A$  и, следовательно,

$$|x^n(t)| \leq x_0 + A(t-t_0) < x_0 + A(T-t_0);$$

- 2)  $x^n(t)$  равностепенно непрерывны, так как

$$|x^n(t) - x^n(t^2)| = \left| \int_{t^2}^t u^n(\tau) d\tau \right| \leq A|t^2 - t^1|;$$

- 3)  $F(x(t_i) + u_i(t-t_i), u_i) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ ,  $t \in (t_i, t_{i+1})$ ,

$$G_A(x(t_i) + u_i(t-t_i), u_i) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad t \in (t_i, t_{i+1}).$$

Теперь можно применить теорему Арцела. Тем самым теорема 4.1.1 доказана.

Рассмотрим случай, когда исходная задача линейна по управлениям:

$$J[u] = \int_{t_0}^T \langle g(x(t)), u(t) \rangle dt \rightarrow \min, \quad (4.1.28)$$

$$K(x(t))u(t) = L(x(t)), \quad (4.1.29)$$

$$M(x(t))u(t) \geq N(x(t)). \quad (4.1.30)$$

$$\mathfrak{z}(t) = u(t), x(t_0) = x_0, t \in [t_0, T],$$

$K(\cdot)$ ,  $M(\cdot)$  — матрицы размерностей  $l \times n$  ( $l < n$ ) и  $m \times n$  соответственно,  $g(\cdot)$ ,  $L(\cdot)$ ,  $N(\cdot)$  — вектора размерностей соответственно  $w$ ,  $l$ ,  $m$ .

**Локальная задача 1.2**

Рассмотрим задачу ЛП:

$$\langle g(x_0), y \rangle \rightarrow \min, \quad (4.1.31)$$

$$K(x_0)y = L(x_0), \quad (4.1.32)$$

$$M(x_0)y \geq N(x_0). \quad (4.1.33)$$

1. Пусть многогранник

$$Y(x_0) = \{y : K(x_0)y = L(x_0), M(x_0)y \geq N(x_0)\}$$

ограничен,  $riY(x_0) \neq \emptyset$  (тогда решение задачи ЛП

$$\min_y \{\langle g(x_0), y \rangle, y \in Y(x_0)\}$$

существует).

2. Пусть  $Arg \min \{\langle g(x_0), y \rangle : y \in Y(x_0)\} = Y^*$ ,

$$Y^* = \{y : K(x_0)y = L(x_0), M'(x_0)y = N'(x_0), M''(x_0)y \geq N''(x_0)\},$$

и при этом

$$\text{rank} \begin{pmatrix} K(x_0) \\ M'(x_0) \end{pmatrix} = \dim \begin{pmatrix} L(x_0) \\ N'(x_0) \end{pmatrix} \leq n.$$

Введем обозначение

$$\begin{pmatrix} K(\cdot) \\ M'(\cdot) \end{pmatrix} = R(\cdot), \begin{pmatrix} L(\cdot) \\ N'(\cdot) \end{pmatrix} = P(\cdot).$$

В предположениях 1–2 справедлива теорема 4.1.2, являющаяся следствием теоремы 4.1.1.

**Теорема 4.1.2.** Существует отрезок  $[t_o, T]$  ( $T - t_o > 0$ ) и окрестность  $X$  точки  $x_o$  такие, что при всех  $x'_o \in X$  существует абсолютно непрерывное решение  $x^*(t)$  задачи (4.1.5)–(4.1.6) и при этом с необходимостью выполняется  $R(x^*(t))\dot{x}^*(t) = P(x^*(t))$  при  $t \in [t_o, T]$ .

*Следствие теоремы 4.1.2.* Если  $\text{rank}R(x_o) = n$ , то решение  $x^*(t)$  определяется решением задачи Коши для системы уравнений

$$\dot{x}^*(t) = R^{-1}(x^*(t))P(x^*(t)), x(t_o) = x'_o.$$

## § 2. Локальные вариационные задачи второго порядка

### Локальная задача 2.1

1. Пусть функции  $F_o(x, v), F(x, v), G(x, v)$  непрерывно дифференцируемы по  $x$  и  $v$  при

$$\Delta \subset R^n, \quad x \in \Delta, \quad x_o \in \text{int } \Delta, \quad v \in W, \quad W \subset R^n.$$

2. Существует решение задачи и множество  $\text{Arg min}\{F_o(x_o, v) : v \in V\}$  состоит из одной точки  $v^*, v^* \in W$ .
3. Активные ограничения  $F'_A(x_o, v^*) = 0$  обладают свойством

$$\text{rank} \frac{\partial \begin{pmatrix} G(x_o, v) \\ F'_A(x_o, v) \end{pmatrix}}{\partial v} \Big|_{v^*} < m + \dim F_A(\cdot)$$

(двойственные переменные определяются не единственным образом).

Найдем  $\text{rank} \frac{\partial \begin{pmatrix} G(x_o, v) \\ F'_A(x_o, v) \end{pmatrix}}{\partial v} \Big|_{v^*}$  и выделим соответствующее количество

линейно независимых  $\frac{\partial \begin{pmatrix} G^1(x_o, v) \\ F^1_A(x_o, v) \end{pmatrix}}{\partial v}$ , обозначив полученную матрицу через  $A$  а соответствующие двойственные переменные — через  $\lambda_A$ . Ос-

тальные строки  $\frac{\partial \begin{pmatrix} G^2(x_0, v) \\ F_A^2(x_0, v) \end{pmatrix}}{\partial v} \Big|_{v^*}$  обозначим через  $B$ , найдем преобразующую матрицу  $\Phi$  так, что  $B = \Phi A$ . Обозначим соответствующие  $B$  двойственные переменные  $G(x(t), u(t)) = 0$  через  $\lambda_B$  и положим  $\lambda_B = 0$ . В этом случае  $\lambda_A$  определяется единственным образом. Обозначим через  $\lambda_{AF}$  двойственные переменные, соответствующие  $GF'_A(x_0, v^*)$ . Введем также обозначения:

$$a_G = \frac{\partial G^1(x, v^*)}{\partial x} \Big|_{x_0} v^*, \quad a_F = \frac{\partial F_A^1(x, v^*)}{\partial x} \Big|_{x_0} v^*,$$

$$b_G = \frac{\partial G^2(x, v^*)}{\partial x} \Big|_{x_0} v^*, \quad b_F = \frac{\partial F_A^2(x, v^*)}{\partial x} \Big|_{x_0} v^*. \quad F_A^*(x(t), u(t)) = 0.$$

Вектора невязок для  $F_A^1(\cdot)$  и  $F_A^2(\cdot)$  (вдруг какие-либо из них окажутся пассивными) обозначим соответственно через  $\omega_1$  и  $\omega_2$ .

**Теорема 4.2.1.** При предположениях 1–3 существует отрезок  $[t_o, T]$  ( $T - t_o > 0$ ) такой, что при  $t \in [t_o, T]$  оптимальный режим определяется следующей задачей ЛП:

$$\langle \lambda_{AF}, y \rangle \rightarrow \min_{y_1, y_2},$$

$$\begin{pmatrix} b_G \\ b_F + y_2 \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} a_F \\ a_F + y_1 \end{pmatrix}, \quad y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0,$$

где  $y_1 = \frac{\omega_1}{t - t_o}$ ,  $y_2 = \frac{\omega_2}{t - t_o}$ ,  $t \in [t_o, T]$ .

В результате применения теоремы 4.2.1 обнулившиеся переменные среди  $y_1$  и  $y_2$  выделяют набор ограничений, которые вместе с определяють оптимальный режим на  $[t_o, T]$ .

Доказательство этой теоремы полностью следует схеме теоремы 4.1.1, с той лишь разницей, что последовательность аппроксимирующих задач строится по возмущениям задачи ЛП, выписанной в формулировке теоремы.

**Локальная задача 2.2**

1. Пусть функции  $F_o(x, v)$ ,  $F(x, v)$ ,  $G(x, v)$  дважды непрерывно дифференцируемы по  $x$  и  $v$  при  $x \in \Delta$ ,  $\Delta \subset R^n$ ,  $x_o \in \text{int } \Delta$ ,  $v \in W$ ,  $W \subset R^n$ .
2. Существует решение задачи (4.1.4) и множество

$$\text{loc min}\{F_o(x_o, v) : v \in V\}$$

состоит из одной точки  $v^*, v^* \in W$ .

3. Среди активных ограничений  $F_A(x_o, v^*) = 0$  ограничения  $F_A^1(x_o, v^*) = 0$  устойчивы (выполняется

$$\text{rank} \frac{\partial R(x_o, v)}{\partial v} \Big|_{v^*} = m + \dim F_A^1(\cdot),$$

соответствующие этим ограничениям двойственные переменные

$$\lambda_A^1 > 0, \quad \text{grad} F_o(x_o, v^*) = \lambda_A^1 \frac{\partial F_A(x_o, v)}{\partial v} \Big|_{v^*} + \lambda_F \frac{\partial G(x_o, v)}{\partial v} \Big|_{v^*},$$

а для ограничений  $F_A^2(x_o, v^*) = 0$  соответствующие двойственные переменные  $\lambda_A^2 = 0$ .

**Теорема 4.2.2.** При предположениях 1–3 существует отрезок  $[t_o, T^o]$  ( $T^o - t_o > 0$ ) такой, что для всех  $[t_o, T]$  таких, что

$$0 < T - t_o \leq T^o - t_o$$

при  $t \in [t_o, T]$  оптимальная последовательность режимов для задачи (4.1.1)–(4.1.3) определяется в результате решения следующей задачи МП:

$$\min_y \{ \tau \langle (a-b), y \rangle + \langle b, y \rangle + \langle y, Cy \rangle : y \in Y \}, \quad (4.2.1)$$

$$Y = \{ y : Ay = d, By \geq f \},$$

$\tau$  — одномерный параметр,  $0 \leq \tau \leq 1$ , вектора  $a, b, d, f$  определяются выражениями:

$$a = \left\langle v^{*T}, \left( \frac{\partial^2 F_o(x, v)}{\partial x \partial v} \Big|_{x_o, v^*} - \frac{\partial (\lambda_R R(x, v))}{\partial x \partial v} \Big|_{x_o, v^*} \right) \right\rangle$$

( $\lambda_R$  — двойственные переменные, соответствующие ограничениям  $R(x_o, v^*) = 0$ ),  $F_B(x(t), \mathbf{k}(t)) > 0$ ,

$$b = \frac{\partial F_o(x, \varphi(x))}{\partial x} \Big|_{x_o},$$

где  $v^* = \varphi(x_o)$  на решении задачи 4.1.4,

$$d = -\tau \frac{\partial R(x, v^*)}{\partial x} \Big|_{x_o} v^*,$$

$$f = -\tau \frac{\partial F_A^2(x, v^*)}{\partial x} \Big|_{x_o} v^*.$$

Матрицы  $C, A, B$  определяются выражениями:

$$C = \frac{\partial^2 F(x_o, v)}{\partial v^2} \Big|_{v^*} - \frac{\partial^2 (\lambda_R R(x_o, v))}{\partial v^2} \Big|_{v^*},$$

$$A = \frac{\partial R(x_o, v)}{\partial v} \Big|_{v^*}, \quad B = \frac{\partial F_A^2(x_o, v)}{\partial v} \Big|_{v^*}.$$

И если существует решение задачи (4.2.1), то существует решение задачи (4.1.1)–(4.1.3).

В результате применения теоремы 4.2.2 решение локальной задачи 2.2 определяется конечной цепочкой режимов, возникающей в результате решения параметрической задачи квадратичного программирования (4.2.1). При этом равенства  $R(x(t), \mathbf{k}(t)) = 0$  на различных отрезках комбинируются с разными равенствами из ограничений  $F_A^2(x(t), \mathbf{k}(t)) \geq 0$ . Остальные ограничения при  $t \in [t_o, T]$ . Следует отметить, что решение задачи (4.2.1) может быть не единственным, а значит возникающая последовательность оптимальных режимов также не единственна.

### Доказательство теоремы 4.2.2

Доказательство заключается в исследовании и преобразованиях конструкции

$$J = \int_{t_o}^T F_o(x(t), \mathbf{k}(t)) dt \approx \int_{t_o}^{t_1} (F_o(x_o, \mathbf{k}(t))) + \int_{t_o}^t \frac{\partial F_o(u, \mathbf{k}(t))}{\partial u} \Big|_{x(\tau)} \mathbf{k}(\tau) d\tau + \\ + (T - t_1) \frac{\partial F_o(u, \varphi(u))}{\partial u} \Big|_{x(t)} \mathbf{k}(t) dt + (T - t_1) F_o(x_o, \mathbf{k}(t_o))$$

и аппроксимации ее соответствующей последовательностью задач параметрического МП типа (4.2.5) по схеме теоремы 4.1.1.

Используется также следствие теоремы 4.1.1, в силу которого  $F_A(x^*(t), \mathbf{k}^*(t)) = 0, t \in [t_o, T]$ .

### Локальная задача 2.3

1. Пусть функции  $F_o(x, v), F(x, v), G(x, v)$  непрерывно дифференцируемы по  $x$  и  $v$  при

$$x \in \Delta, \quad \Delta \subset R^n, \quad x_o \in \text{int } \Delta, \quad v \in W \subset R^n.$$

2. Существует решение задачи (4.1.4) и

$$\text{loc min}\{F_o(x_o, v) : v \in V\} \in W.$$

3. Область  $V \subset R^n$ , ограничена,  $\text{ri}V \neq \emptyset$ .
4. Для части активных ограничений  $F_A^1(x_o, v^*) = 0$  и равенств  $G^1(x_o, v^*) = 0$  имеет место

$$F_o = f_1(F^1, G_A^1).$$

5. Для остальных активных ограничений  $F_A^2(x_o, v_*) = 0$  и равенств  $G^2(x_o, v^*) = 0$  имеет место

$$\begin{pmatrix} F^2 \\ G_A^2 \end{pmatrix} = f_2 \begin{pmatrix} F^1 \\ G_A^1 \end{pmatrix}.$$

**Теорема 4.2.3.** При предположениях 1–4 существует отрезок  $[t_o, T^o]$  такой, что для любого отрезка  $[t_o, T]$  ( $0 < T - t_o \leq T^o - t_o$ ) на некоторой его части будут иметь место режимы, определяемые в результате решения задачи МП:

$$\langle a(v), y \rangle + \langle B, z_1 \rangle \rightarrow \min_{v, y, z_1, z_2}, \quad (4.2.2)$$

$$\begin{pmatrix} A_F \\ A_G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_F(v)y \\ z_1 - \varphi_G(v)y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_F(v)y \\ z_2 - \psi_G(v)y \end{pmatrix}, \quad (4.2.3)$$

$$z_1 \geq 0, z_2 \geq 0,$$

$$G^1(x_o, y) = 0, \quad F_A^1(x_o, y) = 0, \quad F_B(x_o, y) \geq 0, \quad (4.2.4)$$

$$G^1(x_o, v) = 0, \quad F_A^1(x_o, v) = 0, \quad F_B(x_o, v) \geq 0,$$

где  $F_B(x_o, v) \geq 0$  — остальные ограничения, и введены обозначения:

$$a(v) = \frac{\partial \left( F_o(x, v) - \frac{\partial f_1}{\partial G_1} \Big|_o G^1(x, v) - \frac{\partial f_1}{\partial F_A} F_A^1(x, v) \right)}{\partial x} \Big|_{x_o},$$

$$b = \frac{\partial f_1}{\partial F_A^1} \Big|_o, \quad A_G = \frac{\partial f_2}{\partial G^1} \Big|_o, \quad A_F = \frac{\partial f_2}{\partial F_A^1} \Big|_o,$$

$$\varphi_G(v) = \frac{\partial G^1(x, v)}{\partial x} \Big|_{x_o}, \quad \varphi_F(v) = \frac{\partial F_A^1(x, v)}{\partial x} \Big|_{x_o},$$

$$\varphi_G(v) = \frac{\partial G^2(x, v)}{\partial x} \Big|_{x_o}, \quad \varphi_F(v) = \frac{\partial F_A^2(x, v)}{\partial x} \Big|_{x_o}.$$

**Следствие.** Если предположение 4 не имеет места, то задача (4.2.2)–(4.2.4) принимает вид:

$$\langle a(v), y \rangle \rightarrow \min_{v, y},$$

$$G(x_o, v) = 0, F_A(x_o, v) = 0, F_B(x_o, v) \geq 0,$$

$$G(x_o, y) = 0, F_A(x_o, y) = 0, F_B(x_o, y) \geq 0.$$

В результате применения теоремы 4.2.3 в локальной задаче (4.2.2)–(4.2.4) определяются оптимальные режимы присоединением к равенствам  $G(x(t), \mathfrak{k}(t)) = 0$  некоторых активизировавшихся ограничений из  $F_B(x(t), \mathfrak{k}(t)) \geq 0$  (если таковые возникнут) и ограничений из  $F_A(x(t), \mathfrak{k}(t)) \geq 0$ , соответствующих обнулившимся компонентам векторов  $z_1, z_2$ , характеризующих их невязки. При этом активизация ограничений  $F_B(x_o, y) \geq 0$  и  $F_B(x_o, v) \geq 0$  определяет режимы на участках, примыкающих соответственно к  $t_o$  и к  $T$ . Это может происходить неоднозначно. Следует специально отметить, что:

- а) для части компонент  $f_2^o$  вектор-функции  $f_2$  может иметь место  $f_2^o = 0$  — случай ограничений, не содержащих производных (фазовые ограничения);
- б) не исключается  $f_1 \equiv 0$ ;
- в) для части компонент  $\begin{pmatrix} G^{2'} \\ F_A^{2'} \end{pmatrix}$  вектора  $\begin{pmatrix} G^2 \\ F_A^2 \end{pmatrix}$  и части компонент  $\begin{pmatrix} G^{1'} \\ F_A^{1'} \end{pmatrix}$  вектора  $\begin{pmatrix} G^1 \\ F_A^1 \end{pmatrix}$  зависимость  $\begin{pmatrix} G^{2'} \\ F_A^{2'} \end{pmatrix} = f_2' \begin{pmatrix} G^{1'} \\ F_A^{1'} \end{pmatrix}$  может иметь место при любых значениях  $x_o$  (особые режимы).

Если активизируются ограничения, соответствующие случаям а) и в), то на получающемся режиме возникает понижение размерности.

### Доказательство теоремы 4.2.3

Значение целевой функции задачи в исследуемом случае

$$F_o(x_o, v^*) = f_1(0).$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned} \Delta I &= \int_{t_o}^T F_o(x(t), \mathfrak{k}(t)) dt - \int_{t_o}^T F_o(x_o, \mathfrak{k}(t_o)) dt = \\ &= \int_{t_o}^T F_o(x(t), \mathfrak{k}(t)) dt - \int_{t_o}^T F_o(x_o, v^*) dt = \\ &= \int_{t_o}^T F_o(x(t), \mathfrak{k}(t)) dt - f_1(0)(T - t_o). \end{aligned}$$

В результате преобразований можно получить:

$$\begin{aligned} \Delta I \approx \int_{t_o}^T \frac{1}{t - t_o} \cdot \int_{t_o}^t \left( \frac{\partial(F_o(u, \mathfrak{k}(t))) - \frac{\partial f_1}{\partial G^1} \Big|_o G^1(u, \mathfrak{k}(t))}{\partial u} \Big|_{x(\tau)} - \right. \\ \left. - \frac{\partial f_2}{\partial F_A^1} \Big|_o F_A^1(u, \mathfrak{k}(t)) \Big|_{x(\tau)} \mathfrak{k}(\tau) + \frac{\partial f_1}{\partial F_A^1} \Big|_o \frac{\omega_1(t)}{t - t_o} \right) d\tau dt. \end{aligned}$$

Преобразуя ограничения, получим:

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{c} -\int_{t_0}^t \frac{\partial G^2(u, \mathfrak{k}(t))}{\partial u} \Big|_{x(\tau)} \mathfrak{k}(\tau) d\tau \\ \omega_2(t) - \int_{t_0}^t \frac{\partial F_A^2(u, \mathfrak{k}(t))}{\partial u} \Big|_{x(\tau)} \mathfrak{k}(\tau) d\tau \end{array} \right) = \\ & = \left( \begin{array}{c} \frac{\partial f_2}{\partial G^1} \Big|_o \\ \frac{\partial f_2}{\partial F_A^1} \Big|_o \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} -\int_{t_0}^t \frac{\partial G^1(u, \mathfrak{k}(t))}{\partial u} \Big|_{x(\tau)} \mathfrak{k}(\tau) d\tau \\ \omega_1(t) - \int_{t_0}^t \frac{\partial F_A^1(u, \mathfrak{k}(t))}{\partial u} \Big|_{x(\tau)} \mathfrak{k}(\tau) d\tau \end{array} \right), \end{aligned}$$

где  $\omega_1(t), \omega_2(t)$  — невязки ограничений  $F_A^1(x(t), \mathfrak{k}(t)) = \omega_1(t) \geq 0$ ,  $F_A^2(x(t), \mathfrak{k}(t)) = \omega_2(t) \geq 0$ . Переход от полученных выражений к задаче МП вида (4.2.2)–(4.2.4) совершается, как и в теореме 4.1.1.

**Локальная задача 2.4**

В предыдущих случаях предполагалось, что среди локальных максимумов один имеет наименьшее значение. Рассмотрим случай, когда в задаче (4.1.4) имеется несколько равнозначных минимумов и в каждом из них значение переменной  $v$  единственно. Обозначим и перенумеруем их через  $M_v, v = \overline{1, V}$ .

1. Пусть для каждого минимума выполняется наиболее сильное предположение 1 локальной задачи 1.2 и при этом

$$\begin{aligned} & \text{rank} \frac{\partial \begin{pmatrix} G(x_o, v) \\ F_A^v(x_o, v) \end{pmatrix}}{\partial v} \Big|_{v_v^*} = m + \dim F_A^v(\cdot), \\ & \text{grad} F_o(x_o, v_v^*) = \lambda_F^v \frac{\partial G(x_o, v)}{\partial v} \Big|_{v_v^*} + \lambda_G^v \frac{\partial F_A^v(x_o, v)}{\partial v} \Big|_{v_v^*}, \\ & \lambda_F^v > 0, \quad \lambda_G^v > 0. \end{aligned}$$

2. Пусть для всех минимумов в соответствии со следствием теоремы 4.1.1 определен отрезок  $[t_o, T]$  и для каждого найден оптимальный режим  $r^v [t_o, T, R^v]$ . Пусть для каждого  $r^v [t_o, T, R^v]$  установлена непрерывно дифференцируемая зависимость переменных  $x_v^*(t), \mathfrak{k}_v^*(t)$  от начальных условий

$$x_v^* = \varphi_v(x_o, t, t_o), \quad \mathfrak{H}_v^* = \frac{\partial \varphi_v(x_o, t, t_o)}{\partial t} \equiv \psi_v(x_o, t, t_o).$$

Тогда возможно преобразование:

$$\begin{aligned} J_v &= \int_{t_o}^T F_o(x_v^*(t), \mathfrak{H}_v^*(t)) dt = \int_{t_o}^{t_1} F_o(x_v^*(t), \mathfrak{H}_v^*(t)) dt + \\ &+ \int_{t_1}^T F_o(\varphi_v(x(t_1), t, t_1), \psi_v(x(t_1), t, t_1)) dt = \\ &= \int_{t_o}^{t_1} (F_o(x_v^*(t), \mathfrak{H}_v^*(t)) + \\ &+ \mathfrak{H}_v^{*T}(t) \frac{\partial}{\partial x^*(t)} \int_{t_1}^T F_o(\varphi_v(x(t), \tau, t_1), \psi_v(x(t), \tau, t_1)) d\tau) dt + \\ &+ \int_{t_1}^T F_o(\varphi_v(x_o, t, t_1), \psi_v(x_o, t, t_1)) dt. \end{aligned}$$

Введем обозначение

$$F^*(x_v^*(t), \mathfrak{H}_v^*(t)) = F_o(x_v^*(t), \mathfrak{H}_v^*(t)) + \mu(T, t_1, t) \mathfrak{H}_v^*(t),$$

$$\text{где } \mu_v(T, t_1, t) = \frac{\partial}{\partial x(t)} \int_{t_1}^T F_o(\varphi_v(x(t), \tau, t_1), \psi_v(x(t), \tau, t_1)) d\tau.$$

Нетрудно убедиться, что

$$\mu_v^o = \mu_v(T, t_o, t_o) \rightarrow \left( \frac{\partial F_o(u, v^*)}{\partial u} \Big|_{x_o} + \frac{\partial F_o(x_o, v)}{\partial v} \Big|_{v_v^*} \frac{\partial \psi_v(x, t_o, t_o)}{\partial x} \Big|_{x_o} \right) (T - t_o)$$

при  $(T - t_o) \rightarrow 0$ .

Таким образом, чтобы установить, какая из  $M_v$  определяет решение с наименьшим значением целевой функции задачи (4.1.1)–(4.1.3), необходимо исследовать задачу МП:

$$F_o(x_o, v) + (T - t_o) \mu_v v \rightarrow \min, \quad (4.2.5)$$

$$G(x_o, v) = 0, \quad F(x_o, v) \geq 0. \quad (4.2.6)$$

При достаточно малом  $T - t_o$  очевидно достаточно исследовать задачу (4.2.5)–(4.2.6) в окрестности каждого значения  $v_v^*$ .

Если найдется номер  $\nu_o$  такой, что

$$\sigma = \mu_{\nu_o}^o (\nu_{\nu_o}^* - \nu_{\nu}^*) \leq 0, \quad \forall \nu \neq \nu_o,$$

то соответствующий минимум задачи (4.1.4) определяет оптимальный режим в задаче (4.1.1)–(4.1.3). Если таких номеров несколько (обозначим их множество через  $V^1$ ), то имеет место ветвление  $R(x_o)z \geq \frac{\partial(\langle P(x), y_o \rangle - \langle y_o, R(x)y_o \rangle)}{\partial x} \Big|_{x_o}$  оптимальных режимов,  $\nu_2 \in V^1$  и задачу (4.1.1)–(4.1.3) нужно исследовать  $\nu_1 \in V^2$  вдоль каждой соответствующей траектории.

Если некоторая часть  $V^2$  номеров  $\nu$  обладает свойством: для любого найдется такой, что  $\mu_{\nu_1}^o (\nu_{\nu_2}^* - \nu_{\nu_1}^*) > 0$ , то с необходимостью и достаточностью возникает оптимальный скользящий режим, натянутый на минимумы  $M_{\nu} \in V^2$ .

### § 3. Локальные вариационные задачи второго порядка в системах, линейных по управлениям

#### Локальная задача 3.1

Пусть в задаче ЛП

$$\min_y \{ \langle g(x_o), y \rangle : y \in Y(x_o) \},$$

$$Y(x_o) = \{ K(x_o)y = L(x_o), M(x_o)y \geq N(x_o) \},$$

решение  $y_o$  единственно, но при этом

$$\text{rank} R(x_o) = n, \quad \dim P(x_o) > n.$$

Предположим, что в задаче ЛП

$$\langle g(x_o), z \rangle \rightarrow \min_z,$$

(знак равенства относится к ограничениям типа  $K(.)y = L(.)$ , а неравенства — к  $M(.)y \geq N(.)$ ), решение  $z^*$  единственно, существует и достигается на ограничениях

$$R_1(x_o)z^* = \frac{\partial(\langle P_1(x), y_o \rangle - \langle \varphi_o, R_1(x)y_o \rangle)}{\partial x} \Big|_{x_o}$$

так, что  $rank R_1(x_o) = dim P_1(x_o) = n$ . Через

$$R_2(x_o)z^* \geq \frac{\partial(\langle P_2(x), y_o \rangle - \langle \varphi_o, R_2(x_o)\varphi_o \rangle)}{\partial x} \Big|_{x_o}$$

обозначим оставшиеся (пассивные) неравенства (типа  $M(\cdot)y \geq N(\cdot)$ ).

**Теорема 4.3.1.** Существует отрезок  $[t_o, T]$  такой, что для всех  $[t_o, T], T(0 < T - t_o \leq T_o - t_o)$  решение  $x^*(t)$  задачи (4.1.5)–(4.1.7) существует при  $t \in [t_o, T], x(t_o) = x_o$  и определяется единственным образом из системы уравнений

$$\dot{x}^*(t) = R_1^{-1}(x^*(t))P_1(x^*(t)), x^*(t_o) = x_o.$$

Теорема 4.3.1 является прямым следствием теоремы 4.2.1. Однако остановимся на ее доказательстве подробнее.

#### Доказательство теоремы 4.3.1

Релаксируем задачи (4.1.5)–(4.1.7), отбросив ограничения  $R_2(x(t))\dot{x}(t) \geq P_2(x(t))$ . Обозначим через  $J^1[u]$  значение целевой функции релаксированной задачи. Очевидно, что

$$\min J^1[u] \leq \min J[u].$$

В силу теоремы 4.1.2 решением релаксированной задачи будет  $x^*(t)$  и при этом  $M''(x^*(t))\dot{x}^*(t) > N''(x^*(t))$ .

Покажем, что

$$\min J[u] = \min J^1[u] = J[u^*].$$

Для этого надо показать, что найдется такой отрезок  $[t_o, T_o]$ , что

$$R_2(x^*(t))\dot{x}^*(t) \geq P_2(x^*(t))$$

при  $t \in [t_o, T_o]$ .

Рассмотрим задачу параметрического ЛП:

$$\langle g(x_o, y) \rangle \rightarrow \min_y,$$

$$R(x_o + \lambda(t-t_o))y \geq P(x_o + \lambda(t-t_o)),$$

$$M''(x_o + \lambda(t-t_o))y \geq N''(x_o + \lambda(t-t_o)),$$

$$\|\lambda\| \leq A, A > 0.$$

Эта задача решается посредством задачи ЛП:

$$\langle g(x_o), z \rangle \rightarrow \min_z,$$

$$R(x_o)z \geq \frac{\partial(\langle P(x), \lambda \rangle - \langle y_o, R(x)\lambda \rangle)}{\partial x} \Big|_{x_o} (t-t_o)$$

и при этом при любом фиксированном  $A$  найдется отрезок  $[t_o, t^*]$  такой, что

$$R_1(x_o + \lambda(t-t_o))y = P_1(x_o + \lambda(t-t_o)),$$

$$R_2(x_o + \lambda(t-t_o))y > P_2(x_o + \lambda(t-t_o)),$$

тогда

$$R_2(x_o + \lambda(t-t_o))R_1^{-1}(x_o + \lambda(t-t_o))P_1(x_o + \lambda(t-t_o)) > P_2(x_o + \lambda(t-t_o)).$$

Сравнивая это выражение с выражением

$$R_2(x^*(t))R_1^{-1}(x^*(t))P_1(x^*(t)) \geq P_2(x^*(t))$$

и учитывая, что найдутся отрезок  $[t_o, T]$  и постоянная  $A > 0$  такие, что

$$\|x_i^*(t) - x_{oi}\| < A(t-t_o), i = \overline{1, n}, t \in [t_o, T],$$

получаем доказательство теоремы 4.3.1.

### Локальная задача 3.2

Рассмотрим ситуацию, когда в задаче ЛП  $M(x_o)y \geq N(x_o)$ ,

$$\min_y \{ \langle g(x_o), y \rangle : y \in Y(x_o) \}, Y(x_o) = \{ y : K(x_o)y = L(x_o) \},$$

решение неединственно, но ограничения, на которых оно достигается, линейно независимы

$$\text{rank}R(x_o) = \dim P(x_o) < n.$$

В силу теоремы 4.1.2 на некотором отрезке  $[t_o, T]$  на оптимальном решении выполняется  $R(x(t))\mathfrak{k}(t) = P(x(t))$  и (так как  $x(t)$  — абсолютно непрерывная функция) имеют место следующие соотношения:

$$\lambda_R R(x(t)) = \lambda_R R(x_o) + \int_{t_o}^t \frac{\partial(\lambda_R R(x))}{\partial x} \Big|_{x(\tau)} \mathfrak{k}(\tau) d\tau$$

( $\lambda_R$  — двойственные переменные, соответствующие равенствам  $R(x_o)y = P(x_o)$ ),

$$\langle \lambda_R, P(x(t)) \rangle = \langle \lambda_R, P(x_o) \rangle + \int_{t_o}^t \langle \mathfrak{k}(\tau), \frac{\partial \langle \lambda_R, P(x) \rangle}{\partial x} \Big|_{x(\tau)} \rangle d\tau,$$

$$g(x(t)) = g(x_o) + \int_{t_o}^t \mathfrak{k}(\tau) \frac{\partial g(x)}{\partial x} \Big|_{x(\tau)} d\tau.$$

Так как  $g(x_o) = \lambda_R R(x_o)$ , то

$$\begin{aligned} J[u] &= \int_{t_o}^T \langle g(x), \mathfrak{k}(t) \rangle dt = \int_{t_o}^T (\langle \lambda_R, P(x_o) \rangle + \\ &+ \int_{t_o}^t \langle \mathfrak{k}(\tau), \frac{\partial \langle \lambda_R, P(x) \rangle}{\partial x} \Big|_{x(\tau)} \rangle d\tau + \\ &+ \langle \mathfrak{k}(t), \int_{t_o}^t \mathfrak{k}(\tau) \frac{\partial(g(x) - \lambda_R R(x))}{\partial x} \Big|_{x(\tau)} d\tau \rangle dt = (T - t_o) \langle \lambda_R, P(x_o) \rangle + \\ &+ \int_{t_o}^T \int_{t_o}^t \langle \mathfrak{k}(\tau), (\frac{\partial \langle \lambda_R, P(x) \rangle}{\partial x} \Big|_{x(\tau)} + \frac{\partial(g(x) - \lambda_R R(x))}{\partial x} \Big|_{x(\tau)}) \mathfrak{k}(t) \rangle d\tau dt, \\ \Delta J[u] &= \int_{t_o}^T \int_{t_o}^t \langle \mathfrak{k}(\tau), (\frac{\partial \langle \lambda_R, P(x) \rangle}{\partial x} \Big|_{x(\tau)} + \\ &+ \frac{\partial(g(x) - \lambda_R R(x))}{\partial x} \Big|_{x(\tau)}) \mathfrak{k}(t) \rangle d\tau dt. \end{aligned}$$

Таким образом задача свелась к нахождению минимума  $\Delta J[u]$  при ограничениях

$$R(x(t))u(t) = P(x(t)), \quad M''(x(t))u(t) \geq N''(x(t)), \quad \mathfrak{k}(t) = u(t).$$

Выпишем отдельно билинейную часть функционала  $\Delta J[u]$ :

$$\Delta_B J[u] = \int_{t_0}^T \int_{t_0}^t \langle \mathfrak{k}(\tau), \frac{\partial(g(x) - \lambda_R R(x))}{\partial x} \Big|_{x(\tau)} \mathfrak{k}(t) \rangle d\tau dt.$$

Рассмотрим матрицу  $\frac{\partial(g(x) - \lambda_R R(x))}{\partial x} \Big|_{x(\tau)}$  в момент  $x_0$  и обозначим ее через  $A$ . Введем также обозначения  $R(x_0) = B_1; P(x_0) = b_1; M''(x_0) = B_2; N''(x_0) = b_2$ .

Сформируем теперь локальную вариационную задачу:

$$J[u] = \int_{t_0}^T \langle x(t) - x_0, Au(t) \rangle dt \rightarrow \min, \quad (4.3.1)$$

$$\mathfrak{k}(t) = u(t); x(t_0) = x_0,$$

$$u(t) \in U = \{u : B_1 u = b_1, B_2 u \geq b_2\}. \quad (4.3.2)$$

Для упрощения записи задачи положим  $x(t_0) = 0$  и воспользуемся предложенной А. А. Милютиним заменой  $x(\tau) = \frac{1}{T - t_0} x(t), t - t_0 = T\tau$ .

Тогда задача редуцируется к обобщенной изопериметрической задаче:

$$J[u] = \int_0^1 \langle x(t), Au(t) \rangle dt \rightarrow \min;$$

$$\mathfrak{k}(t) = u(t) \in U; riU \neq \emptyset; x(0) = 0.$$

Локальная задача 3.2 является базовой при изучении вырождения в целевой функции и более подробно она изучается в следующем параграфе.

### Локальная задача 3.3

Пусть в задаче ЛП (4.1.8)–(4.1.10) решение неединственно и при этом  $rankR(x_0) = n_0$ ,

$$n_0 < \dim P(x_0).$$

Выделим строки  $R_1(x_0)y = P_1(x_0)$  ( $rankR_1(\cdot) = \dim P_1(\cdot) = n_0$ ). Ос- тальные строки  $R_2(x_0)y = P_2(x_0)$  связаны с ними соотношением  $R_2(x_0) = \Phi R_1(x_0)$ . Положим

$$\omega_1(t) = M_1(x(t))\mathfrak{k}(t) - N_1(x(t)) \geq 0,$$

$$\omega_2(t) = M_2(x(t))\mathfrak{k}(t) - N_2(x(t)) \geq 0,$$

а соответствующие им невязки во вспомогательной задаче МП будем обозначать  $W_1, W_2$ .

Если положить двойственные переменные  $\lambda_R$ , соответствующие ограничениям  $R_2(x_o)y = P_2(x_o)$ , равными нулю, то двойственные переменные  $\lambda_{R_1}$ , соответствующие ограничениям  $R_1(x_o) = P_2(x_o)$ , определяются единственным образом. При этом

$$\lambda_{R_1} = (\lambda_{K_1}, \lambda_{M_1}), \lambda_{R_2} = (\lambda_{K_2}, \lambda_{M_2}).$$

Пусть существует решение задачи МП:

$$\begin{aligned} & < y, \frac{\partial(< g(x), z > + < \lambda_{R_1}, P_1(x) - R_1(x)z >)}{\partial x} \Big|_{x_o} > + \\ & + < \lambda_{M_1}, w_1 > \rightarrow \min_{y, z, w_1, w_2}; \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

$$\begin{aligned} & \Phi \left( \begin{array}{l} y^T \frac{\partial(L_1(x) - K_1(x)z)}{\partial x} \Big|_{x_o} \\ y^T \frac{\partial(N_1(x) - M_1(x)z)}{\partial x} \Big|_{x_o} + w_1 \end{array} \right) = \\ & = \left( \begin{array}{l} y^T \frac{\partial(L_2(x) - K_2(x)z)}{\partial x} \Big|_{x_o} \\ y^T \frac{\partial(N_2(x) - M_1(x)z)}{\partial x} \Big|_{x_o} + w_2 \end{array} \right); \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

$$R_1(x_o)y = P_1(x_o); \quad M''(x_o)y \geq N''(x_o); \quad (4.3.5)$$

$$R_1(x_o)z = P_1(x_o); \quad M''(x_o)z \geq N''(x_o) \quad (4.3.6)$$

и кроме того в рассматриваемом минимуме решение по  $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$  регулярно.

Обозначим через  $w^1$  и  $w^2$  части вектора  $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ , для которых выполняется

$$w^1 = 0; \quad w^2 > 0; \quad \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \end{pmatrix} = \Pi \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

в глобальном минимуме сформулированной задачи МП,  $\Pi$  — матрица перестановки.

Часть ограничений  $R(x_o)y = P(x_o)$ , соответствующую  $w_1^1$ , обозначим через  $R^1(x_o)y = P^1(x_o)$ , и ограничения, соответствующие  $w^2$ , — через  $R^2(x_o)y = P^2(x_o)$ .

**Теорема 4.3.3.** Найдется отрезок  $[t_o, T^o]$  такой, что для всех  $[t_o, T]$  ( $0 < T - t_o \leq T^o - t_o$ ) решение  $x^*(t)$  задачи (4.1.5)–(4.1.7) существует при  $t \in [t_o, T]$ ,  $x(t_o) = x_o$  и при этом с необходимостью на уравнениях

$$R^1(x^*(t))\mathfrak{K}^*(t) = P^1(x^*(t))$$

достигается ее минимум.

*Замечание.* Если вид функций  $R_{ij}^1(x)$ , являющихся компонентами матрицы  $R^1(x)$  и функций  $P_i^1(x)$ , являющихся компонентами вектора  $P^1(x)$  таков, что если  $rank R^1(x^*(t)) < dim P^1(x^*(t))$ , но при этом уравнения  $R^1(x^*(t))\mathfrak{K}^*(t) = P^1(x^*(t))$  совместны, то возникает понимание порядка.

### Доказательство теоремы 4.3.3

Релаксируем задачу (4.1.5)–(4.1.7), отбросив ограничения

$$R_2(x(t))\mathfrak{K}(t) \stackrel{=}{\geq} P_1(x(t)).$$

Если обозначить через  $J^1[x^1(t)]$  значение целевой функции релаксированной задачи, то

$$\min_x J^1[x^1(t)] \leq \min_x J[x(t)].$$

В силу теоремы 4.2.1 релаксированная задача разрешается в результате исследования задачи МП

$$\left\langle y, \left( \frac{\partial < \lambda_{R_1}, P_1(x) >}{\partial x} \Big|_{x_o} + \frac{\partial (g(x) - \lambda_{R_1} R_1(x))}{\partial x} \Big|_{x_o} z \right) \right\rangle \rightarrow \min_{y,z};$$

$$R_1(x_o)y = P_1(x_o); \quad M''(x_o)y \geq N''(x_o);$$

$$R_2(x_o)z = P_2(x_o); \quad M''(x_o)z \geq N''(x_o).$$

Рассмотрим выражение

$$R_1(x'(t))\dot{x}(t) - P_1(x'(t)) = R_1(x(t))\dot{x}(t) - P_1(x(t)) - \omega_1(t),$$

после преобразований

$$\begin{aligned} & \int_{t_o}^t \dot{x}^T(\tau) \frac{\partial(P_1(x) - R_1(x)\dot{x}(t))}{\partial x} \Big|_{x(\tau)} d\tau = \\ & = \int_{t_o}^t \dot{x}^T(\tau) \frac{\partial(P_1(x) - R_1(x)\dot{x}(t))}{\partial x} \Big|_{x(\tau)} + \omega_1(t) \end{aligned}$$

справедлива оценка

$$|J[x'(t)] - J[x(t)]| \geq \int_{t_o}^T \langle \lambda_{R_1}, \omega_1(t) \rangle dt,$$

и целевая функция задачи МП будет иметь вид:

$$J = \langle y, \left( \frac{\partial \langle \lambda_{R_1}, P_1(x) \rangle}{\partial x} \Big|_{x_o} + \frac{\partial (g(x) - \lambda_{R_1} R_1(x))}{\partial x} \Big|_{x_o} z \right) \rangle + \langle \lambda_{R_1}, w_1 \rangle.$$

Так как имеет место

$$\begin{aligned} R_1(x_o)\dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} K_1(x_o) \\ M_1(x_o) \end{pmatrix} \dot{x}(t) + \begin{pmatrix} L_1(x_o) \\ N_1(x_o) \end{pmatrix} + \\ &+ \int_{t_o}^t \left( \begin{array}{c} \dot{x}^T(\tau) \frac{\partial(L_1(x) - K_1(x)\dot{x}(t))}{\partial x} \Big|_{x(\tau)} \\ \dot{x}^T(\tau) \frac{\partial(N_1(x) - M_1(x)\dot{x}(t))}{\partial x} + \frac{\omega_1(t)}{t-t_o} \end{array} \right) d\tau, \\ R_2(x_o)\dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} K_2(x_o) \\ M_2(x_o) \end{pmatrix} \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} L_2(x_o) \\ N_2(x_o) \end{pmatrix} + \\ &+ \int_{t_o}^t \left( \begin{array}{c} \dot{x}^T(\tau) \frac{\partial(L_2(x) - K_2(x)\dot{x}(t))}{\partial x} \Big|_{x(\tau)} \\ \dot{x}^T(\tau) \frac{\partial(N_2(x) - M_2(x)\dot{x}(t))}{\partial x} \Big|_{x(\tau)} + \frac{\omega_2(t)}{t-t_o} \end{array} \right) d\tau \end{aligned}$$

и кроме того  $R_2(x_o) = \Phi R_1(x_o)$ , то

$$\int_{t_o}^t \left( \Phi \left[ \begin{array}{l} \mathbb{K}^T(\tau) \frac{\partial(L_1(x) - K_1(x)\mathbb{K}(t))}{\partial x} \Big|_{x(\tau)} \\ \mathbb{K}^T(\tau) \frac{\partial(N_1(x) - M_1(x)\mathbb{K}(t))}{\partial x} \Big|_{x(\tau)} + \frac{\omega_1(t)}{t-t_o} \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{l} \mathbb{K}^T(\tau) \frac{\partial(L_2(x) - K_2(x)\mathbb{K}(t))}{\partial x} \Big|_{x(\tau)} \\ \mathbb{K}^T(\tau) \frac{\partial(N_2(x) - M_2(x)\mathbb{K}(t))}{\partial x} \Big|_{x(\tau)} + \frac{\omega_2(t)}{t-t_o} \end{array} \right] \right) d\tau.$$

Отсюда следуют ограничения в задаче МП вида (4.3.4).

Отметим, что рассмотренные локальные задачи не исчерпывают все нерегулярные ситуации, но являются наиболее типичными. Рассматривались вырождения и связанные с ними локальные задачи не выше 2-го порядка. Однако этого может оказаться недостаточно.

В рассмотренных локальных задачах второго порядка может не сниматься неопределенность в выборе ограничений, на которых достигается оптимальное решение. Поэтому не исключается необходимость в рассмотрении локальных задач более высоких порядков. Они могут быть в принципе получены по изложенной схеме. Проиллюстрируем это на следующем примере:

$$\int_{t_o}^T (u_1(t) + u_2(t)) dt \rightarrow \max,$$

$$\mathbb{K}_1(t) = u_1(t); \mathbb{K}_2(t) = u_2(t); x_1(t_o) = x_2(t_o) = 1;$$

$$u(t) \in u(x) = \left\{ \begin{array}{l} u_1 \\ u_2 \end{array} \right\} : u_1 + u_2 \leq x_1 \cdot x_2; u_1 \geq 0; u_2 \geq 0 \Big\}.$$

**Локальная задача 1-го порядка**

Задача ЛП  $y_1 + y_2 \rightarrow \max; y_1 + y_2 \leq 1; y_1 \geq 0; y_2 \geq 0$  обеспечивает на оптимальном решении выполнение равенства

$$u_1(t) + u_2(t) = \mathbb{K}_1(t) + \mathbb{K}_2(t) = x_1(t) \cdot x_2(t).$$

**Локальная задача 2-го порядка**

Решение задачи ЛП  $y_1 + y_2 \rightarrow \max; y_1 + y_2 \leq 1; y_1 \geq 0; y_2 \geq 0$  ничего не дает по сравнению с предыдущей.

### Локальная задача 3-го порядка

$$\int_0^1 x_1(t)x_2(t)dt \rightarrow \max; \quad \mathbb{K}_1(t) = u_1(t);$$

$$\mathbb{K}_2(t) = u_2(t); \quad x_1(0) = x_2(0) = 0;$$

$$u_1(t) + u_2(t) = 1; \quad u_1(t) \geq 0; \quad u_2(t) \geq 0.$$

Рассмотрим задачу МП

$$y_1z_2 + z_1y_2 \rightarrow \max;$$

$$y_1 + y_2 = 1; \quad y_1 \geq 0; \quad y_2 \geq 0;$$

$$z_1 + z_2 = 1; \quad z_1 \geq 0; \quad z_2 \geq 0.$$

Имеется два локальных максимума:

1)  $y_1 = 1; \quad y_2 = 0; \quad z_1 = 0; \quad z_2 = 1;$

2)  $y_1 = 0; \quad y_2 = 1; \quad z_1 = 1; \quad z_2 = 0$

и стационарная точка

3)  $y_1 = y_2 = z_1 = z_2 = \frac{1}{2}.$

Следовательно, в первом случае на некотором отрезке  $[t_0, T]$  есть переключение в момент  $t_1$ :

$$t \in [t_0, t_1]; \quad \mathbb{K}_1 = x_1; \quad \mathbb{K}_2 = 0; \quad x_1(t_0) = x_2(t_0) = 1;$$

$$t \in [t_1, T]; \quad \mathbb{K}_2 = x_2 \cdot x_1(t_0)e^{t_1-t_0}; \quad \mathbb{K}_1 = 0;$$

$$x_1(t_1) = x_1(t_0)e^{t_1-t_0}; \quad x_2(t_1) = x_2(t_0) = 1;$$

точно такой же результат по целевой функции дает решение во втором случае. Переключение происходит в тот же самый момент  $t_1$ ,

$$t \in [t_0, t_1], \quad \mathbb{K}_2 = x_2, \quad \mathbb{K}_1 = 0, \quad x_1(t_0) = x_2(t_0) = 1;$$

$$t \in [t_1, T], \quad \mathbb{K}_1 = x_1 \cdot x_2(t_1); \quad \mathbb{K}_2 = 0; \quad x_2(t_1) = e^{t-t_0}; \quad x_1(t_1) = 1.$$

В третьем случае переключения нет и при этом

$$x_1(t) = x_2(t) = z(t);$$

$$2z = z^2; \quad z(t_0) = 1; \quad t \in [t_0, T].$$

Отметим, наконец, что есть классы задач, исследование которых исчерпывается локальными задачами второго порядка. Например,

$$J[u] = \int_{t_0}^T \langle C, z(t) \rangle dt \rightarrow \min,$$

$$Az(t) = Bx(t); \quad Cz(t) \geq Dx(t); \quad x(t_0) = x_0,$$

где  $A, B, C, D$  — матрицы с постоянными коэффициентами форматов  $1 \times n, l \times n, l \times n, m \times n, m \times n$  соответственно  $l > n$ .

#### § 4. Локальная вариационная задача второго порядка для линейных задач оптимального управления со смешанными ограничениями при наличии вырождения в целевой функции

Выпишем еще раз линейную задачу оптимального управления со смешанными ограничениями:

$$J[u] = \int_{t_0}^T (g_0(x(t)) + \langle g(x(t)), u(t) \rangle) dt \rightarrow \min, \quad (4.4.1)$$

$$z(t) = u(t), \quad (4.4.2)$$

$$K(x(t))u(t) = L(x(t)), \quad (4.4.3)$$

$$M(x(t))u(t) \geq N(x(t)), \quad (4.4.4)$$

где  $x(\cdot): [t_0, T] \rightarrow R^n$ ,  $g_0(\cdot): R^n \rightarrow R$ ,

$g(\cdot): R^n \rightarrow R^n$ ,  $K(\cdot): R^n \rightarrow R^m \times R^n$ ,  $m < n$ ,

$L(\cdot): R^n \rightarrow R^m$ ,  $M(\cdot): R^n \rightarrow R^k \times R^n$ ,  $R^n \rightarrow R^k$ .

Будем считать, что  $x(t^0) = x_0$ . Существенным является то, что  $[t_0, T]$  — фиксированный отрезок, а значение вектора  $x(T)$  не фиксировано. Это пред-

положение является базовым для реализации процедуры продолжения оптимальных траекторий, которые заключаются в параметризации вершины  $T - t_0$ , так, что  $T$  изменяется от значений, близких к  $t_0$  до некоторого заданного  $T^*$ . То есть решается не одна задача с данным фиксированным  $T^*$ , а целое семейство задач, задаваемое параметром  $T - t_0$ , который изменяется на полуинтервале  $(t_0, T^*)$ . Вся процедура продолжения решений базируется на понятии локальной вариационной задачи. Напомним ее вкратце в применении к изучаемому в данной работе случаю линейности по управляющим воздействиям. Пусть известна оптимальная траектория задачи (4.4.1)–(4.4.4) при некотором значении  $T - t_0$ . При увеличении значения  $T$  на некоторое  $\Delta$  можно обосновать, что отыскание оптимальной траектории в новой задаче сводится к семейству задач, имеющих такой же вид, как и задача (1)–(4), каждая из которых задана на отрезке  $[S, S + \Delta]$ , где  $S \in [t_0, T]$ , а начальное значение  $x(S)$  — это текущее значение фазовой переменной в невозмущенной задаче. Эти задачи и называются «локальными» так как они исследуются на отрезке сколь угодно малой длины  $\Delta$ . Очевидно, что процедуру продолжения оптимальных траекторий следует начинать со значений  $T$  близких к  $x_0$  и также ясно, что в качестве первой возмущаемой «траектории» следует взять точку  $x_0$  и соответствующее оптимальное значение  $u(t_0)$ . Таким образом, первой следует рассмотреть следующую задачу:

$$\langle g(x_0), u(t_0) \rangle \rightarrow \min, \quad (4.4.5)$$

$$K(x_0) u(t_0) = L(x_0), \quad (4.4.6)$$

$$M(x_0) u(t_0) \geq N(x_0). \quad (4.4.7)$$

Ясно, что если решение задачи линейного программирования (4.4.5)–(4.4.7) регулярно, то активные ограничения, формирующие оптимальную вершину, являются устойчивыми по отношению к возмущениям и поэтому их набор сохранится на некотором отрезке времени, однозначно определяя тем самым оптимальную траекторию. В настоящей главе нас будет интересовать случай, когда решение задачи (4.4.5)–(4.4.7) неединственно. То есть когда оно находится на ребре или грани многогранника (4.4.6)–(4.4.7). В предыдущем параграфе показано, что имеет место вырождение второго порядка и как описанную выше ситуацию можно свести к обобщенной изопериметрической задаче. В настоящей же работе основным вопросом будет переход от обобщенной изопериметрической задачи к последовательности оптимальных режимов в случае вырождения второго порядка. Основным результатом работы является формулируемая и доказываемая ниже теорема. Но пока остановимся чуть подробнее на обобщенной изопериметрической задаче.

### Обобщенная изопериметрическая задача

Рассмотрим ситуацию, когда в задаче ЛП (4.4.5)–(4.4.7) в целевой функции  $g(x_0) = 0$ . Тогда оказывается, что решением задачи является весь многогранник (4.4.6)–(4.4.7) (если только он не пуст). Попробуем это вырождение убрать. Пусть вектор-функция  $g(x)$  обладает необходимой степенью гладкости. Тогда

$$g(x(t)) = \left. \frac{d g(x)}{d x} \right|_{x=x_0} (x(t) - x_0) + O(\|x(t) - x_0\|).$$

Имея в виду, что  $O(\|x(t) - x_0\|) \rightarrow 0$  при  $T \rightarrow t_0$ , подставим полученное выражение в (1), введя обозначение

$$y(t) = x(t) - x_0, \left. \frac{d g(x)}{d x} \right|_{x=x_0} (x(t) - x_0) + O(\|x(t) - x_0(t)\|).$$

Имея в виду, что  $O(\|x(t) - x_0\|) \rightarrow 0$  при  $T \rightarrow t_0$ , подставим полученное выражение в (1), введя обозначение

$$y(t) = x(t) - x_0, \left. \frac{d g(x)}{d x} \right|_{x_0} = A, (A \text{ — матрица } n \times n).$$

В результате получим задачу:

$$J[u] = \int_{t_0}^T \langle A y(t), u(t) \rangle dt \rightarrow \min, \quad (4.4.8)$$

$$\dot{y}(t) = u(t), \quad y(t_0) = 0, \quad (4.4.9)$$

$$K(x_0)u(t) = L(x_0), \quad (4.4.10)$$

$$M(x_0)u(t) \geq N(x_0). \quad (4.4.11)$$

Как уже обсуждалось выше, из  $A$  имеет смысл выделить кососимметрическую часть  $P$ , а также рассматривать задачу на отрезке  $[0, 1]$  в силу замены  $t = t_0 + (T - t_0) \tau$ ,

$$z(\tau) = \frac{1}{T - t_0} y(t).$$

То есть, окончательно, задача имеет вид:

$$J[u] = \int_0^1 \langle Pz(t), u(t) \rangle dt \rightarrow \min, \quad (4.4.12)$$

$$z(t) = u(t), \quad z(0) = 0, \quad (4.4.13)$$

$$u(t) \in U = \{U : K(x_0)u = L(x_0), M(x_0)\}. \quad (4.4.14)$$

Мы рассмотрели переход к обобщенной изопериметрической задаче для ситуации, когда задача первого порядка вырождается на весь многогранник. Рассмотрим теперь ситуацию, когда вырождение наступает на каком-либо ребре или грани. Пусть

$$U_A = \{U : R(x_0)u = P(x_0)\} = \{u : K(x_0)u = L(x_0), M_A(x_0)u = N_A(x_0)\}$$

— многогранник, являющийся гранью или ребром многогранника (4.4.1)–(4.4.7), и на  $U_A$  достигается решение задачи (4.4.5)–(4.4.7). Сейчас и в дальнейшем будем считать, что матрица  $R(x_0)$  имеет полный ранг.

А теперь, в предположении, что  $T - t_0$  в задаче (1)–(4) мало, выполним следующие преобразования: положим

$$R(x(t)) = R(x_0) + \Delta R(x(t)), \quad g(x(t)) = g(x_0) + \Delta g(x(t)).$$

Выпишем соотношение

$$\langle g(x_0), u(t) \rangle = \lambda R(x_0)u(t) = \lambda P(x(t)) u(t),$$

где  $\lambda$  — решение задачи, двойственной к (4.4.5)–(4.4.7) и среди компонент вектора  $\lambda$  нет нулевых. Целевая функция задачи (4.4.1)–(4.4.4) теперь примет вид:

$$J[u] = \int_{t_0}^T (g_0(x(t)) + \lambda P(x(t)) + \langle g(x(t)) - \lambda R(x(t)), u(t) \rangle) dt.$$

Обозначим  $g(x(t)) - \lambda R(x(t)) = F(x(t))$  и вспомним, что  $P(x_0) = 0$ . Тогда

$$F(x(t)) = \left. \frac{dP(x)}{dx} \right|_{x=x_0} (x(t) - x_0) + O(\|x(t) - x_0\|).$$

Обозначим  $g_0(x(t)) + \lambda P(x(t))$  и получим

$$f(x(t)) = f(x_0) + \left\langle \left. \frac{d f(x)}{d x} \right|_{x_0}, x(t) - x_0 \right\rangle + O(\|x(t) - x_0\|).$$

Введем теперь обозначения:

$$\left. \frac{dP(x)}{dx} \right|_{x=x_0} = A, \quad \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x_0} = C, \quad M = \{u : Rn \geq P \ M_B(x_0)u \geq N_B(x_0)\},$$

где  $M_B(x_0)u \geq N_B(x_0)$  — не активные ограничения в задаче (5)–(7). Проведем также замену

$$t = t_0 + (T - t_0)\tau, \quad z(\tau) = \frac{1}{(T - t_0)}(x(t) - x_0).$$

Окончательно получим

$$J[u] = \int_0^1 \langle z(t), C + Au(t) \rangle dt \rightarrow \min, \quad (4.4.15)$$

$$z(t) = u(t), \quad z(0) = 0, \quad z(1) \text{ — не фиксировано}, \quad (4.4.16)$$

$$u(t) \in M. \quad (4.4.17)$$

Очевидно, что задачи (4.4.15)–(4.4.17) и (4.4.12)–(4.4.14) — аналогичны. Еще раз подчеркнем, что основным свойством решения этих задач является конечность последовательности режимов, причем каждый режим можно реализовать в вершине многогранника ограничений.

Интересно отметить также, что если в случае локальной вариационной задачи первого порядка (это обеспечивается единственностью по прямым и двойственным переменным решения задачи (4.4.5)–(4.4.7)) возникает при сколь угодно малых  $T - t_0$  лишь один режим, то в случае задачи второго порядка возникает сразу цепочка режимов независимо от величины  $T - x_0$ .

### Формулировка теоремы.

Перейдем к формулировке теоремы, которая является основным результатом настоящего параграфа.

Для начала введем удобные для дальнейшего обозначения. Свяжем с множеством допустимых управлений в задаче (4.4.1)–(4.4.4) следующее многозначное отображение

$$Y(x) = \{y : K(x)y = L(x), \ M(x)y \geq N(x)\}. \quad (4.4.18)$$

Очевидно, что тогда множество допустимых решений в задаче (4.4.5)–(4.4.7) будет иметь вид:

$$Y(x_0) = \{y : K(x_0)y = L(x_0), \ M(x_0)y \geq N(x_0)\}. \quad (4.4.19)$$

Множество решений задачи (4.4.5)–(4.4.7) обозначим

$$Y_A(x_0) = \{y : R(x_0)y = P(x_0), M_B(x_0)y \geq N_B(x_0)\}, \quad (4.4.20)$$

где  $R(x_0) = \begin{pmatrix} K(x_0) \\ M_A(x_0) \end{pmatrix}$ ,  $P(x_0) = \begin{pmatrix} L(x_0) \\ N_A(x_0) \end{pmatrix}$  и индекс «A» соответствует ограничениям типа неравенств, активным на решении задачи (4.4.5)–(4.4.7).

Соответствующее многозначное отображение обозначим

$$Y_A(x) = \{y : R(x)y = P(x), M_B(x)y \geq N_B(x)\}. \quad (4.4.21)$$

В отношении компонент векторных и матричных функций  $g(x)$ ,  $g_0(x)$ ,  $M(x)$ ,  $N(x)$ ,  $K(x)$ ,  $L(x)$  будем считать, что они один раз непрерывно дифференцируемы.

Будем считать, что  $R(x_0) = \dim \begin{pmatrix} L(x_0) \\ N_A(x_0) \end{pmatrix}$ . Пусть в задаче (4.4.15)–(4.4.17) имеет место  $N$  режимов. Пусть вдоль  $i$ -го режима в задаче (4.4.15)–(4.4.17) активны ограничения  $R_i(x_0)u(t) = P_i(x_0)$  (ясно, что к ограничениям типа равенств на  $i$ -м режиме добавлены активизировавшиеся ограничения типа неравенств).

Соответствующее многозначное отображение обозначим через

$$Y_{Ai}(x) = \{y : R_i(x)y = P_i(x), M_{Bi}(x)y \geq N_{Bi}(x)\}, \quad (4.4.22)$$

где  $M_{Bi}(x)y \geq N_{Bi}(x)$  соответствуют ограничениям, не входящим в набор активных.

Пусть имеет место для всех  $i$   $\text{rank } R_i(x_0) = \dim P_i(x_0)$ .

Пусть  $\lambda$  — набор ненулевых компонент решения задачи, двойственной (4.4.5)–(4.4.7), т. е. имеет место  $g(x_0) = \lambda R(x_0)$ .

В перечисленных выше предположениях имеет место **теорема 4.4.1**.

- Существует отрезок  $[t_0, T]$  и окрестность  $U(x_0)$  точки  $x_0$  такие, что существует абсолютно непрерывная вектор-функция  $x^*(t)$ , начинающаяся из окрестности  $U(x_0)$ , удовлетворяющей условию:  $g(x) = \lambda R(x)$ ,  $x \in U(x_0)$  и являющаяся решением задачи (1)–(4).
- Существует набор точек  $t_1 < t_2 < \dots < t_{N-1} < T$  таких, что на каждом из отрезков  $[t_i, t_{i+1}]$ , где  $i = 0, 1, \dots, N-1$ ,  $t_N = T$  с необходимостью выполняется

$$R_i(x^*(t)) \cdot \dot{x}^*(t) = P_i(x^*(t)).$$

Теорема имеет следующее очевидное **следствие**:

Если для какого-либо из отрезков  $[t_i, t_{i+1}]$  имеет место

$$\text{rank } R_i(x_0) = \dim P_i(x_0) = n,$$

то на этом отрезке решение определяется однозначно из соотношений

$$\dot{x}^*(t) = R_i^{-1}(x^*(t)). \quad (4.4.23)$$

Поэтому, если решение задачи (4.4.15)–(4.4.17) устроено так, что оптимальный обход вершин многогранника  $M$  реализуется единственным образом и каждая из этих вершин регулярна, то тогда при достаточно малых  $T - t_0$  решение задачи (4.4.1)–(4.4.4) также будет определяться однозначно последовательностью соотношений вида (4.4.23).

Ясно также, что если на каком-либо отрезке  $[t_i, t_{i+1}]$  возникает множественность решения, то неопределенность может сжиматься на основе построения конструкций, аналогичных построенным выше. Но это уже будут задачи более высоких порядков.

#### Доказательство теоремы

Основная идея доказательства состоит в том, что задача (4.4.15)–(4.4.17) настолько хорошо «аппроксимирует» при достаточно малых  $T - t_0$  задачу (4.4.1)–(4.4.4), что структура решения (т. е. набор оптимальных режимов) в этих задачах одна и та же. Обеспечивается это тем, что режимы, задающие оптимальное решение задачи (4.4.15)–(4.4.17), обладают свойством устойчивости. То есть ранг системы линейных уравнений, составленной из активных ограничений, определяющих какой-либо режим, является полным. И если  $T - t_0$  мало, то возмущение не успевает достичь достаточного уровня, чтобы нарушить устойчивые ограничения.

Доказательство теоремы проведем в несколько этапов, разбив его на предложения.

**Предложение 1.** Как уже отмечалось, за короткое время возмущение не должно сильно накапливаться. Это обеспечивается ограниченностью многогранника (4.4.3)–(4.4.4).

Существует отрезок  $[t_0, T]$  такой, что множество

$$Y(x(t)) = \{u(t) : K(x(t))u(t) = L(x(t)), M(x(t))u(t) \geq N(x(t))\}$$

— ограничено.

*Доказательство.* В силу гладкости  $K(\cdot)$ ,  $L(\cdot)$ ,  $M(\cdot)$ ,  $N(\cdot)$  и леммы Хофмана для многозначных отображений (4.4.18) и (4.4.19) имеет место:

$$\exists c > 0 \Rightarrow \text{dis}(Y(x), Y(x_0)) \leq c \|x - x_0\|.$$

Так как  $u(t_0) \in Y(x_0)$  — ограничено (т. е.  $\exists A > 0 \Rightarrow \|u(t_0)\| \leq A$ ), то имеет место неравенство

$$\|u(t)\| \leq A + c \|x(t) - x_0\|.$$

Вспомнив, что  $x(t) = u(t)$  и используя лемму Гронуолла, получим

$$\|u(t)\| < A \exp(c(t - t_0)).$$

Тем самым 1 предложение доказано.

**Предложение 2.** Задача (4.4.1)–(4.4.4) преобразуется таким образом, чтобы она имела вид возмущенной задачи (4.4.15)–(4.4.17).

Имеют место соотношения:

$$\int_{t_0}^T (g_0(x(t)) + \langle g(x(t)), u(t) \rangle) dt = (g_0(x_0) + \langle \lambda, P(x_0) \rangle)(T - t_0) + \int_{t_0}^T (\langle c, x(t) - x_0 \rangle + \langle s(t), x(t) - x_0 \rangle) \quad (4.4.24)$$

$$\cdot (t - t_0) + \langle A \cdot (x(t) - x_0), u(t) \rangle = \langle S(t)(x(t) - x_0), u(t) \rangle (t - t_0) dt,$$

$$K_\alpha(x(t)) = K_\alpha(x_0) + \bar{K}_\alpha(t)(t - t_0), \quad (4.4.25)$$

$$L_\alpha(x(t)) = L_\alpha(x_0) + \bar{L}_\alpha(t)(t - t_0), \quad (4.4.26)$$

$$M_\alpha(x(t)) = M_\alpha(x_0) + \bar{M}_\alpha(t)(t - t_0), \quad (4.4.27)$$

$$N_\alpha(x(t)) = N_\alpha(x_0) + \bar{N}_\alpha(t)(t - t_0), \quad (4.4.28)$$

где  $c = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x_0}$ ,  $A = \left. \frac{dF(x)}{dx} \right|_{x_0}$  — обозначения, введенные при формировании задачи (15)–(17),

$$\|S(t)\| \leq K, \quad \|s(t)\| \leq K, \quad \|\bar{K}_\alpha(t)\| \leq K, \quad \|\bar{L}_\alpha(t)\| \leq K, \quad \|\bar{M}_\alpha(t)\| \leq K,$$

$\|\bar{N}_\alpha(t)\| \leq K$ , индекс  $\alpha$  указывает на то, что имеется ввиду любой набор строк матриц  $K(\cdot)$  или  $N(\cdot)$ , соответственно, векторов  $L(\cdot)$  и  $N(\cdot)$ . Константа  $K > 0$  выбирается для удобства общей во всех оценках.

*Доказательство.*

Для получения соотношения (4.4.24) продолжим преобразования, начатые при формулировании задачи (4.4.15)–(4.4.17). Итак, в силу сделанных замен

$$\begin{aligned}
 J[u] &= \int_{t_0}^T (g_0(x(t)) + \lambda P(x(t))) dt + \int_{t_0}^{\tau} \langle g(x(t)) - \lambda R(x(t)), u(t) \rangle dt = \\
 &= \int_{t_0}^T f(x(t)) dt + \int_{t_0}^{\tau} \langle F(x(t)), u(t) \rangle dt.
 \end{aligned}
 \tag{4.4.29}$$

Преобразуем первый интеграл выражения (4.4.29)

$$\begin{aligned}
 \int_{t_0}^T f(x(t)) dt &= \int_{t_0}^{\tau} \left( f(x_0) + \int_{t_0}^t \left\langle \frac{df(x)}{dx} \Big|_{x(\tau)}, \mathfrak{k}(\tau) \right\rangle d\tau \right) dt = \\
 &= f(x_0)(\tau - t_0) + \int_{t_0}^{\tau} \left\langle \frac{df(x)}{dx} \Big|_{x_0}, x(t) - x_0 \right\rangle dt + \\
 &+ \int_{t_0}^T \int_{t_0}^t \left\langle \frac{df(x)}{dx} \Big|_{x(\tau)} - \frac{df(x)}{dx} \Big|_{x_0}, \mathfrak{k}(\tau) \right\rangle d\tau dt.
 \end{aligned}$$

Учитывая, что  $f(x)$  — дважды непрерывно дифференцируема и пользуясь теоремой о среднем, и обозначив

$$\frac{df(x)}{dx} \Big|_{x(\tau)} - \frac{df(x)}{dx} \Big|_{x_0} = a(\tau)$$

(ясно, что  $a(t_0) = 0$ ), имеем:

$$\begin{aligned}
 \theta \in [t_0, t], \quad \int_{t_0}^T \left( \int_{t_0}^t \langle a(\tau), \mathfrak{k}(\tau) \rangle d\tau \right) dt &= \int_{t_0}^{\tau} \langle a(\theta), x(t) - x_0 \rangle dt = \\
 &= \int_{t_0}^T \langle S(t), x(t) - x_0 \rangle \cdot (t - t_0) dt, \quad \|S(t)\| \leq K.
 \end{aligned}$$

Обратимся теперь ко второй части выражения (4.4.29)

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^T \langle F(x(t)), u(t) \rangle dt &= \int_{t_0}^T \left\langle \int_{t_0}^t \frac{dF(x)}{dx} \Big|_{x(\tau)} \mathfrak{k}(\tau) d\tau, u(t) \right\rangle dt = \\ &= \int_{t_0}^T \left\langle \frac{dF(x)}{dx} \Big|_{x_0} (x(t) - x_0), u(t) \right\rangle dt + \\ &+ \int_{t_0}^{\tau} \left\langle \int_{t_0}^t \left( \frac{dF(x)}{dx} \Big|_{x(\tau)} - \frac{dF(x)}{dx} \Big|_{x_0} \right) \mathfrak{k}(\tau) d\tau, u(t) \right\rangle dt. \end{aligned}$$

Обозначая  $\frac{dF(x)}{dx} \Big|_{x(\tau)} - \frac{dF(x)}{dx} \Big|_{x_0} = A(\tau)$  ( $A(t_0) = 0$ ), учитывая,

что ее компоненты дважды непрерывно дифференцируемы, рассуждая, как и в предыдущей ситуации, имеем:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{\tau} \left\langle \int_{t_0}^t A(\tau) \mathfrak{k}(\tau) d\tau, u(t) \right\rangle dt &= \int_{t_0}^T \left\langle A(\theta) (x(t) - x_0), u(t) \right\rangle dt = \\ &= \int_{t_0}^{\tau} \left\langle S(t) (x(t) - x_0), u(t) \right\rangle dt, \quad \|S(t)\| \leq K. \end{aligned}$$

Тем самым соотношение (4.4.24) обосновано.

Соотношения (4.4.25)–(4.4.28) однотипны и почти очевидны. Поэтому рассмотрим лишь первое из них. Так как все компоненты  $K(\cdot)$  непрерывно дифференцируемы (на самом деле даже дважды), то для любого набора строк матрицы  $K(\cdot)$  с очевидностью будет выполняться:

$$K_{\alpha}(x(t)) = K_{\alpha}(x_0) + \overline{K}_{\alpha}(t) \cdot (t - t_0), \quad \|\overline{K}_{\alpha}(t)\| \leq K.$$

2 предложение доказано.

**Предложение 3.** Имеют место соотношения

$$\exists c > 0 \rightarrow \text{dis}(Y_{Ai}(x(t)), Y_{Ai}(x_0)) \leq c(t - t_0). \quad (4.4.30)$$

*Доказательство.* Следует почти сразу следует из соотношений (4.4.27)–(4.4.30) и леммы Хофмана.

**Завершение доказательства теоремы**

Из вида возмущенной целевой функции (4.4.24) и соотношений (4.4.30) сразу следует, что всегда можно подобрать  $T - t_0$  так, чтобы наборы активных ограничений на соответствующих оптимальных режимах сохранились (плывут лишь моменты переключений). Очевидно также, что существует окрестность точки  $x_0$ , такая, что оптимальные решения могут начинаться из любой точки  $x'_0$  этой окрестности, лишь бы выполнялось  $g(x'_0) = \lambda R(x'_0)$ .

На этом доказательство завершается.

**Заключение.** Лаконичность в изложении доказательства теоремы связана с тем, что для локальных вариационных задач первого и более высоких порядков используется одна и та же схема: вырождение снимается до тех пор, пока не наступит регулярность, которая обеспечивает устойчивость режимов и возможность делать соответствующие локальные утверждения. Специально заметим, что речь идет лишь о нерегулярностях, связанных с не единственностью в прямой задаче математического программирования.

## Глава V

### Процедура продолжения оптимальных траекторий

Рассматривается процедура продолжения оптимальных траекторий, заключающаяся в возмущении начальных условий имеющейся оптимальной траектории. Возмущение начальных условий сводится к локальной вариационной задаче, исследуемой вдоль всей траектории. Если при этом ни в какой точке оптимальной траектории не возникает новых нерегулярностей, то последовательность режимов, определяющих оптимальную траекторию сохраняется и для задачи, определенной на отрезке  $[t_0, T]$  большей длины. Если возникает новая нерегулярность, то продолжение оптимальной траектории на больший отрезок сводится к исследованию локальной вариационной задачи, тип которой определяется характером нерегулярности.

#### § 1. Продолжение решений в задаче оптимального управления со смешанными ограничениями и не фиксированным правым концом при увеличении $[T - t_0]$

Пусть в исходной задаче (4.1.1)–(4.1.3) установлен отрезок  $[t_0, T]$  и найдено оптимальное решение в результате решения какой-либо из возникших локальных задач.

Обозначим этот отрезок через  $[t_0, T_0]$  и исследуем возможность построения (продолжения) решения на отрезке  $[t_0, T]$  таком, что

$$T - t_0 > T_0 - t_0.$$

В отношении функций  $F_0(x, v), F(x, v), G(x, v)$  будем для простоты считать, что выполнено предположение 1 локальной задачи 1.1 всюду, где это потребуется. Пусть для определенности имеет место ситуация следствия локальной задачи 1.1. Рассмотрим отрезок  $[t_0, T^*]$  такой, что

$$T^* - t_0 > T_0 - t_0.$$

Введем промежуточную точку  $t_1$  так, чтобы  $T^* - t_1 = T_0 - t_0$  :

$$J = \int_{t_o}^{t_1} F_o(x(t), \mathfrak{K}(t))dt + \int_{t_1}^{T^*} F_o(x(t), \mathfrak{K}(t))dt .$$

Рассмотрим вспомогательную задачу МП:

$$\min_v \{F_o(x(t_1), v) \in V\}, V = \{v : F(x(t_1), v) \geq 0, G(x(t_1), v) = 0\} .$$

В силу теоремы 4.1.1 на отрезке  $[t_1, T^*]$  оптимальный режим тот же, что и в исходной ситуации при  $t \in [t_o, T_o]$ , если только соответствующее начальное значение  $x(t_1)$  достаточно близко к  $x_o$  (это определяется величиной  $t_1 - t_o$ ).

Выполнив преобразование, получим

$$J = \int_{t_o}^{t_1} (F_o(x(t), \mathfrak{K}(t)) + \mu(T, t_1, t)\mathfrak{K}(t))dt + \int_{t_1}^{T^*} F_o(x^*(x_o, t, t_1))dt . \quad (5.1.0)$$

(Очевидно, что второй интеграл равен оптимальному значению целевой функции задачи (4.1.3)–(4.1.4) при отрезке  $[t_o, T_o]$ .)

Для отрезка  $[t_o, t_1]$  имеем локальную задачу

$$J_1 = \int_{t_o}^{t_1} (F_o(x(t), \mathfrak{K}(t)) + \mu(T, t_1, t)\mathfrak{K}(t))dt \rightarrow \min ,$$

$$G(x(t), \mathfrak{K}(t)) = 0, F(x(t), \mathfrak{K}(t)) \geq 0, x(t_o) = x_o, t \in [t_o, t_1]$$

и вспомогательную задачу МП

$$\min \{F_o(x, v) + \langle \mu, v \rangle : v \in V\}, \quad (5.1.1)$$

$$V = \{v : G(x_o, v) = 0, F(x_o, v) \geq 0\},$$

в результате чего определяем, сохраняется ли тот же режим, что и на  $[t_1, T^*]$ , или возникает другой, ему предшествующий.

Разобьем теперь отрезок  $[t_o, T^*]$  точкой  $t^1$  так, чтобы  $t^1 - t_o = T_o - t_o$ . Исследуем локальную задачу на отрезке  $[t^1, T^*]$  посредством задачи МП:

$$\min_v \{F_o(x(t^1), v) : v \in V(x(t^1))\}, \quad (5.1.2)$$

$$V(x(t^1)) = \{v : G(x(t^1), v) = 0, F(x(t^1), v) \geq 0\}.$$

Ясно, что если решение исходной вспомогательной задачи (4.1.4) регулярно

$$\begin{aligned} \left( \text{rank} \frac{\partial R(x_o, v)}{\partial v} \Big|_{v^*} = \dim R(\cdot), \text{grad} F_o(x_o, v^*) = \right. \\ \left. = \lambda_R \frac{\partial R(x_o, v)}{\partial v} \Big|_{v^*}, \lambda_R \neq 0, F_o(x_o, v^*) > 0 \right), \end{aligned}$$

то при достаточно малых значениях  $T_o - t_o, T^* - t_o$  решение задачи (5.1.1)–(5.1.2) также регулярно и набор ограничений  $R(x^*(t), \mathbf{f}^*(t)) = 0$  один и тот же. Поэтому  $[t_o, T^*]$  можно увеличивать до тех пор, пока в задаче (5.1.1) или (5.1.2) не встретится какая-либо нерегулярность, исследуемая в локальных задачах. Таким образом, при дальнейшем увеличении возникнут новые режимы, предшествующие уже имеющемуся или следующие за ним. Моменты времени, в которые происходит смена режимов, называются моментами переключения.

Применяя преобразование (5.1.0) и решая возникающие локальные задачи, можно продолжить решение задачи (4.1.1)–(4.1.3) на все более увеличивающийся отрезок  $[t_o, T^*]$ . Следует отметить, что получающиеся при этом новые режимы могут не только предшествовать уже имеющимся или следовать за ними, но и возникать между ними.

Обратим внимание на то очевидное обстоятельство, что при всех  $t \in [t_j, t_{j+1}]$  на соответствующем режиме  $r_j[t_j, t_{j+1}, R_j]$  имеет место задача МП:

$$\min_v \{F_o(x(t), v) + \langle \mu, v \rangle : v \in V(x(t))\},$$

$$V(x(t)) = \{v : G(x(t), v) = 0, F(x(t), v) \geq 0\}.$$

Переключения с режима на режим обуславливаются возникновением нерегулярностей в моменты  $t_j$  и  $t_{j+1}$ , описываемых в локальных задачах.

Нерегулярность в момент  $t_j$  характеризуется, как это нетрудно заметить, некоторым соотношением

$$S'_j(x(t_j), \mu_j(t_{j+1}, t_j)) = 0.$$

В силу непрерывной зависимости решений от *начальных* условий легко установить, что  $S'_j(x(t_j), \mu_j(t_{j+1})) = 0$  переходит в

$$S = \{S_j(x_o, T, t_o) = 0, j = \overline{1, N}\}$$

( $N$  — число режимов) определяющее многообразие, на котором происходят переключения. При возникновении каждого нового режима в процессе увеличения  $[t_o, T]$  к  $S$  добавляются новые линии или поверхности переключений.

Очевидно, что не всех случаях можно продолжить решение на отрезок  $[t_o, T]$  любой длины. Отметим некоторые ситуации:

1. При некотором значении  $T = T'$  область

$$V(t) = \{v : F(x^*(T), v) = 0, G(x^*(T), v) \geq 0\}$$

состоит лишь из одной точки (нарушение условий Слейтера).

2. При определении очередного режима решение соответствующей задачи МР неограниченно.
3. Возникновение точки накопления при

$$T \rightarrow T': \exists t^* \in [t_o, T], \forall E > 0 \Rightarrow \exists r_j [t_j, t_{j+1}, R_j] \Rightarrow [t_j, t_{j+1}] \subset [t^* - E, t^* + E].$$

4. Счетные режимы (некоторому значению  $T < T'$  соответствует  $N$  режимов  $r_j [t_j, t_{j+1}, R_j], j = \overline{1, N}$  и при  $T \rightarrow T', N \rightarrow \infty$  так, что

$$\max (t_{j+1} - t_j) \rightarrow 0, \quad \bigcup_j [t_j, t_{j+1}] \rightarrow [t_o, T'].$$

Как уже отмечалось, при исследовании ситуаций локальных задач в процессе продолжения решений может возникать неединственность в определении режимов (с достаточностью решение задачи (4.1.1)–(4.1.3) единственно, если функция  $F_o(x, v)$  строго выпукла, а область

$$V(x) = \{v : F(x, v) \geq 0, G(x, v) = 0\}$$

выпукла по  $v$  при любом допустимом  $x$ ). В этом случае решение задачи (4.1.1)–(4.1.3) имеет смысл продолжить вдоль каждой возникающей последовательности режимов. Каждую такую последовательность, изменяющуюся с изменением  $T$ , назовем ветвью режимов.

Ветвь, доставляющую наилучшее значение функционалу (4.1.1) при данном значении  $T$ , будем называть оптимальной в  $T$ . При разных значениях  $T$  оптимальные ветви могут быть разными. Нетрудно показать, что оптимальная в  $T$  ветвь является оптимальным решением задачи (4.1.1)–(4.1.3), если, с достаточностью, функция  $F_o(x, v)$  строго выпукла по  $v$ , а область  $V(x) = \{v : F(x, v) \geq 0, G(x, v) = 0\}$  ограничена при всех достижимых за  $T - t_o$  значениях  $x$ . Если при некоторых значениях  $x^*$  выпуклость функции  $F_o(x^*, v)$  или ограниченность  $V(x^*)$  нарушается, то для определения времени достижимости соответствующих областей решается задача о быстродействии. (Если только эти области не достигаются естественным путем вдоль одной из ветвей). Продолжение последовательности режимов, полученной в результате решения задачи о быстродействии, на увеличивающемся отрезке  $[t_o, T]$  образует новую ветвь, которую следует сравнивать с уже имеющимися.

В заключение отметим, что из предлагаемого метода решения задачи (4.1.1)–(4.1.3) вытекают в некоторых случаях эффективные численные алгоритмы решения задач оптимального управления, существенно отличающиеся от вычислительных алгоритмов, основанных на построениях разностных схем для минимизирующих последовательностей фазовых координат или управлений. В частности, если функции  $F_o(x, \mathbb{k}), F(x, \mathbb{k}), G(x, \mathbb{k})$  линейны по производным  $\mathbb{k}$ , то вычислительная процедура состоит в следующем: новые режимы определяются в результате решения задач МП с линейными ограничениями и линейными или билинейными целевыми функциями и размерность этих задач не превосходит размерности переменной  $x(t)$ ; функция  $x(t)$  вдоль каждого режима определяется в результате решения задачи Коши для соответствующей системы дифференциальных уравнений.

## § 2. Продолжение решений в задачах, линейных по управлениям

Для задач оптимального управления характерно, что на разных отрезках времени оптимальное решение определяется разными наборами ограничений (т. е. активизируются то одни, то другие ограничения типа неравенств). Поэтому будем называть в задаче (4.1.5)–(4.1.7) режимом  $r[t_i, t_{i+1}, R]$  на отрезке  $[t_i, t_{i+1}]$  совокупность ограничений  $K(x(t)) \mathbb{k}(t) = L(x(t))$  и активизировав-

шихся на  $[t_i, t_{i+1}]$  ограничений типа неравенств  $M_A(x(t))\dot{x}(t) = N_A(x(t))$  (обозначим их вместе

$$R_i(x(t))\dot{x}(t) = P_i(x(t)), t \in [t_i, t_{i+1}],$$

если:

- А) остальные ограничения  $M_B(x(t))\dot{x}(t) > N_B(x(t))$  пассивны при  $t \in [t_i, t_{i+1}]$ ;
- Б) ограничения  $R_i(x(t))\dot{x}(t) = P_i(x(t))$  совместны при начальном условии  $x(t_i) = x_i$ .

Будем называть режим  $r[t_i, t_{i+1}, R_i]$  оптимальным, если ограничения  $R_i(x(t))\dot{x}(t) = P_i(x(t))$  однозначно определяют оптимальную траекторию задачи на отрезке  $[t_i, t_{i+1}] \subset [t_o, T]$ . Моменты  $t_i, t_{i+1}$  называются моментами переключения.

Воспользуемся рассмотренными локальными задачами для восстановления последовательности оптимальных режимов на заданном отрезке  $[t_o, T]$  в задаче (4.1.5)–(4.1.7). Процедуру постепенного наращивания отрезка  $[t_o, T]$  до заданной величины  $[t_o, T_k]$  (если это удастся) и решения возникающих при этом локальных задач для установления возникающих новых режимов будем называть продолжением решения на отрезок  $[t_o, T_k]$ .

В результате рассмотрения локальных задач установлено, что существует некоторый отрезок, на котором решение задачи либо имеет единственный локальный минимум и определяется единственным образом одним оптимальным режимом, либо возникают последовательности оптимальных режимов, определяющие локально оптимальные траектории.

Предположим для определенности, что имеет место случай, отмеченный в следствии теоремы 4.1.2.

Установлено, что при  $t \in [t_o, T]$  решение задачи находится из системы уравнений

$$\dot{x}^*(t) = R^{-1}(x^*(t))P(x^*(t)), x(t_o) = x_o, \quad (5.2.1)$$

где  $R(\cdot)$  и  $P(\cdot)$  соответствуют оптимальным базисным строкам в соответствующей задаче ЛП. Рассмотрим возможность решения задачи на отрезке  $[t_o, T']$  большей длины.

Правые части системы уравнений (5.2.1) непрерывно дифференцируемы и, следовательно, существует единственное решение  $x^*(t) = \varphi(x'_o, t - t_o)$ , причем функция  $\varphi(x'_o, t - t_o)$  непрерывно дифференцируема по начальным значениям, а  $x'_o \in X$ .

Разобьем отрезок  $[t_o, T']$  точкой  $t_1$  на две части так, чтобы  $T' - t_1 = T - t_o$ , и рассмотрим выражение

$$J[u] = \int_{t_o}^{t_1} \langle g(x(t)), \mathfrak{k}(t) \rangle dt + \int_{t_1}^{T^1} \langle g(x(t)), \mathfrak{k}(t) \rangle dt.$$

Если только  $x(t_1) \in X$  (каким бы ни было решение на отрезке  $[t_o, t_1]$ ), то оптимальное решение на отрезке  $[t_1, T^1]$  будет

$$x^*(t) = \varphi(x(t_1), t - t_1).$$

Соответственно,

$$\mathfrak{k}^*(t) = \frac{\partial \varphi(x(t_1), t - t_1)}{\partial x(t_1)} = \psi(x(t_1), t - t_1).$$

Выполним следующие преобразования:

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{T^1} \langle g(x^*(t)), \mathfrak{k}^*(t) \rangle dt = \\ & = \int_{t_1}^{T^1} (\langle g(\varphi(x(t_1), t - t_1)), \psi(x(t_1), t - t_1) \rangle - \\ & - \langle g(\varphi(x_o), t - t_1), \psi(x_o, t - t_1) \rangle) dt + \\ & + \int_{t_1}^{T^1} \langle g(\varphi(x_o), t - t_1), \psi(x_o, t - t_1) \rangle dt = \\ & = \int_{t_o}^{t_1} \left\langle \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_{t_1}^{T^1} \langle g(\varphi(x, \tau - t_1)), \psi(x, \tau - t_1) \rangle d\tau \right) \Big|_{x(\tau)}, \mathfrak{k}(t) \right\rangle dt + \\ & + \int_{t_1}^{T^1} \langle g(\varphi(x_o), t - t_1), \psi(x_o, t - t_1) \rangle dt. \end{aligned}$$

Введем обозначение

$$\mu(x(t), T^1 - t) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_{t_1}^{T^1} \langle g(\varphi(x, \tau - t_1)), \psi(x, \tau - t_1) \rangle d\tau \Big|_{x(t)} \right).$$

Тогда

$$J[u] = \int_{t_0}^{t_1} \langle (g(x(t)) + \mu(x(t), T^1 - t_1)), \dot{x}(t) \rangle dt + \\ + \int_{t_1}^{T^1} \langle g(\varphi(x_0, t - t_1)), \psi(x_0, t - t_1) \rangle dt$$

и на отрезке  $[t_0, t_1]$  возникает локальная задача, которая исследуется посредством задачи ЛП:

$$\min_y \left\{ \langle (g(x_0) + \mu(x_0, T^1 - t_1)), y \rangle : y \in Y(x_0) \right\}, \\ Y(x_0) = \{ y : K(x_0)y = L(x_0), M(x_0)y \geq N(x_0) \}.$$

А если  $t^1 - t_0 = T - t_0$  ( $t^1 \in [t_0, T^1]$ ), то возникает задача ЛП

$$\min \left\{ \langle g(x(t^1)), y \rangle : y \in Y(x(t^1)) \right\}, Y(x(t^1)) = \\ = \{ y : K(x(t^1))y = L(x(t^1)), M(x(t^1))y \geq N(x(t^1)) \},$$

где  $x(t^1) = \varphi_0(x_0, t^1 - t_0)$ .

Исследуя эти задачи, можно установить, что режим  $r[t_0, T, R]$  дает решение задачи при увеличении  $T - t_0$ , пока выполняются условия:

$$(g(x_0) + \mu(x_0, T - t_0))R^{-1}(x_0) \neq 0, \quad (5.2.2)$$

$$g(\varphi(x_0, T - t_0))R^{-1}(\varphi(x_0, T - t_0)) \neq 0, \quad (5.2.3)$$

$$\det R(\varphi(x_0, T - t_0)) \neq 0, \quad (5.2.4)$$

$$M_B(\varphi(x_0, T - t_0))\psi(x_0, T - t_0) - N_B(\varphi(x_0, T - t_0)) \neq 0. \quad (5.2.5)$$

Разрешая каждое из уравнений относительно  $T - t_0$  и выбирая наименьшее из полученных значений, определим тем самым наибольшую длину отрезка  $[t_0, T]$ , на котором сохраняется режим  $r[t_0, T, R]$ . То уравнение, решение которого дало искомую величину  $T - t_0$ , в зависимости от принадлежности его к одному из наборов (5.2.2)–(5.2.5), оп-

ределяет тип локальной задачи в случае продолжения решения на больший отрезок.

Пусть на некотором отрезке  $[t_o, T]$  решение задачи (4.1.5)–(4.1.7) определяется последовательностью оптимальных режимов

$$r_i [t_i, t_{i+1}, R_i], \quad i = \overline{0, N-1}.$$

Тогда при  $t \in [t_i, t_{i+1}]$  соответствующий кусок оптимальной траектории определяется задачей Коши для системы уравнений

$$R_i(x^*(t)) \dot{x}^*(t) = P_i(x^*(t))$$

при начальном условии  $x^*(t_i)$ . Обозначим решение этой системы через  $x^*(t) = \Phi_i(x^*(t_i), t - t_i)$  и соответственно  $\dot{x}^*(t) = \Psi_i(x^*(t_i), t - t_i)$ . Учтывая, что

$$x^*(t_N) = \Phi_{N-1}(x^*(t_{N-1}), t_N - t_{N-1}),$$

$$x^*(t_{N-1}) = \Phi_{N-2}(x^*(t_{N-2}), t_{N-1} - t_{N-2}), \dots, x^*(t_1) = \Phi_0(x_o, t_1 - t_o),$$

получаем, что

$$\begin{aligned} x^*(t) &= \varphi_j(x(t_{i+1}), t_{i+2} - t_{i+1}, t_{i+3} - t_{i+2}, \dots, \\ &t_j - t_{j-1}, t - t_j), t \in [t_j, t_{i+1}], j = \overline{i+1, N-1}. \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

Это означает, что  $x^*(t)$  непрерывно дифференцируема по начальному значению  $x(t_{i+1})$  на каждом отрезке  $[t_j, t_{j+1}]$  при  $t \in [t_{i+1}, T]$ . Соответственно

$$\dot{x}^*(t) = \psi_j(x(t_{i+1}), t_{i+2} - t_{i+1}, \dots, t_j - t_{j-1}, t - t_j). \quad (5.2.7)$$

Отметим, что если на каком-нибудь отрезке  $[t_\alpha, t_{\alpha+1}]$  уравнения  $R_\alpha(x(t)) \dot{x}(t) = P_\alpha(x(t))$  не определяют решение однозначно, то выберем произвольно допустимое

$$x^*(t) = \Phi_\alpha(x(t_\alpha), t - t_\alpha).$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned} J_1[u^*] &= \int_{t_i}^T \langle g(x^*(t)), \mathfrak{H}^*(t) \rangle dt = \sum_{j=i}^{N-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \langle g(x^*(t)), \mathfrak{H}^*(t) \rangle dt = \\ &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} \langle g(x^*(t)), \mathfrak{H}^*(t) \rangle dt + \sum_{j=i+1}^{N-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \langle g(x^*(t)), \mathfrak{H}^*(t) \rangle dt. \end{aligned}$$

В силу (5.2.6) и (5.2.7), сумма

$$\sum_{j=i+1}^{N-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \langle g(x^*(t)), \mathfrak{H}^*(t) \rangle dt$$

является непрерывно дифференцируемой функцией аргументов  $x^*(t_{i+1}), T - t_{N-1}, t_{N-1} - t_{N-2}, \dots, t_{i+2} - t_{i+1}$ . Обозначим ее через

$$\Phi_{i+1}(x^*(t_{i+1}), T - t_{N-1}, \dots, t_{i+2} - t_{i+1}).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} J_i[u^*] &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} \langle g(x^*(t)), \mathfrak{H}^*(t) \rangle dt + \Phi_{i+1}(x^*(t_{i+1}), \\ &T - t_{N-1}, t_{N-1} - t_{N-2}, \dots, t_{i+2} - t_{i+1}). \end{aligned}$$

Преобразуем теперь  $J_i[u^*]$  к виду

$$\begin{aligned} J_i[u^*] &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\langle (g(x^*(t)) + \frac{\partial \Phi_{i+1}}{\partial x} \Big|_{x^*(t)}), \mathfrak{H}^*(t) \right\rangle dt + \Phi_{i+1}(x(t_i), \\ &T - t_{N-1}, t_{N-1} - t_{N-2}, \dots, t_{i+2} - t_{i+1}). \end{aligned}$$

Получена вариационная задача (через  $J^i[\cdot]$  обозначено первое слагаемое в выражении для  $J_i[\cdot]$ )

$$J^i[u] = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\langle (g(x) + \frac{\partial \Phi_{i+1}}{\partial x} \Big|_{x(t)}), u(t) \right\rangle dt \rightarrow \min, \quad (5.2.8)$$

$$\mathfrak{H}(t) = u(t), \quad t \in [t_i, t_{i+1}], \quad x(t) = x^*(t),$$

$$K(x(t))u(t) = L(x(t)), \quad (5.2.9)$$

$$M(x(t))u(t) \geq N(x(t)),$$

оптимальное решение которой определяется из системы уравнений

$$R_i(x(t))\dot{x}(t) = P_i(x(t)), \quad x(t_i) = x^*(t_i).$$

При этом условия, ограничивающие величину  $t_{i+1} - t_i$ , имеют вид:

$$(g(x(t_i)) + \Phi_i(\cdot))R_i^{-1}(x(t_i)) \neq 0, \quad (5.2.10)$$

$$g(\varphi_i(x^*(t_i), t_{i+1} - t_i))R_i^{-1}(\varphi(x^*(t_i), t_{i+1} - t_i)) \neq 0, \quad (5.2.11)$$

$$\det R_i(\varphi_i(x^*(t_i), t_{i+1} - t_i)) \neq 0, \quad (5.2.12)$$

$$\begin{aligned} M_{B_i}(\varphi_i(x^*(t_i), t_{i+1} - t_i))\psi_i(x^*(t_i), t_{i+1} - t_i) - \\ - N_{B_i}(\varphi_i(x^*(t_i), t_{i+1} - t_i)) \neq 0. \end{aligned} \quad (5.2.13)$$

Из непрерывной дифференцируемости входящих в эти условия функций и из соотношений (5.2.6)–(5.2.7) следует, что  $t_{i+1} - t_i$  является непрерывно дифференцируемой функцией от длин остальных интервалов. Обозначим ее

$$t_{i+1} - t_i = f_i(t_1 - t_o, t_2 - t_1, \dots, t_i - t_{i-1}, t_{i+2} - t_{i+1}, \dots, T - t_{N-1}, x_o).$$

Так как реализовано  $N - 1$  моментов переключения, то  $i = \overline{1, N-1}$ . Ясно, что

$$t_1 - t_o = T - t_o - \sum_{i=1}^{N-1} (t_{i+1} - t_i).$$

Из полученной системы уравнений имеем

$$t_{i+1} - t_i = \xi_i(T - t_o, x_o), \quad i = \overline{0, N-1}.$$

Тогда  $x^*(t_i) = \Phi_i(x_o, T - t_o)$ .

Таким образом, можно считать доказанной следующую теорему.

### Теорема 5.2.1.

1. Пусть оптимальная траектория определяется конечным числом режимов.

2. Пусть на каждом интервале  $(t_i, t_{i+1})$  вдоль траектории выполнены условия регулярности (по локальным ограничениям).
3. Пусть сохраняются типы нерегулярности в моменты переключения  $t_i$ , включая моменты  $t_o$  и  $T$ .

Тогда существует такое  $\Delta T$ , что на отрезке  $[t_o, T + \Delta T]$  оптимальная траектория определяется той же последовательностью режимов, что и на отрезке  $[t_o, T]$ .

Если теперь увеличить длину отрезка  $[t_o, T]$  до  $T^* - t_o$ , то в окрестности  $t_i$  и  $t_{i+1}$  в задаче (5.2.8)–(5.2.9) возникает соответствующая локальная задача и, если при этом дополнительно к условиям, определяющим границы режима, нарушатся какие-либо из условий (5.2.10)–(5.2.13), то возникает необходимость в новом режиме. Если  $t$  такое, что  $0 < i < N$ , то между режимами  $r_{i-1}[t_{i-1}, t_i R_{i-1}]$  и  $r_i[t_i, t_{i+1} R_i]$  возникает режим или целая последовательность режимов. Если  $i = 0$  или  $i = N$ , то соответственно возникшая последовательность режимов является начальной или конечной.

### § 3. Продолжимость решений. Примеры

Нетрудно убедиться, что траектория, полученная в результате процедуры продолжения решения, реализует локальный понтрягинский экстремум. Глобальный экстремум можно однозначно выявить только в локальных задачах. В процессе продолжения решения на увеличивающийся отрезок  $[t_o, T]$  свойство глобальности может утратиться. Более того, перечисление всех локальных экстремумов в локальных задачах не является полным по отношению к заданному отрезку  $[t_o, T]$ . Экстремум, являющийся глобальным на  $[t_o, T]$ , может никак не проявиться в локальных задачах. Проиллюстрируем это на следующем примере:

$$\int_0^T (2u(t) + y(t)v(t))dt \rightarrow \max,$$

$$\dot{x}(t) = u(t), \quad \dot{y}(t) = v(t),$$

$$u(t) + v(t) \leq 1, \quad u(t) \geq 0, \quad v(t) \geq 0,$$

$$x(0) = y(0) = 1.$$

Локальная задача 1-го порядка сводится к задаче ЛП:

$$J = 2z_1 + z_2 \rightarrow \max,$$

$$z_1 + z_2 \leq 1, \quad z_1 \geq 0, \quad z_2 \geq 0,$$

$$\text{Argmin } J = \{z_1 = 1, z_2 = 0\}.$$

В соответствии с этим решением при всех  $T < 1$  в исходной задаче имеется единственный максимум, обеспечиваемый траекторией  $u(t) = 1$ ,  $v(t) = 0$ ,  $x(t) = 1 + t$ ,  $y(t) = 1$ . Однако при  $T \geq 1$  возникает еще один максимум  $v(t) = 1$ ,  $u(t) = 0$ ,  $y(t) = 1 + t$ ,  $x(t) = 1$  и при  $T > 1$  он является глобальным.

В зависимости от величины  $T$  экстремум может утратить не только свойство глобальности, но и экстремальности. Рассмотрим пример:

$$J[u, v] = \int_0^T \left( 2 - \frac{x(t)}{3} \right) u(t) + y(t)v(t) dt \rightarrow \max,$$

$$\dot{x}(t) = u(t), \dot{y}(t) = v(t), x(0) = y(0) = 1,$$

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \in U = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} : u + v \leq 1, u \geq 0, v \geq 0 \right\}.$$

При  $T < \frac{1}{2}$  в задаче имеется единственный максимум

$$u(t) = 1, \quad v(t) = 0, \quad x(t) = 1 + t, \quad y(1) = 1.$$

При  $\frac{1}{2} \leq T \leq 1$  к первому максимуму (он остается глобальным) добавляется второй:

$$u(t) = 0, \quad v(t) = 1, \quad x(t) = 1, \quad y(t) = 1 + t.$$

При  $1 < T < 2$  второй максимум становится глобальным. При  $T > 2$  первый максимум исчезает. Рассмотрим возникшую ситуацию подробнее.

Ясно, что при  $T \geq 2$  задача продолжения траектории первого максимума сводится к следующей:

$$\int_2^{2+\Delta} \left( 2 - \frac{x(t)}{3} \right) u(t) + y(t)v(t) dt \rightarrow \max,$$

$$\Delta > 0, \quad \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \in U, \quad x(2) = 3, \quad y(2) = 1.$$

Задача ЛП, соответствующая локальной задаче первого порядка  $z_1 + z_2 \rightarrow \max, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in U$  нерегулярна (неединственность решения по прямой задаче). Локальная задача следующего порядка имеет вид:

$$\int_0^1 (-\bar{x}(t)u(t) + \bar{y}(t)v(t))dt \rightarrow \max,$$

$$\bar{x}(t) = u(t), \quad \bar{y}(t) = v(t), \quad \bar{x}(0) = \bar{y}(0) = 0,$$

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \in U$$

и имеет очевидное решение  $v(t) = 1, u(t) = 0$ . И при  $t \in [2, 2 + \Delta]$  имеем  $x(t) = x(2), y(t) = y(2) + (t - 2 - \Delta)$ . Тогда при  $T = 2 + \Delta$  целевая функция  $J[u, v]$  представима в виде

$$\begin{aligned} J[u, v] &= \int_0^{t_1} \left(2 - \frac{x(t)}{3}\right) u(t) + y(t)v(t) dt + \\ &+ \int_{t_1}^{2+\Delta} \left(2 - \frac{x(t)}{3}\right) u(t) + y(t)v(t) dt = \\ &= \int_0^{t_1} \left(\left(2 - \frac{x(t)}{3}\right) u(t) + (y(t) + (2 + \Delta - t_1))v(t)\right) dt + \frac{(T - t_1)^2}{2} + y(0)(2 + \Delta - t_1). \end{aligned}$$

Учитывая, что при  $t \in [0, t_1]$  рассматривается траектория первого максимума, интегрант преобразованного выражения в момент  $t_1$  имеет вид

$$\left(2 - \frac{1 + t_1}{3}\right) u(t_1) + (1 + (2 + \Delta - t_1))v(t_1).$$

По отношению к моменту  $t_1$  каждая локальная задача сводится к задаче ЛП вида

$$\frac{5-t_1}{3} z_1 + (3 + \Delta - t_1) z_2 \rightarrow \max,$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in U,$$

так как  $\frac{5-t_1}{3} < 3 + \Delta - t_1$  при  $t_1 \leq 2 + \Delta$ , имеем  $z_1 = 0, z_2 = 1$  и соответственно  $u(t_1) = 0, v(t_1) = 1$ , откуда видно, что первый максимум исчез и его траектория перестроилась в траекторию второго максимума.

1. Если многогранник

$$Y(x^*(t)) = \left\{ y : K(x^*(t))y = L(x^*(t)), M(x^*(t))y \geq N(x^0(t)) \right\}$$

не ограничен по некоторому направлению  $y = y_0 + \alpha \tau$ , то значение целевой функции  $J = \langle g(x^*) + \mu(x^*), y \rangle$  может оказаться неограниченным ( $J = -\infty$ ). Эта ситуация иллюстрируется в примере 1.

2. На некотором режиме  $r_i [t_i, t_{i+1}, R_i]$  система уравнений

$$R_i(x^*(t)) \dot{x}^*(t) = P_i(x^*(t))$$

такова, что радиус сходимости решения  $x^*(t)$  ограничен. Простой пример иллюстрирует эту ситуацию

$$x(T) \rightarrow \max,$$

$$0 \leq \dot{x}(t) \leq x^2(t), \quad x(0) = 1, \quad t \in [0, T],$$

$$\dot{x}^*(t) = x^{*2}(t), \quad x^*(t) = \frac{1}{1-t}.$$

Следовательно, задача имеет смысл лишь при  $T < 1$ .

3. Возникновение точки накопления (при  $T \rightarrow T'$ )

$$\exists t^* \in [t_0, T], \forall \varepsilon > 0, \quad \exists r_j [t_j, t_{j+1}, R_j] \Rightarrow [t_j, t_{j+1}] \subset [t^* - \varepsilon, t^* + \varepsilon].$$

В заключение параграфа приводятся примеры, иллюстрирующие изложенные результаты.

**Пример 1.**

$$J[x] = \int_{t_0}^T (-2\mathbb{k}_1 + \mathbb{k}_2) dt \rightarrow \max,$$

$$-\mathbb{k}_1 + \mathbb{k}_2 = x_2, \quad x_1(t_0) = x_{10} > 0,$$

$$\mathbb{k}_1 \geq x_1, \quad x_2(t_0) = x_{20} > 0, \quad \mathbb{k}_2 \geq 0.$$

Решаем вспомогательную задачу ЛП:

$$-2y_1 + y_2 \rightarrow \max,$$

$$-y_1 + y_2 = x_{20},$$

$$y_1 \geq x_{10}, \quad y_2 \geq 0.$$

Очевидно, при любых положительных значениях  $x_{10}$  и  $x_{20}$  решение задачи ЛП будет следующим:

$$-y_1 + y_2 = x_{20},$$

$$y_1 = x_{10}.$$

Соответственно определяется режим исходной задачи:

$$\mathbb{k}_1 = x_1,$$

$$\mathbb{k}_2 = x_1 + x_2.$$

Разрешая эту систему уравнений, имеем:

$$x_1(t) = x_{10} e^{t-t_0},$$

$$x_2(t) = x_{10} e^{t-t_0} (t-t_0) + x_{20} e^{t-t_0}.$$

Установим величину интервала  $T - t_0$ , на котором этот результат сохраняется. Условие  $\mathbb{k}_2(t) > 0$  выполняется при любых  $t$ , а значит и сохраняется конфигурация многогранника ограничений. Поэтому ограничимся проверкой условия

$$\lambda = (g(x(t)) + \frac{\partial}{\partial x(t)} \int_{t_1}^T g(x(x(t), \tau - t_1)) \mathbb{k}(x(t), \tau - t_1) d\tau R^{-1}(x(t))) \neq 0.$$

В рассматриваемом примере

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial x(t)} \int_{t_1}^T g(x(x(t), \tau, t_1), \dot{x}(x(t), \tau, t_1)) d\tau = \\
 & = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{t_1}^T (-2x_1(t)e^{\tau-t} + x_1(t)e^{\tau-t_1} + x_2(t)e^{\tau-t_1}(\tau-t_1) + x_2(t)e^{\tau-t_1}) d\tau, \right. \\
 & \left. \frac{\partial}{\partial x_2} \int_{t_1}^T (-2x_1(t)e^{\tau-t_1} + x_1(t)e^{\tau-t_1} + x_1(t)e^{\tau-t_1}(\tau-t_1) + x_2(t)e^{\tau-t_1}) d\tau \right) = \\
 & = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} (x_1(2 - 2e^{T-t_1} + e^{T-t_1}(T-t_1)) + x_2(e^{T-t_1} - 1)), \right. \\
 & \left. \frac{\partial}{\partial x_2} (x_1(2 - 2e^{T-t_1} + e^{T-t_1}(T-t_1)) + \right. \\
 & \left. + x_2(e^{T-t_1} - 1)) \right) = (2 - 2e^{T-t_1} + e^{T-t_1}(T-t_1), e^{T-t_1} - 1).
 \end{aligned}$$

При  $T - t_o = 1$  возникает необходимость в переключении, так как  $\lambda$  обращается в нуль при  $T - t_1 = 1$ .

Пусть  $T - t_o = T - t_1 + t_1 - t_o = 1 + t_1 - t_o$ . Локальная задача имеет вид:

$$\begin{aligned}
 J[x] &= \int_{t_o}^{t_1} (-\dot{x}_1 + \dot{x}_2) dt \rightarrow \max, \\
 -\dot{x}_1 + \dot{x}_2 &= x_2, \quad \dot{x}_1 \geq x_1, \quad \dot{x}_2 \geq 0, \\
 x_1(t_o) &= x_{1o} > 0, \quad x_2(t_o) = x_{2o} > 0.
 \end{aligned}$$

Вспомогательная задача ЛП

$$\begin{aligned}
 -y_1 + y_2 &\rightarrow \max, \\
 -y_1 + y_2 &= x_{2o}, \quad y_1 \geq x_{1o}, \quad y_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

имеет неединственное решение. В соответствии с теоремой 4.3.2 получим задачу ЛП

$$\begin{aligned}
 y_2 &\rightarrow \max, \\
 -y_1 + y_2 &= x_{2o}, \\
 y_1 &\geq x_{1o}, \\
 y_2 &\geq 0.
 \end{aligned}$$

Эта задача имеет неограниченное решение. Следовательно, исходная задача имеет смысл при  $T - t_o < 1$ .

### Пример 2.

$$\begin{aligned}
 J[x] &= \int_{t_o}^T (\mathbb{k}_1 - \mathbb{k}_2) dt \rightarrow \min, \\
 x_1^2 \mathbb{k}_1 + \mathbb{k}_2 &\geq x_1, \\
 \mathbb{k}_1 + \mathbb{k}_2 &\geq x_2(x_1 - 2), \\
 \mathbb{k}_1 &\geq 0, \quad \mathbb{k}_2 \geq 0, \\
 x_1(t_o) &= x_{1o} = 1, \quad x_2(t_o) = x_{2o} = 1.
 \end{aligned}$$

Исходная задача ЛП имеет неединственное решение. Поэтому переходим в соответствии с теоремой 4.3.3 к следующей задаче:

$$\begin{aligned}
 y_1 - 2y_1z_1 &\rightarrow \min, \\
 y_1 + y_2 &= 1, \quad z_1 + z_2 = 1, \\
 y_1 + y_2 &\geq -1, \quad z_1 + z_2 \geq -1, \\
 y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, &\quad z_1 \geq 0, z_2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

Можно убедиться, что эта задача имеет два изолированных решения:

- 1)  $y_1 = 1, y_2 = 0, z_1 = 1, z_2 = 0$ .
- 2)  $y_1 = 0, y_2 = 1, z_1 = 0, z_2 = 1$ .

В первом случае будет режим

$$\begin{aligned}
 \mathbb{k}_1 &= \frac{1}{x_1}, \quad x_1(t) = \sqrt{2(t - t_o) + 1}, \\
 \mathbb{k}_2 &= 0, \quad x_2(t) = 1.
 \end{aligned}$$

При  $\frac{1}{x_1(T)} = x_1(T)(x_1(T) - 2)$  возникает необходимость в переключении (пассивное неравенство «догоняет» активное). Этому соответствует значение

$$T - t_o = \sqrt{2} + 1, \quad x_1(T) = \sqrt{2} + 1, \quad \mathbb{k}_1(T) = \frac{1}{\sqrt{2} + 1}.$$

В соответствии с локальной задачей второго порядка в случае (теорема 4.2.1) исследуем задачу ЛП

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 &\rightarrow \min, \\ (2\sqrt{2} + 3)y_1 + y_2 &\geq \frac{-1}{\sqrt{2} + 1}, \quad y_1 \geq -(\sqrt{2} + 1), \\ y_1 + y_2 &\geq \frac{1}{\sqrt{2} + 1}, \quad y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

и выясняем, что в момент  $t_1 = t_0 + \sqrt{2} + 1$  возникает переключение и активизируется ограничение

$$\mathbb{k}_1 + \mathbb{k}_2 = x_2(x_1 - 2),$$

но решение задачи ЛП неединственно и поэтому переходим к случаю т. 4.3.3.

Соответствующая задача ЛП имеет вид:

$$\begin{aligned} y_1 + (\sqrt{2} - 1)y_2 &\rightarrow \min, \\ y_1 + y_2 &= \sqrt{2} - 1, \quad y_1 \geq -(\sqrt{2} + 1), \\ (2\sqrt{2} + 3)y_1 + y_2 &\geq -(\sqrt{2} + 1), \quad y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

и имеет единственное регулярное решение. Возникший режим определяется уравнениями

$$\begin{aligned} x_1^2 \cdot \mathbb{k}_1 + \mathbb{k}_2 &= x_1, \\ \mathbb{k}_1 + \mathbb{k}_2 &= x_2(x_1 - 2) \end{aligned}$$

и начальным условием  $x_1(t_1) = \sqrt{2} + 1, x_2(t_1) = 1$ .

Нетрудно установить, что при дальнейшем увеличении отрезка  $[t_0, T]$  возникает третий режим

$$\begin{aligned} \mathbb{k}_2 &= x_2(x_1 - 2), \\ \mathbb{k}_1 &= 0 \end{aligned}$$

с начальным условием  $x_1(t_2)$  и  $x_2(t_2)$ ,

$$J_{[t_2, T]}[x] = \int_{t_2}^T (\mathbb{k}_1 + \mathbb{k}_2) dt = x_2(t_2) e^{(x_1(t_2) - 2)(T - t_2)} - x_2(t_2),$$

$J$  — значение целевой функции на отрезке  $[t_2, T]$ .

Если бы была реализована ветвь, возникающая в другом локальном минимуме ( $y_1 = 0, y_2 = 1, z_1 = 0, z_2 = 1$ ) исходной задачи МП, то возник бы режим

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= x_1, \\ \dot{x}_1 &= 0 \end{aligned}$$

при начальных условиях  $x_1(t_0) = x_2(t_0) = 1$ . В этом случае режим сохраняется при всех значениях  $T - t_0$ . Значение целевой функции при этом будет  $J_2 = T - t_0$ .

Очевидно, что при сравнительно небольших значениях последовательность режимов в первом случае дает меньшее значение целевой функции. Но при больших значениях  $T - t_0$  тот же результат будет при реализации режима, возникающего во втором случае. Таким образом, в момент  $t_0$  происходит «ветвление» режимов. Чтобы найти решение такой задачи, следует исследовать задачу вдоль каждой ветви и выбрать наилучший вариант.

### Пример 3.

$$J[x] = \int_{t_0}^T \dot{x}_2 dt \rightarrow \max,$$

$$\dot{x}_1 + \dot{x}_2 \leq x_1, \quad \dot{x}_1 \geq 0, \quad 0 \leq \dot{x}_2 \leq x_2,$$

$$x_1(t_0) = x_{1o} = 2,$$

$$x_2(t_0) = x_{2o} = 1.$$

Вспомогательная задача ЛП имеет вид (в соответствии с теоремой 4.2.1):

$$y_2 \rightarrow \max,$$

$$y_1 + y_2 \leq 2,$$

$$0 \leq y_2 \leq 1,$$

$$y_1 \geq 0.$$

Ее решение  $y_2 = 1, 0 \leq y_1 \leq 1$ . Исследование вспомогательных задач следующих порядков для выяснения исходного режима не снимает неединственности. Нетрудно убедиться, что возникающий режим  $\dot{x}_2 = x_2$  дает единственное решение по функционалу  $J = x_{2o}(e^{T-t_0} - 1)$  при раз-

личных реализациях  $x_1(t)$ , т. е.  $\mathbb{X}_1 = x_1 - e^{t-t_0} - \varphi(t)$ , где  $\varphi(t)$  — функция, удовлетворяющая условиям  $\varphi(t) \geq 0$ ,

$$e^{-(t-t_0)}\varphi(t) + \int_{t_0}^t e^{-(\tau-t_0)}\varphi(\tau)d\tau \leq (1-t-t_0).$$

Очевидно, что всегда найдется конечный отрезок, на котором эти условия выполняются, если  $t-t_0 < 1$ .

Выберем одну из возможных реализаций  $\mathbb{X}_1(t)$ . Например,  $\mathbb{X}_1(t) = 0$ . Тогда при  $T-t_0 = \ln 2$  получим, что  $\mathbb{X}_1(T)$  и  $\mathbb{X}_2(T)$  определяются тремя уравнениями:

$$\begin{aligned}\mathbb{X}_1(T) + \mathbb{X}_2(T) &= x_1(T), \\ \mathbb{X}_2(T) &= x_2(T), \\ x_1(T) &= 0.\end{aligned}$$

В соответствии с теоремой 4.3.1 получим вспомогательную задачу

$$\begin{aligned}y_2 &\rightarrow \max, \\ y_1 + y_2 &\leq 0, \\ y_2 &\leq 2, \\ y_1 &\geq 0.\end{aligned}$$

Откуда выясняем, что при  $T-t_0 > \ln 2$  в момент  $t_1 = t_0 + \ln 2$  возникает режим  $\mathbb{X}_2 = x_1, \mathbb{X}_1 = 0$  при

$$\begin{aligned}x_2(t) &= x_1(t_1)(t-t_1) + x_2(t_1) = x_{1_0}(t-t_1) + x_2(t_1), \\ x_1(t) &= x_1(t_0) = x_1(t_1).\end{aligned}$$

В этом случае в момент  $t_0$  вспомогательная задача имеет вид:

$$\begin{aligned}y_1(T-t_0-\ln 2) + y_2 &\rightarrow \max, \\ y_1 + y_2 &\leq 2, \\ 0 \leq y_2 &\leq 1, \\ y_1 &\geq 0.\end{aligned}$$

## Глава VI

### Продолжение решений в задачах оптимального управления при наличии функциональных ограничений

Как было показано выше, схема решения задач оптимального управления на основе процедуры продолжения оптимальных траекторий базируется на формировании и решении локальных вариационных задач (ЛВЗ). ЛВЗ всегда являются задачами со свободным правым концом и с фиксированным временным отрезком. То есть для них имеют место только локальные ограничения (текущие ограничения на область управления). В настоящей главе рассматривается возможность распространения процедуры продолжения оптимальных траекторий на задачи с функциональными ограничениями. Специфической чертой применения этой процедуры является возникновение задач с негладкой целевой функцией. В работе рассматриваются лишь задачи первого порядка. Для систем, линейных по управлениям, сохраняется одно из основных преимуществ процедуры продолжения оптимальных траекторий — исходная задача сводится к последовательности задач Коши для систем дифференциальных уравнений.

#### § 1. Задачи оптимального управления с функциональными ограничениями

Начнем с постановки общей задачи оптимального управления со смешанными и функциональными ограничениями:

$$J[u] = F_0(x(T), T) \rightarrow \min, \quad (6.1.1)$$

$$\dot{x}(t) = u(t), \quad x(0) = x_0, \quad (6.1.2)$$

$$f(x(t), u(t)) = 0, \quad (6.1.3)$$

$$g(x(t), u(t)) \geq 0, \quad (6.1.4)$$

где

$$x(\cdot) : [t_0, T] \rightarrow R^n, \quad u(\cdot) : [t_0, T] \rightarrow R^n,$$

$$F_0(\cdot) : R^n \rightarrow R, \quad f(\cdot) : R^n \times R^n \rightarrow R^{m_f}, \quad m_f < n,$$

$$g(\cdot) : R^n \times R^n \rightarrow R^{k_g}.$$

Ограничения (6.1.2)–(6.1.4) называются смешанными локальными. Добавим к ним функциональные ограничения

$$F(x(T^1), x(T^2), K, x(T^l), T^1, T^2, K, T^l) = 0, \quad (6.1.5)$$

$$G(x(T^1), x(T^2), K, x(T^l), T^1, T^2, K, T^l) \geq 0, \quad (6.1.6)$$

где

$$T^i \in (0, T), \quad i = 1, 2, \dots, l-1, \quad T^l = T,$$

$$F(\cdot) : R^n \times R^n \times \dots \times R^{n_f} \rightarrow R^{m_f}, \quad m_f < n,$$

$$G(\cdot) : R^n \times R^n \times \dots \times R^n \rightarrow R^{k_g}.$$

Заметим, что условие  $x(T) \in X$  вписывается в ограничения (6.1.5), (6.1.6), если множество  $X$  можно конструктивно задать.

Задачу (6.1.1)–(6.1.6) будем называть задачей оптимального управления со смешанными и функциональными ограничениями (задача А). При  $l = 1$  задача (6.1.1)–(6.1.6) переходит в традиционную задачу с условиями на правом конце (задача В). Отметим, что функциональные условия интегрального типа

$$\int_{t_0}^T \overline{F}(x(t), u(t)) dt = 0 \quad \text{или} \quad \int_{t_0}^T \overline{G}(x(t), u(t)) dt \geq 0$$

простыми заменами сводятся к условиям (6.1.5)–(6.1.6).

Класс задач (6.1.1)–(6.1.6) является очень важным для оптимального управления. Вне этого класса невозможно корректно сформулировать многие проблемы (например, задачу быстрогодействия). Поэтому рассмотрим подробнее возможности применения процедуры продолжения оптимальных траекторий (ППОТ) к этому классу задач. Начнем с задачи быстрогодействия, так как с позиций ППОТ эта задача является базовой.

## § 2. Оптимальное быстродействие

Пусть целевая функция (6.1.1) имеет вид  $F_0(x(T), T) = T - t_0$

$$\text{и } J[u] = T - t_0 \rightarrow \min. \quad (6.2.1)$$

Пусть также  $l = 1$ . Вектор-функцию ограничений типа (6.1.5) будем писать в виде

$$F^0(x(T), T) = \langle F(x(T), T), F(x(T), T) \rangle = 0 \quad (6.2.2)$$

(сюда включаются также и ограничения вида  $x(T) - a = 0$ , где  $a$  — заданный вектор). Ограничения (6.1.6) запишем в скалярном виде следующим образом:

$$G^0(x(T), T) = \min_i \{G_i(x(T), T)\} \geq 0. \quad (6.2.3)$$

Введем также

$$I(x(T), T) = F^0(x(T), T) - G^0(x(T), T). \quad (6.2.4)$$

Задача с целевой функцией (6.2.1), ограничениями (6.1.2)–(6.1.4) и (6.2.2), (6.2.4), как известно, называется задачей оптимизации по быстродействию (ЗБ). Свяжем с этой задачей следующей:

$$J[u] = I(x(T), T) \rightarrow \min, \quad (6.2.5)$$

$$\dot{x}(t) = u(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad T - \text{fixe}, \quad (6.2.6)$$

$$u(t) \in U(x(t)) = \{u : F(x(t), u(t)) = 0, G(x(t), u(t)) \geq 0\}, \quad (6.2.7)$$

(функции и переменные задачи (6.2.5)–(6.2.7) определены также, как и в задаче (6.1.1)–(6.1.6). Задача (6.2.5)–(6.2.7) — задача со свободным правым концом и для нее можно применять ППОТ.

Справедлива **теорема 6.2.1:**

1°. Пусть существует  $T^*$  такое, что при всех  $T \in (t_0, T^*]$  решение задачи (6.2.5)–(6.2.7) существует.

2°. Пусть  $T_0 = \min\{T : I(x(T), T) = 0\}$  (т. е.  $T_0$  — то значение  $T$  в ППОТ, при котором начинают выполняться ограничения (5), (6)), а  $(x^0(t), u^0(t))$  — соответствующая значению  $T_0$  оптимальная траектория.

Тогда решение ЗБ существует и им является

$$(T^0, x^0(t), u^0(t), t \in [t_0, T_0]).$$

*Доказательство.* То, что  $(x^0(t), u^0(t))$  — допустимая траектория для ЗБ — очевидно. Докажем, что она для нее и оптимальна. Для этого предположим, что существует траектория  $(x^1(t), u^1(t))$  и соответствующее ей значение  $T_1$  доставляющие оптимум ЗБ и такие, что  $T_1 < T_0$ . В силу ППОТ

решение задачи (6.2.5)–(6.2.7) оптимально при каждом  $T_1 \in (t_0, T^*]$ . В то же время, в силу условия  $2^0$ ,  $\min I(x(T_1), T) > 0$ . А значит, при  $T^1$  решение задачи (6.2.5)–(6.2.7) не оптимально, так как существует траектория  $(x^1(t), u^1(t), t \in [t_0, T_1])$ , обеспечивающая  $I(x(T_1), T_1) = 0$ . Противоречие, доказывающее теорему 6.2.1.

Отметим особо, что применение ППОТ к задаче быстрогодействия попутно решает и проблему существования решения. Если, например, при всех  $T$  в результате ППОТ  $I(x(T), T) = 0$ , то решение ЗБ тривиально и  $T_{opt} = t_0$ . Если же ни при каких  $T$  не выполняется  $I(x(T), T) = 0$ , то ЗБ не имеет решения.

### § 3. Особенности применения процедуры продолжения оптимальных траекторий (ППОТ) для задач оптимального управления с функциональными ограничениями

Ясно, что с позиций ППОТ, ограничения (6.1.5) и (6.1.6) во все моменты времени  $T^1, T^2, \dots, T^l$  будут последовательно учтены (если, конечно, удастся довести процедуру до конца). Поэтому, не нарушая общности, можно считать, что  $l = 1$ . Как и в предыдущем разделе, ограничения (6.1.5) и (6.1.6) будем писать соответственно в виде

$$F^0(x(T), T) = \langle F(x(T), T), F(x(T), T) \rangle = 0, \\ G^0(x(T), T) = \min_i \{G_i(x(T), T)\} \geq 0.$$

Использование ППОТ для задачи (6.1.1)–(6.1.6) распадается на два этапа:

1. Достижение области, задаваемой функциональными ограничениями.
2. Реализация ППОТ при наличии контроля за выполнением функциональных ограничений.

1-й этап сводится к решению задачи (6.2.5)–(6.2.7) —

$$J[u] = I(x(T), T) \rightarrow \min,$$

$$\dot{x}(t) = u(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad T - \text{fixe},$$

$$u(t) \in U(x(t)) = \{u : F(x(t), u(t)) = 0, G(x(t), u(t)) \geq 0\},$$

на основе стандартной ППОТ и прекращается, когда достигается  $I(x(T), T) = 0$ . Если это не происходит ни при одном конечном  $T$ , то решение задачи (6.1.1)–(6.1.6) не существует.

2-й этап начинается с  $T = T_0$ ,  $T_0 = \min\{T : I(x(T), T) = 0\}$ . При этом уже имеется последовательность режимов  $R_i(x(t), \dot{x}(t)) = 0$ ,  $t \in [t_{i-1}, t_i]$ , где  $i = 1, 2, \dots, K, N$ ,  $N$  — число режимов,  $t_1, t_2, \dots, t_N = T$  — моменты переключения,  $R_i(\cdot) = \begin{pmatrix} f(\cdot) \\ g_{iA}(\cdot) \end{pmatrix}$ ,  $g_{iA}(\cdot) = 0$  — ограничения типа неравенств (6.1.3), активные на  $i$ -м режиме. Как установлено в предыдущих главах, вдоль каждого режима решается классическая задача Лагранжа с целевой функцией

$$J[u] = I(x(t_i), t_i) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left\langle \mu(x(t), T-t), \dot{x}(t) \right\rangle dt, \quad (6.3.1)$$

при ограничениях

$$R_i(x(t), \dot{x}(t)) = 0, \quad t \in [t_{i-1}, t_i], \quad x(t_{i-1}) \text{ — задано.} \quad (6.3.2)$$

Обеспечивается также непрерывная зависимость оптимального решения  $x^*(t) = \varphi_i(x(t_{i-1}), t - t_{i-1})$  от начального значения  $x(t_{i-1})$  и имеет место  $\det \left( \frac{\partial \varphi_i(y, t - t_{i-1})}{\partial y} \right) \neq 0$  при  $t \in [t_{i-1}, t_i]$ .

Это дает возможность установить зависимость между всеми моментами переключения и выразить  $x(t_j)$  через остальные  $x(t_i), t_i, i \neq j$ . На основе этого свойства вычисляется функция  $\mu(x(t), T-t)$ . При  $T = T_0$  целевая функция (6.3.1) меняется на

$$J[u] = F_0(x(t_i), t_i) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left\langle \mu(x(t), T-t), \dot{x}(t) \right\rangle dt \rightarrow \min, \quad (6.3.3)$$

а к ограничениям  $R_i(x(t), \dot{x}(t)) = 0$  добавляются

$$\hat{F}(x(t_i), T - t_i) = 0, \quad (6.3.4)$$

$$\hat{G}(x(t_i), T - t_i) = 0, \quad (6.3.5)$$

где

$$\hat{F}(x(t_i), T-t_i) = F(\bar{\varphi}_i(x(t_i), T-t_i), \frac{d}{dt} \bar{\varphi}_i(x(t_i), T-t_i)),$$

$$\hat{G}(x(t_i), T-t_i) = G(\bar{\varphi}_i(x(t_i), T-t_i), \frac{d}{dt} \bar{\varphi}_i(x(t_i), T-t_i)),$$

$$\bar{\varphi}_i(x(t_i), T-t_i) = \varphi_N(\varphi_{N-1} \mathcal{K} \varphi_i(x(t_i), T-t_i) \mathcal{K}), \mathcal{K}, T-T_{N-1}).$$

#### § 4. Локальные вариационные задачи в случае негладких функционалов

Рассмотрим следующую задачу

$$J[u] = \min_i \{G_i(x(T)), i=1, 2, \mathcal{K}, k_G\} \rightarrow \max, \quad (6.4.1)$$

$$\dot{x}(t) = u(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (6.4.2)$$

$$f(x(t), u(t)) = 0, \quad (6.4.3)$$

$$g(x(t), u(t)) \geq 0. \quad (6.4.4)$$

1°. Пусть функции  $f(\cdot)$  и  $g(\cdot)$  определены также, как и в теореме 4.1.1, а множество  $Y(x_0) = \{y : f(x_0, y) = 0, g(x_0, y) \geq 0\}$  — строго выпукло.

2°. Пусть для каждого  $i$  имеет место  $G_i(x_0) = G_0$  (именно эта ситуация не тривиальна и представляет интерес для рассмотрения) и, кроме того,  $\left\langle \frac{\partial G_i}{\partial x} \Big|_{x_0}, \dot{x}(t) \right\rangle$  удовлетворяет условию Липшица с константой  $K$  в точке  $x_0$  и ее окрестности.

Свяжем с задачей (6.4.1)–(6.4.4) задачу математического программирования:

$$z \rightarrow \max, \quad (6.4.5)$$

$$z \leq \left\langle \frac{\partial G_i}{\partial x} \Big|_{x_0}, y \right\rangle, \quad (6.4.6)$$

$$f(x_0, y) = 0, \quad (6.4.7)$$

$$g(x_0, y) \geq 0. \quad (6.4.8)$$

3°. Пусть существует максимум  $y^*$  (очевидно, что в силу 1° это единственная точка) задачи (6.4.5)–(6.4.8) и активные ограничения

$$g_A(x_0, y) = 0, \quad z = \left\langle \frac{\partial G_\alpha}{\partial x} \Big|_{x_0}, y \right\rangle, \quad \alpha \in I_A \subset \{1, 2, K, k_G\}$$

устойчивы (т. е. соответствующий им вектор двойственных переменных является точкой, не содержащей нулевых компонент).

4°. Введем точечно-множественные отображения, порожденные возмущением ограничений (6.4.6)–(6.4.8):

$$Y_{FG}(x) = \left\{ y : f(x, y) = 0, g(x, y) \geq 0, \left\langle \frac{\partial G_i}{\partial x} \Big|_{x_0}, y \right\rangle - z \geq 0 \right\}, \quad (6.4.9)$$

$$Y(x) = \left\{ y : f(x, y) = 0, g(x, y) \geq 0, \left\langle \frac{\partial G_i}{\partial x} \Big|_{x_0}, y \right\rangle - z \geq 0 \right\}. \quad (6.4.10)$$

Пусть отображение  $Y_{FG}(x)$  — строго выпуклозначно и

$$\text{dis}(Y(x), Y(x_0)) \leq \text{const} |x - x_0|, \quad (6.4.11)$$

где  $\text{dis}(\cdot, \cdot)$  — хаусдорфово расстояние между множествами.

**Теорема 2.** Если задача (6.4.1)–(6.4.4) удовлетворяет условиям 1°–4°, то

- (а) существует отрезок  $[t_0, T]$  и окрестность  $U(x_0)$  точки  $x_0$  такие, что существует абсолютно непрерывная вектор-функция  $x^*(t)$ , начинающаяся из  $U(x_0)$  и являющаяся решением задачи (6.4.1)–(6.4.4);
- (б) условие  $g_A(x^*(t), x^*(t)) = 0$  с необходимостью выполняется при  $t \in [t_0, T]$ ;
- (в) при  $t \in [t_0, T]$  имеет место  $G_i(x(t)) = G_j(x(t))$ ,  $i, j \in I_A$ .

Теорема 2 имеет очевидное **следствие**: Если в условии 3° имеют место только устойчивые ограничения, то для указанных в теореме 2  $U(x_0)$ ,  $[t_0, T]$ , решение задачи (19)–(22) сводится к задаче

$$J[x] = G_\beta(x(T)) \rightarrow \max, \quad \forall \beta \in I_A, \quad (6.4.12)$$

$$f(x(t), \dot{x}(t)) = 0, \quad (6.4.13)$$

$$g_A(x(t), \dot{x}(t)) = 0, \quad (6.4.14)$$

$$G_i(x(t)) = G_j(x(t)), \quad i, j \in I_A, \quad i \neq j \neq \beta, \quad x_0 \in U(x_0). \quad (6.4.15)$$

*Доказательство.* Выпишем задачу оптимального управления

$$J[u] = \min_i \{ \overline{G}_i(x(T)), i = 1, 2, \dots, K, k_G \} \rightarrow \max, \quad (6.4.1')$$

где

$$\overline{G}_i(x(T)) = G_0 + \int_{t_0}^T \left\langle \frac{\partial G}{\partial x} \Big|_{x_0}, \dot{x}(t) \right\rangle dt,$$

$$\dot{x}(t) = u(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (6.4.2')$$

$$f(x_0, u(t)) = 0, \quad g(x_0, u(t)) \geq 0. \quad (6.4.3')$$

Ясно, что  $\dot{x}(t) = y^*$  является решением задачи (6.4.1')–(6.4.3') и оно не зависит от величины  $T - t_0$ .

Далее доказательство этой теоремы полностью следует схеме доказательства теоремы 4.1.1 и основано на эксплуатации свойства устойчивости активных ограничений задачи МП (6.4.5)–(6.4.8).

Рассмотренная выше локальная вариационная задача является задачей 1-го порядка. Необходимость в задачах более высоких порядков возникают, если отказаться от требования строгой выпуклости. В этом случае типичной является задача с линейной зависимостью от функции управления, рассматриваемая ниже.

## § 5. Локальная вариационная задача первого порядка для задач, линейных по управлениям, при негладкой целевой функции вида

Напомним, что задача оптимального управления, линейная по управляющим воздействиям, со свободным правым концом и с негладкой целевой функцией типа, имеет вид:

$$J[u] = \min_i \{ G_i(x(T), T), i = 1, 2, \dots, K, k_G \} \rightarrow \max, \quad (6.5.1)$$

$$\dot{x}(t) = u(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (6.5.2)$$

$$K(x(t))u(t) = L(x(t)), \quad (6.5.3)$$

$$M(x(t))u(t) \geq N(x(t)), \quad (6.5.4)$$

где

$$x(\cdot) : [t_0, T] \rightarrow R^n, \quad K(\cdot) : R^n \rightarrow R^{k \times n}, \quad L(\cdot) : R^n \rightarrow R^k, \quad k < n,$$

$$M(\cdot) : R^n \rightarrow R^{m \times n}, \quad N(\cdot) : R^n \rightarrow R^m.$$

Вспомогательная задача МП (6.4.5)–(6.4.8) переходит в задачу линейного программирования и имеет вид:

$$z \rightarrow \max, \quad (6.5.5)$$

$$z \leq \left\langle \frac{\partial G_i}{\partial x} \Big|_{x_0}, y \right\rangle, \quad (6.5.6)$$

$$K(x_0)y = L(x_0), \quad (6.5.7)$$

$$M(x_0)y \geq N(x_0). \quad (6.5.8)$$

1°. Пусть имеется регулярное решение (единственное по прямым и двойственным переменным) задачи (6.5.5)–(6.5.8) и оно определяется набором активных ограничений  $M_A(x_0)y = N_A(x_0)$ ,  $z = \left\langle \frac{\partial G_\alpha}{\partial x} \Big|_{x_0}, y \right\rangle$ ,

$$\alpha \in I_A \subset \{1, 2, K, k_G\}.$$

Введем обозначение

$$Y(x) = \left\{ y : M(x_0)y \geq N(x_0), \left\langle \frac{\partial G_i}{\partial x} \Big|_{x_0}, y \right\rangle - z \geq 0 \right\}. \quad (6.5.9)$$

2°. Пусть  $dis(Y(x), Y(x_0)) \leq \text{const} |x - x_0|$ .

3°. Пусть  $\text{rank} \begin{pmatrix} K(x_0) \\ M_A(x_0) \end{pmatrix} = \text{dim} \begin{pmatrix} L(x_0) \\ N_A(x_0) \end{pmatrix}$  и все компоненты матриц

$K(x)$ ,  $M(x)$ ,  $L(x)$ ,  $N(x)$  — непрерывно дифференцируемые функции.

4°. Пусть выполняется условие 1° теоремы 6.4.1.

Ясно, что решение задачи (6.4.1), (6.5.1)–(6.5.4), следуя теореме 6.4.1, достигается на уравнениях  $\begin{pmatrix} K(x(t)) \\ M_A(x(t)) \end{pmatrix} \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} L(x(t)) \\ N_A(x(t)) \end{pmatrix}$ , определяющих ту грань многогранника (6.5.3), (6.5.4), на которой достигается оптимальное решение. Однако этого, вообще говоря, не достаточно, чтобы определить его однозначно, если только  $I_A$  не состоит из одного номера (тогда  $\dim \begin{pmatrix} L(x(t)) \\ N_A(x(t)) \end{pmatrix} = n$ ). И для разрешения ситуации нужны задачи более высоких порядков.

## § 6 Продолжение решений в задаче, линейной по управлениям, с незакрепленным временем

Рассмотрим следующую задачу с фиксированными левым и правым концами и незакрепленным временем:

$$J[u] = \int_{t_0}^T \langle g(x), u \rangle dt \rightarrow \min, \quad \dot{x}(t) = u(t), \quad (6.6.1)$$

$$K(x)u = L(x), \quad (6.6.2)$$

$$M(x)u \geq N(x), \quad (6.6.3)$$

$T$  — не фиксировано,

$$x(t_0) = x_0, x(T) = x_T. \quad (6.6.4)$$

Решим задачу о быстродействии с линейными ограничениями (6.6.2)–(6.6.4), т. е. найдем такой отрезок  $[t_0, T^*]$ , что

$$\int_{t_0}^{T^*} (x(t) - x_T) \dot{x}(t) dt + \frac{1}{2}(x_T - x_0)^2 = \frac{1}{2}(x(T^*) - x_T)^2 = 0$$

(если такое  $T^*$  не найдется, то это означает, что точка  $x_T$  недостижима и задача не имеет смысла). Определим значение целевой функции (6.6.1) при  $T = T^*$  и найденном в результате решения задачи о быстродействии  $x(t)$

$$J[x] = \int_{t_0}^{T^*} \langle g(x), u \rangle dt = c.$$

Вводим новую переменную  $x^o(t) - \int_t^T \langle g(x), u \rangle dt$ . Тогда  $x^o(t_o) = c$ ,  $x^o(T) = 0$ ,  $\dot{x}^o + g(x)\dot{x} = 0$ . Добавляя это равенство к равенствам (6.6.2), компоненту  $x^o$  к вектору  $x$ , и в силу этого меняя обозначения ограничений (6.6.2)–(6.6.5), получим:

$$K'(x')u' = L'(x'), \quad (6.6.5)$$

$$M'(x')u' \geq N'(x'). \quad (6.6.6)$$

Таким образом оказывается, что решена задача о быстродействии с ограничениями (6.6.5)–(6.6.6).

Задача о быстродействии решается, как задача с целевой функцией

$$J'[x] = \int_{t_o}^{T^*} (x'(t) - x'_T)u'(t)dt + \frac{1}{2}(x'_o - x'_T)^2 \quad (6.6.7)$$

с ограничениями (6.6.5)–(6.6.6) и начальными условиями  $x'(t_o) = x'_o$ , где компонента  $x_o(t_o) = c$ , и условиями, определяющими границы режимов. Имея решения задачи Коши для режимов, можно эти условия привести к моменту  $t_o$ . Считая  $x^o(t_o)$  параметром, можно установить связь между  $x^o(t_o)$  и  $T$ , полагая  $T = f(x^o(t_o))$ . Очевидно, что  $f(\cdot)$  — монотонно убывающая функция

$$\int_{t_o}^T \langle (x'(t) - x'_T), u' \rangle dt + \frac{1}{2}(x'_T - x'_o)^2 = 0$$

вдоль последовательности полученных режимов, пока выполняются соответствующие условия. Изменяем  $x^o(t_o)$  в сторону уменьшения до нарушения какого-либо из этих условий. Устанавливаем возникающие режимы и т. д.

Уменьшаем  $x^o(t_o)$ , устанавливая по ходу все вновь возникающие режимы до тех пор, пока не наступит ситуация, при которой множество значений  $x^{o*}(t_o)$  не стянется в точку. Этому будет соответствовать нарушение условий Слейтера во вспомогательной задаче математического программирования, которая формируется, чтобы определить новый режим.

Если же такая ситуация не наступит никогда, то значение целевой функции (6.6.1) не ограничено снизу и задача (6.6.1)–(6.6.4) не имеет смысла. Установленное значение  $x^{o*}(t_o)$  является оптимальным значе-

нием целевой функции (6.6.1) при  $x(t)$ , получающемся из соответствующей последовательности режимов. Если в задаче (6.6.1)–(6.6.4) условие на правый конец имеет вид  $\bar{F}(x(T)) \leq 0$ ,  $\bar{F}(y)$  удовлетворяет тем же условиям, что и в задаче о быстродействии, то могут иметь место две ситуации.

1.  $\bar{F}(x_o) > 0$ . В этом случае решаем задачу с целевой функцией

$$J[u] = \int_{t_o}^T \left( \frac{\partial \bar{F}}{\partial x} \dot{x} + (x^o(t) - x^o(T)) \dot{x}^o(t) \right) dt + F(x_o) + \frac{1}{2} (x^o(t_o) - x_o(T))^2,$$

так же, как и задачу (6.6.1)–(6.6.4).

2.  $\bar{F}(x_o) \leq 0$ . Решаем задачу с целевой функцией (6.6.1), но к ограничениям добавим  $\bar{F}(x(t)) \leq 0$ .

Рассмотрим, наконец, случай, когда в задачах

$$J_1[u] = T - t_o \rightarrow \min, \quad J_2[u] = \int_{t_o}^T \langle g(x), u \rangle dt \rightarrow \min,$$

$$K(x) \dot{x} = L(x),$$

$$M(x) \dot{x} \geq N(x)$$

условия на правый конец имеют вид  $G(x(T)) \leq 0$ , где  $G(x(T))$  — вектор-функция с  $n_1$  компонентами, причем  $\frac{\partial G_j(y)}{\partial y_i}$  существуют и непрерывны,  $i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n_1}$ .

В случае быстродействия сведение этой задачи к задаче со свободным правым концом приводит к целевой функции вида

$$J'[u] = \max G_j(x(T)) \rightarrow \min,$$

если  $G(x_o) > 0$ .

Предположим, что среди  $G_i(x_o)$  найдется  $G_\alpha(x_o)$  максимальное. Очевидно, что локальная задача в этом случае имеет вид:

$$J^1[u] = \int_{t_o}^T \left\langle \frac{\partial G_\alpha}{\partial x}, u \right\rangle dt + G_\alpha(x_o) \rightarrow \min,$$

$$K(x)u = L(x),$$

$$M(x)u \geq N(x),$$

$$\dot{x} = u.$$

Отрезок  $[t_0, T]$  «растягиваем» до тех пор, пока  $G_\alpha(x(T))$  не станет равным  $G_\beta(x(T))$ .

Нетрудно убедиться, что решать далее задачу, увеличивая интервал  $[t_0, T]$ , следует уже с целевой функцией

$$\begin{aligned} J_1[u] &= \frac{1}{2}(G_\alpha(x(T)) - G_\beta(x(T)))^2 = \\ &= \int_{t_0}^T \frac{\partial}{\partial x}(G_\alpha(x) - G_\beta(x)) \dot{x} dt + \frac{1}{2}(G_\alpha(x_0) - G_\beta(x_0))^2 \end{aligned}$$

и по мере того, как будут достигаться очередные компоненты  $G_j(x(T))$ , к целевой функции при соответствующих значениях  $T - t_0$  будут добавляться члены

$$\int_{t_0}^T \frac{\partial}{\partial x}(G_\alpha(x) - G_j(x)) \dot{x} dt + \frac{1}{2}(G_\alpha(x_0) - G_j(x_0))^2,$$

пока при некотором  $T^* - t_0$  не реализуется  $G(x(T^*)) \leq 0$ .

Значение  $T^* - t_0$  и соответствующая последовательность режимов будут решениями задачи о быстродействии.

Задача с целевой функцией  $J_2[x]$  решается, как и задача (6.6.1)–(6.6.4).

## Глава VII

# Вычисление оптимальных траекторий на основе процедуры продолжения решений в системах, линейных по управлениям

Глава посвящена вопросам построения численных методов для задач, линейных по управлениям, со свободным правым концом. В основу вычислительных алгоритмов положена процедура продолжения оптимальных траекторий. Следуя результатам, полученным в предыдущих главах, основным вычислительным элементом предлагаемых алгоритмов является решение задачи Коши вдоль каждого режима. Получение новых режимов в процессе наращивания длины оптимальной траектории сводится к решению специальных задач математического программирования размерности, не превышающей числа переменных исходной динамической задачи [78, 80, 82].

### § 1. Специфика задач МП, возникающих в локальных вариационных задачах

В локальной задаче первого порядка и некоторых локальных задачах второго порядка возникают задачи ЛП. Основным обстоятельством, которое следует учитывать при численном решении задач ЛП, является необходимость в выяснении структуры оптимального решения (единственность и неединственность решения, ранг базисной матрицы, количество активизированных ограничений). Существуют различные модификации симплекс-метода, применяя которые, можно установить структуру решения.

Следует отметить, что в реальных расчетах маловероятно, что оптимальная вершина во вспомогательной задаче ЛП для локальной задачи первого порядка будет переопределена более чем  $n + 1$  плоскостью, и поэтому решение задачи ЛП в этой локальной задаче будет достигаться за один шаг симплекс-метода. Таким образом, этот случай в вычислительном отношении, как правило, сравнительно прост.

В локальной задаче второго порядка возникает задача МП с билинейной целевой функцией и линейным ограничением вида

$$I = y^T (C + Az) \rightarrow \min_{y,z}, \quad (7.1.1)$$

$$B_1 y = b_1, \quad B_2 z \geq b_2, \quad (7.1.2)$$

$$B_1 z = b_1, \quad B_2 z \geq b_2. \quad (7.1.3)$$

Билинейная функция (7.1.1) не обладает свойством выпуклости, и поэтому решение задачи (7.1.1)–(7.1.3) может достигаться, вообще говоря, на нескольких локальных экстремумах. При этом каждый из локальных экстремумов, в которых достигается одно и то же наилучшее значение (т. е. все они глобальные экстремумы), определяет соответствующую ветвь оптимальной траектории. Для перечисления всех этих экстремумов (если нужны все ветки оптимальной траектории) могут потребоваться существенные вычислительные затраты. Однако в реальных расчетах маловероятно, что ребро, на котором достигается оптимальное решение задачи ЛП в локальной задаче первого порядка, будет иметь размерность, большую единицы. Это означает, что многогранники (7.1.2) и (7.1.3) будут иметь по две вершины и соответственно локальных экстремумов будет также только два.

В этом случае для поиска глобального экстремума следует использовать процедуру отсекающих плоскостей (см. работы [74–76]).

В случае локальной задачи второго порядка, которая сводится к теореме 4.3.3, возникает задача МП вида

$$y^T A z + a u \rightarrow \min_{y, z, u}, \quad (7.1.4)$$

$$(B + C(z))y = D u, \quad u \geq 0, \quad (7.1.5)$$

$$F y = f, \quad G y \geq g, \quad (7.1.6)$$

$$F z = f, \quad G z \geq g, \quad (7.1.7)$$

где  $C(z)$  — матрица, элементы которой являются линейными функциями  $z$ .

Задача (7.1.4)–(7.1.7) отличается от задачи (7.1.1)–(7.1.3) тем, что в ней имеются билинейные ограничения типа равенств (7.1.5). В общем случае для решения этой задачи можно использовать процедуру отсекающих плоскостей одновременно с шагами симплекс-метода по переменным  $z$  и  $u$ .

## § 2. Численное решение задачи Коши для системы дифференциальных уравнений вдоль режима, вычисление производных и сопряженная задача

Выпишем условия возникновения новых режимов как условия существования режимов на отрезках

$$g(x(t_i)) + \Phi_i(x(t_i)), T - t_{N-1}, \dots, t_{i+1} - t_i) R_i^{-1}(x) \neq 0, \quad (7.2.1)$$

$$g(\varphi_i(x(t_i), t_{i+1} - t_i))R_i^{-1}(\varphi_i(x(t_i), t_{i+1} - t_i)) \neq 0, \quad (7.2.2)$$

$$\det R_i(\varphi_i(x(t_i), t_{i+1} - t_i)) = 0, \quad (7.2.3)$$

$$M_i''(\varphi_i(x(t_i), t_{i+1} - t_i))\psi_i(x(t_i), t_{i+1} - t_i) - N_i''(\varphi_i(x(t_i), t_{i+1} - t_i)) \neq 0, \quad (7.2.4)$$

где

$$\Phi_i(x(t_i), T - t_{N-1}, \dots, t_{i+1} - t_i) = \sum_{j=i}^{N-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} g^T(x^*(t)) \mathfrak{K}^*(t) dt,$$

$$x^*(t) = \varphi_j(x^*(t_j), t - t_j)$$

— оптимальное решение на отрезке  $[t_j, t_{j+1}]$ .

Интегрирование системы уравнений

$$R_i(x(t)) \mathfrak{K}(t) = P_i(x(t))$$

или

$$\mathfrak{K}(t) = R_i^{-1}(x(t)) P_i(x(t))$$

при  $x(t_i) = x_{t_i}$  принципиальных трудностей не вызывает. Для численного решения этой задачи выгодно использовать методы с переменным шагом. Необходимость на каждом шаге обращать матрицу заметно увеличивает объем вычислений, но эта трудность носит принципиальный характер.

Следует отметить, что одновременно с каждым шагом процедуры интегрирования системы необходимо производить проверку условий (7.2.4)

$$M_i''(x(t))R_i^{-1}(x(t))P_i(x(t)) - N_i''(x(t)) > 0,$$

где  $M_i''(x)\mathfrak{K} - N_i''(x) > 0$  — пассивные неравенства на  $i$ -м режиме.

Условие (7.2.3) проверяется на каждом шаге автоматически, в связи с необходимостью на каждом шаге обращать матрицу.

Получив численно траекторию  $x(t)$  на оптимальном режиме  $r_i$   $[t_i, t_{i+1}, R_i]$ , можно затем вычислить производные

$$\frac{\partial \varphi_{i+1}(x(t_i), t - t_i)}{\partial x(t_i)}, \quad (7.3.1)$$

проинтегрировав численно для этого следующие  $n$  систем линейных дифференциальных уравнений (процедура А)

$$\left( \frac{\partial \phi_{i+1}(x(t_i), t-t_i)}{\partial x_\alpha(t_i)} \right)' = \frac{\partial}{\partial x} (R_{i+1}^{-1}(x)P_{i+1}(x)) \Big|_{x(t)} \frac{\partial \phi_{i+1}(x(t_i), t-t_i)}{\partial x_\alpha(t)}, \quad (7.3.2)$$

$$\alpha = \overline{1, n}$$

с начальными условиями

$$\frac{\partial \phi(x(t_i), 0)}{\partial x_\alpha(t_i)} = \delta_{\alpha\beta}, \quad \beta = \overline{1, n}.$$

Вычисление интеграла

$$\int_\tau^T \frac{\partial}{\partial x(\tau)} g^T(x(t)) \mathbb{K}(t) dt,$$

где  $x(t) = \phi_i(x(\tau), t-\tau)$  при наличии производных (7.3.1) на каждом из имеющихся режимов при различных значениях  $\tau$  не вызывает затруднений и позволяет вести проверку условий (7.2.1).

Процедуру вычисления выражения

$$\lambda_i(\tau) = \left( \int_\tau^T \frac{\partial}{\partial x(\tau)} (g(x(x(\tau), t-\tau)) \mathbb{K}(x(\tau), t-\tau)) dt + g(x(\tau)) \right) R_i^{-1}(x(\tau))$$

и проверки условий  $\lambda_i(\tau) \neq 0$  можно организовать более компактно следующим образом (процедура В).

Рассмотрим последний из имеющихся режимов  $r_N [t_{N-1}, T, R_N]$  при данном значении  $T - t_o$ .

Тогда

$$\lambda_N(\tau) R_N(x(\tau)) = g(x(\tau)) + \int_\tau^T \frac{\partial}{\partial x} (g(x) R_N^{-1}(x) P_N(x)) \Big|_{x(t)} \frac{\partial \phi_N(x(t), t-\tau)}{\partial x(\tau)} dt.$$

Введем обозначение

$$v_N(\tau) = \int_\tau^T \frac{\partial}{\partial x} (g(x) R_N^{-1}(x) P_N(x)) \Big|_{x(t)} \frac{\partial \phi_N(x(t), t-\tau)}{\partial x(\tau)} dt. \quad (7.3.3)$$

Так как имеют место соотношения

$$x(t) = \Phi_N(x(\tau), t - \tau) = \Phi_N(x(T), t - T),$$

$$x(\tau) = \Phi_N(x(T), \tau - T),$$

$$\frac{\partial \Phi_N(x(\tau), t - \tau)}{\partial x(\tau)} \cdot \frac{\partial \Phi_N(x(T), \tau - T)}{\partial x(T)} = \frac{\partial \Phi_N(x(T), t - T)}{\partial x(T)},$$

перепишем выражение (7.3.3) в виде

$$\begin{aligned} v_N(\tau) = \\ = \left( \int_{\tau}^T \frac{\partial}{\partial x} (g(x)R_N^{-1}(x)P_N(x)) \Big|_{x(t)} \cdot \frac{\partial \Phi_N(x(T), t - T)}{\partial x(T)} dt \right) \cdot \left( \frac{\partial \Phi_N(x(T), \tau - T)}{\partial x(T)} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что

$$\Phi_N(\tau) = \left( \frac{\partial \Phi_N(x(T), \tau - T)}{\partial x(T)} \right)^{-1}$$

удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению

$$\dot{\Phi}_N(\tau) = -\Phi_N(\tau) \frac{\partial}{\partial x} (R_N^{-1}(x)P_N(x)) \Big|_{x(\tau)}, \quad \tau \in [t_{N-1}, T]$$

(это уравнение является сопряженным к системе уравнений (7.3.2) с начальным условием  $\Phi_N(T) = E$ ).

Нетрудно убедиться, что  $v(\tau)$  в свою очередь удовлетворяет системе уравнений

$$\dot{v}_N(\tau) = -v_N(\tau) \frac{\partial}{\partial x} (R_N^{-1}(x)P_N(x)) \Big|_{x(\tau)} - \frac{\partial (g^T(x)R_N^{-1}(x)P_N(x))}{\partial x} \Big|_{x(\tau)}.$$

с начальным условием  $v_N(T) = 0, \tau \in [t_{N-1}, T]$ . Так как

$$\lambda_N(\tau)R_N(x(\tau)) = g(x(\tau)) + v_N(\tau),$$

нетрудно получить систему дифференциальных уравнений для  $\lambda_N(\tau)$ .

Эта система имеет вид

$$\begin{aligned} & \mathfrak{L}_N(\tau)R_N(x(\tau)) = \\ & = -\lambda_N(\tau) \frac{\partial P_N(x)}{\partial x} \Big|_{x(\tau)} + P_N(x(\tau))R_N^{-1}(x(\tau)) \left( \frac{\partial g(x)}{\partial x} \Big|_{x(\tau)} - \left( \frac{\partial g(x)}{\partial x} \right)^T \Big|_{x(\tau)} \right). \end{aligned}$$

Начальное условие  $\lambda_N(T)R_N(x(T)) = g(x(T))$ .

Можно далее убедиться, что для

$$\begin{aligned} v_{N-1}(\tau) = & \int_{\tau}^{t_{N-1}} \frac{\partial}{\partial x} (g(x)R_{N-1}^{-1}(x)P_{N-1}(x)) \Big|_{x(t)} \cdot \frac{\partial \Phi_{N-1}(x(\tau), t - \tau)}{\partial x(\tau)} dt + \\ & + \int_{t_{N-1}}^T \frac{\partial}{\partial x} (g(x)R_{N-1}^{-1}(x)P_N(x)) \Big|_{x(t)} \cdot \frac{\partial \Phi_N(x(t_{N-1}), t - t_{N-1})}{\partial x(t_{N-1})} \cdot \frac{\partial \Phi_{N-1}(x(\tau), t_{N-1} - \tau)}{\partial \tau} dt \end{aligned}$$

(рассматривается предпоследний режим  $r_{N-1}[t_{N-1}, t_N, R_{N-1}]$ ) имеет место система уравнений

$$\begin{aligned} & \mathfrak{L}_{N-1}(\tau) = \\ & = -v_{N-1}(\tau) \frac{\partial}{\partial x} (R_{N-1}^{-1}(x)P_{N-1}(x)) \Big|_{x(\tau)} - \frac{\partial (g(x)R_{N-1}^{-1}(x)P_{N-1}(x))}{\partial x} \Big|_{x(\tau)} \end{aligned}$$

с начальным условием

$$v_{N-1}(t_{N-1}) = \lambda_N(t_{N-1})R_N(x(t_{N-1})) - g(x(t_{N-1})).$$

И соответственно для  $\lambda_{N-1}(\tau)$ , определяемого соотношением

$$\lambda_{N-1}(\tau)R_{N-1}(x(\tau)) = g(x(\tau)) + v_{N-1}(\tau),$$

возникает система уравнений

$$\begin{aligned} & \mathfrak{L}_{N-1}(\tau)R_{N-1}(x(\tau)) = \lambda_{N-1}(\tau) \frac{\partial P_{N-1}(x)}{\partial x} \Big|_{x(\tau)} + \\ & + P_{N-1}(x(\tau))R_{N-1}^{-1}(x(\tau)) \left( \frac{\partial g(x)}{\partial x} \Big|_{x(\tau)} - \left( \frac{\partial g(x)}{\partial x} \right)^T \Big|_{x(\tau)} \right) \end{aligned}$$

с начальным условием

$$\lambda_{N-1}(t_{N-1})R_{N-1}(x(t_{N-1})) = \lambda_N(t_{N-1})R_N(x(t_{N-1})).$$

И вообще на режиме  $r_i [r_{i-1}, r_i, R_i]$  вектор  $\lambda_i(\tau)$  определяется в результате решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \lambda_i'(\tau)R_i(x(\tau)) &= -\lambda_i(\tau)\frac{\partial P_i(x)}{\partial x} + \\ &+ P_i(x(\tau))R_i^{-1}(x(\tau))\left(\frac{\partial g(x)}{\partial x}\Big|_{x(\tau)} - \left(\frac{\partial g(x)}{\partial x}\Big|_{x(\tau)}\right)^T\right), \end{aligned} \quad (7.3.4)$$

$$\lambda_i(t_i)R_i(x(t_i)) = \lambda_{i+1}(t_i)R_{i+1}(x(t_i)), \tau \in [t_{i-1}, t_i], i = \overline{1, N}.$$

Следует отметить, что интегрирование систем уравнений для нахождения  $\lambda_i(\tau)$  идет в обратном направлении (от  $T$  к  $t_o$ ) по отношению к процедуре получения вектора  $x(t)$ . Иными словами,  $t + \tau = T - t_o$ . Следует также отметить, что условие (7.2.1) принимает вид  $\lambda_i(\tau) \neq 0, \tau \in [t_{i-1}, t_i]$  и проверяется по ходу интегрирования системы уравнений (7.3.4).

### § 3. Блок-схема вычислительного алгоритма

С учетом использования описанных в предыдущем параграфе процедур А или В можно представить вычислительный алгоритм в виде соответственно блок-схем А и В.

#### Блок-схема А

$0$  — отрезок, на котором решается задача, увеличивается на величину  $\Delta T$ . Величина  $\Delta T$  выбирается равной величине  $\Delta \tau$ , которая находится из условия:

$$\begin{aligned} \max & \left| \Phi_{i+1}(x(t_i + \Delta \tau), t - t_i - \Delta \tau) - \Phi_{i+1}(x(t_i), t - t_i - \Delta \tau) - \right. \\ & \left. - \frac{\partial \Phi_{i+1}(x(t_i), t - t_i - \Delta \tau)}{\partial x(t_i)} \cdot (\Phi_{i+1}(x(t_i), \Delta \tau) - x(t_i)) \right| \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

где  $\varepsilon$  — точность интегрирования,  $\Phi_{i+1}(x(t_i), t - t_i)$  — траектория задачи на режиме  $r_i [t_i, t_{i+1}, R_i], i = \overline{0, N-1}$ .

Затем в соответствии с выбранной величиной  $\Delta T$  определяется вектор  $\Delta x = \varphi_1(x_o, \Delta T) - x_o$ .

1. Для всех режимов  $r_i [t_i, t_{i+1}, R_i], i = \overline{0, N-1}$  при  $t \in [t_o, T]$  рассчитываются новые траектории  $\bar{x}(t)$ , учитывающие возмущения  $\Delta x$  начальных условий  $x_o$  по формулам

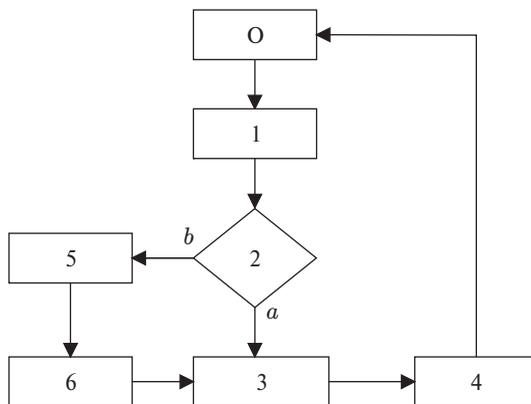


Рис. 5. Блок-схема А

$$\bar{x}(t) = x(t) + \frac{\partial \varphi_{i+1}(x(t_i), t-t_i)}{\partial x(t_i)} \cdot \frac{\partial \varphi_i(x(t_{i-1}), t-t_{i-1})}{\partial x(t_{i-1})} \dots \frac{\partial \varphi_0(x_0, t-t_0)}{\partial x_0} \Delta x, i = \overline{N-1}$$

2. Проверяются на новых траекториях  $\bar{x}(t)$  условия (7.2.1)–(7.2.4).

Выход «а» — нарушены условия, которые приводят к уже имеющимся режимам.

Выход «в» — нарушены новые условия.

3. Корректируются моменты переключения  $t_i$ , которые на отрезке  $[t_0, T + \Delta T]$  «смещаются» из-за возмущения  $\Delta x$  начальных условий  $x_0$ .

4. На каждом из скорректированных отрезков

$$[t_i, t_{i+1}], \quad i = \overline{N-1}, \quad t_N = T + \Delta T, \quad \mathbf{U}[t_i, t_{i+1}] = [t_0, T + \Delta T]$$

с учетом траектории  $\bar{x}$  интегрируются системы уравнений вида (7.3.2) и в результате вычисляются

$$\frac{\partial \Phi_{i+1}(x(t_i), t-t_i)}{\partial x(t_i)}, \quad t \in [t_i, t_{i+1}], i = \overline{N-1}.$$

5. Решается и исследуется задача МП. Выясняется новый режим.

### Блок-схема В

1. Вдоль нового режима интегрируется соответствующая система уравнений. Очевидно, что при увеличении исходного отрезка  $[t_o, T]$  на достаточно малую величину  $\Delta T$ , длительность нового режима также будет мала. Однако траекторию вдоль нового режима следует получать на достаточно большом отрезке (например, длины  $T^* - t_o$ , где  $[t_o, T^*]$  — отрезок, для которого решается вся задача). В процессе решения задачи используются куски этой траектории, а вся траектория целиком корректируется в блоке 1.

0 — интервал, на котором решается задача, увеличивается на величину  $\Delta T$ . Величина  $\Delta T$  выбирается по порядку такой же, как шаг интегрирования.

1П. Интегрируется система уравнений вдоль каждого имеющегося режима  $r_i [t_i, t_{i+1}, R_i]$  для получения траектории  $x(t)$ . Интегрирование ведется в прямом времени (от  $t_o$  к  $T$ ). На каждом шаге интегрирования происходит обращение к блоку 2П.

1С. Интегрирование системы уравнений вида (7.3.4) в обратном времени вдоль данного режима (по отношению к 1П) для получения  $\lambda_i(\tau)$  (переменных, сопряженных к  $x(t)$  на соответствующих отрезках  $[t_{i-1}, t]$ ). В записи систем (7.3.4) используется ранее полученная траектория  $x(t)$ . Интегрирование ведется в обратном времени (от  $T$  к  $t_o$ ). На каждом шаге интегрирования происходит обращение к блоку 2С, проверяются условия существования режимов.

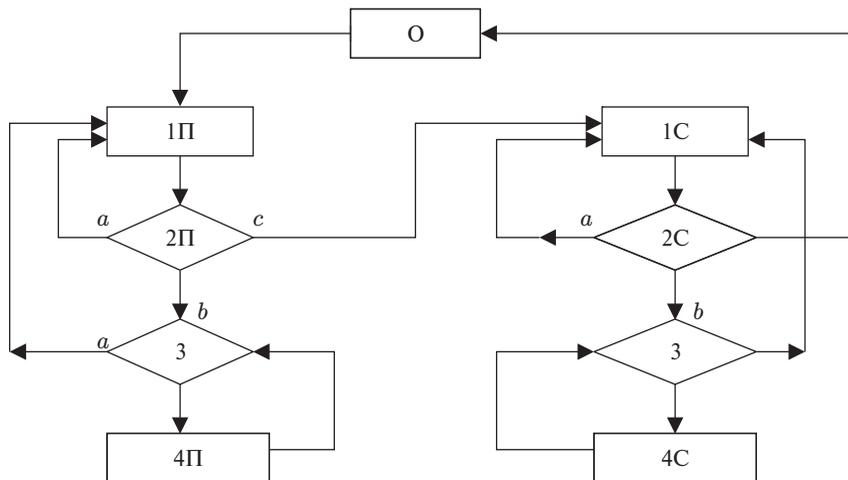


Рис. 6. Блок-схема В

2П, 2С. Проверяются условия (7.2.1)–(7.2.4).

- Выход «а» — если условия не нарушены.
- Выход «b» — если условия нарушены.
- Выход «с» — если исчерпан интервал, на котором решается задача.

3. Переход к интегрированию соответствующей системы уравнений вдоль нового режима (из имеющихся в списке) в результате нарушения условий (7.2.1)–(7.2.4) (выход «а»).

Выход «b» — нарушены условия, которых нет в списке (в списке содержатся режимы и условия, которые привели к их появлению). Переход к блоку 4П или 4С.

4П. И 4С. Исследуются локальные задачи 2-го порядка и устанавливается новый режим (или последовательность режимов) и заносится вместе с условиями в результате нарушения которых он возник, в соответствующее место списка в блоке 3.

В заключение следует отметить. Что организация вычислительного алгоритма в соответствии с первой версией предпочтительнее, если решается задача частичного или полного синтеза управления. Если же решается задача программного движения, то использование блок-схемы В ведет к меньшим вычислительным затратам (по крайней мере по объему памяти). Путь к уменьшению вычислительных затрат (по числу итераций) при использовании второй версии лежит в направлении увеличения шага  $\Delta T$  и заключается в исследовании сходимости алгоритма в зависимости от величины  $\Delta T$ . Во многих конкретных случаях удается сделать шаг  $\Delta T$  много больше, чем шаг интегрирования.

#### § 4. Общие свойства процедуры продолжения оптимальных траекторий и зависимость решений от параметров

Большое количество прикладных задач вписывается в следующую каноническую форму:

$$K(x(t)) u(t) = L(x(t)),$$

$$M(x(t)) u(t) \geq N(x(t)),$$

$$\dot{x}(t) = u(t),$$

где  $x(t)$  —  $n$ -мерный вектор фазовых переменных,  $K(\cdot)$  и  $M(\cdot)$  — матрицы размерностей соответственно  $m \times n$ ,  $m < n$  и  $l \times n$  с компонентами, зависящими от фазовых переменных,  $L(\cdot)$  и  $N(\cdot)$  — вектор-столбцы размерностей соответственно  $m$  и  $l$ , компоненты которых также зависят от фазовых переменных. Начальные условия  $x(t_0) = x_0$  заданы.

При исследовании предельных возможностей развития какой-либо динамической системы необходимо иметь набор характеристик, которые определяют ее поведение. Пусть формально это отражается следующим набором  $N$  функционалов  $J_i[x] = \int_{t_0}^T \langle g_i(x(t)), u(t) \rangle dt$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Тогда в качестве целевой функции

$$J_i[x] = \int_{t_0}^T \langle g_i(x(t)), u(t) \rangle dt \rightarrow \text{extr}$$

может выбираться любая характеристика динамической системы, представляющая интерес; где  $g_i^T(x(t))$  — вектор-строка размерности  $n$ , зависящая от фазовых координат. Задача рассматривается на отрезке  $[t_0, T]$ , длина которого  $T - t_0$  является параметром задачи.

Будем считать, что любая необходимая гладкость входящих в формулировку задачи функций обеспечена.

Напомним, что общая схема решения задачи посредством процедуры продолжения решений состоит в том, что оптимальная траектория  $x^*(t)$  находится путем восстановления последовательности оптимальных режимов.

Восстановление последовательности оптимальных режимов осуществляется следующим образом. В процессе увеличения параметризованной длины отрезка  $[t_0, T]$ , на котором определена задача, от близкой к нулю до заданной, решаются локальные вариационные задачи и устанавливаются новые режимы, возникновение каждого из которых связано с текущим значением параметра  $T - t_0$ . (По существу, решается семейство задач.) Решение локальных вариационных задач для определения новых режимов сводится к решению конечномерных задач линейного или билинейного программирования с размерностью, не превышающей размерности переменных и ограничений динамической за-

дачи. Оптимальная траектория вдоль каждого оптимального режима находится путем решения задачи Коши для соответствующей системы уравнений.

Следует специально отметить, что переключения с режима на режим в момент переключения  $t_i$  случаются либо при выходе на равенства каких-либо из пассивных ограничений

$$M_{v_0}(x^*(t_i)) \mathfrak{H}^*(t_i) = N_{v_0}(x^*(t_i))$$

(такие переключения называются переключениями по прямым переменным), либо при обнулении каких-либо компонент вектора  $\lambda^T(t_i)$ , определяемого равенством

$$\mathfrak{G}^T(x^*(t_i)) = \lambda^T(t_i) R^i(x^*(t_i)), \quad (7.4.1)$$

где

$$R^i(x^*(t_i)) = \begin{pmatrix} K(x^*(t_i)) \\ M_v(x^*(t_i)) \end{pmatrix}, \quad v \in IA[t_i, t_{i+1}],$$

$\mathfrak{G}^T(x^*(t_i))$  — коэффициент целевой функции

$$J'[x] = \int_{t_0}^{t_i} \mathfrak{G}^T(x(t)) \mathfrak{H}(t) dt,$$

полученной в результате учета оптимального поведения траектории на отрезке  $[t_i, T]$  (такие переключения называются переключениями по двойственным переменным). Случаются также переключения в результате возникновения равенств

$$\det R^i(x^*(t_i)) = 0. \quad (7.4.2)$$

Такие переключения называются смешанными.

Как уже отмечалось, исследование развития динамической системы строится на определении экстремальных траекторий, соответствующих тем или иным оптимизируемым характеристикам системы. Реализуется это следующим образом: в качестве целевой функции выбирается пред-

ставляющая интерес характеристика и решается соответствующая задача оптимального управления. Решение всех задач оптимального управления, связанных со всеми интересующими характеристиками позволяет установить достаточно полную картину возможностей развития системы. При этом следует иметь в виду, что такая картина соответствует фиксированному набору параметров модели.

Если приходится решать одну и ту же задачу оптимального управления при различных значениях параметров, то возникает естественный вопрос о возможности использования информации, полученной при решении предыдущих задач. Так как решение задач оптимального управления находится посредством построения последовательностей оптимальных режимов, то, очевидно, имеет смысл задаться вопросом, как меняются моменты переключений в зависимости от параметров.

Параметры можно разделить на 2 типа:

- параметры, связанные с заданием начальных условий в задаче оптимального управления;
- параметры, характеризующие вид ограничений задачи оптимального управления.

Для параметров первого типа вопрос зависимости от них моментов переключения решается автоматически в силу выбранного метода решения вариационной задачи. В самом деле, условия возникновения новых режимов являются в то же время уравнениями, определяющими моменты переключения. Для краткости введем обозначение

$$S_i(x(t_0), x(t_i), K, x(t_{N-1}), t_1 - t_0, K, T - t_{N-1}) = 0, \quad (7.4.3)$$

$$i = \overline{1, N-1},$$

подразумевая под этим уравнением какое-либо из условий, определяющее  $i$ -й момент переключения. Учитывая, что оптимальное решение вдоль каждого режима определяется в результате решения задачи Коши для соответствующей системы уравнений, имеем

$$x(t) = \varphi_i(x(t_i), t - t_i), \quad t \in [t_i, t_{i+1}], \quad (7.4.4)$$

где  $\varphi_i(\cdot)$  — функция, непрерывно дифференцируема (по крайней мере), зависящая от  $x(t_i)$ .

Подставляя уравнения (7.4.4) последовательно в уравнения (7.4.3), получим

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}(x(t_0), t_1 - t_0, t_2 - t_1, K, T - t_{N-1}) = 0, \\ i = \overline{1, N-1}. \end{aligned} \quad (7.4.5)$$

Нетрудно убедиться, что система уравнений (7.4.5) совместно с тождеством

$$(t_1 - t_0) + (t_2 - t_1) + K(T - t_{N-1}) = T - t_0$$

удовлетворяет условиям теоремы о неявной функции при  $t_{i+1} > t_i$ ,  $i = \overline{0, N}$ . Тем самым можно считать, что установлена по меньшей мере непрерывная зависимость моментов переключения от начальных условий и длины интервала планирования вида

$$t_{i+1} - t_i = \begin{cases} 0 & \text{при } t_{i+1} \leq t_i, \\ f_i(x_0, T - t_0) & \text{при } t_{i+1} > t_i. \end{cases} \quad (7.4.6)$$

Перейдем теперь к параметрам второго типа. Эти параметры явно входят в функции, формирующие ограничения и, вообще говоря, и в функционал вариационной задачи. Учтем это обстоятельство, переписав задачу в виде:

$$K(w, x(t)) \mathfrak{H}(t) = L(w, x(t)), \quad (7.4.7)$$

$$M(w, x(t)) \mathfrak{H}(t) \geq N(w, x(t)), \quad (7.4.8)$$

$$J[w, x] = \int_{t_0}^T \langle g(w, x(t)), \mathfrak{H}(t) \rangle dt \rightarrow \text{extr}, \quad (7.4.9)$$

$x(t_0) = x_0$ ,  $t \in [t_i, t_{i+1}]$ ,  $w$  —  $S$ -мерный вектор параметров задачи, за матрицами и векторами  $K(\cdot)$ ,  $L(\cdot)$ ,  $M(\cdot)$ ,  $N(\cdot)$ ,  $g(\cdot)$  сохранен тот же смысл, что и в задаче, а зависимость их компонент от вектора  $w$  обладает любой необходимой степенью гладкости.

Чтобы исследовать зависимость решения задачи (7.4.7)–(7.4.9) от параметра  $w$ , напомним, что процедура продолжения решений вариационной задачи заключается в решении локальных вариационных задач, которые в свою очередь исследуются посредством задачи линейного программирования вида

$$\langle \mathcal{G}(x(t^o)), y \rangle \rightarrow \min, \quad (7.4.10)$$

$$K(x(t^o))y = L(x(t^o)), \quad (7.4.11)$$

$$M(x(t^o))y \geq N(x(t^o)), \quad (7.4.12)$$

где  $x(t^o)$  — вектор начальных условий, в качестве которого может быть выбрана любая точка оптимальной траектории в момент  $t \in [t_i, t_{i+1}]$ .

Учитывая постановку задачи, естественно следует переход к задаче ЛП вида:

$$\langle \mathcal{G}(w, x(t^o)), y \rangle \rightarrow \min,$$

$$K(w, x(t^o))y = L(w, x(t^o)),$$

$$M(w, x(t^o))y \geq N(w, x(t^o)),$$

причем будем считать, что  $w$  меняется в некоторой окрестности точки  $w_0$ , и рассмотрим задачу

$$\langle \mathcal{G}(w_0, x(t^o)), y \rangle \rightarrow \min, \quad (7.4.13)$$

$$K(w_0, x(t^o))y = L(w_0, x(t^o)), \quad (7.4.14)$$

$$M(w_0, x(t^o))y \geq N(w_0, x(t^o)). \quad (7.4.15)$$

Очевидно, что если решение задачи (7.4.13)–(7.4.15) регулярно (единственно по прямым и двойственным переменным), то существует окрестность точки  $w_0$ , такая, что для всех  $w$ , принадлежащих этой окрестности, структура решения (наборы активных и пассивных индексов ограничений) сохраняется.

Если же в задаче (7.4.13)–(7.4.15) имеется какая-либо нерегулярность, то решаются вспомогательные задачи математического программирования более высоких порядков вида

$$(Z^T A(x(t_o), w_o) + a(w_o, x(t_o)))y \rightarrow \min_{Z, y}, \quad (7.4.16)$$

$$B(w_o, x(t^o), Z)y \geq b(w_o, x(t^o), t), \quad (7.4.17)$$

$$K(w_o, x(t^o))y = L(w_o, x(t^o)), \quad (7.4.18)$$

$$M'(w_o, x(t^o))y = N'(w_o, x(t^o)), \quad (7.4.19)$$

$$M''(w_o, x(t^o))y \geq N''(w_o, x(t^o)), \quad (7.4.20)$$

$$K(w_o, x(t^o))Z = L(w_o, x(t^o)), \quad (7.4.21)$$

$$M'(w_o, x(t^o))Z = N'(w_o, x(t^o)), \quad (7.4.22)$$

$$M''(w_o, x(t^o))Z \geq N''(w_o, x(t^o)), \quad (7.4.23)$$

где компоненты матриц  $A(\cdot)$  и  $B(\cdot)$  и векторов  $a(\cdot)$  и  $b(\cdot)$  линейно зависят от частных производных компонент матриц и векторов  $K(\cdot), L(\cdot), M(\cdot), N(\cdot)$  по соответствующим переменным и, кроме того, матрицы  $B(\cdot, Z)$  и  $b(\cdot, Z)$  линейны по  $Z$ .  $M'(\cdot)$  и  $N'(\cdot)$  соответствуют устойчивым активным ограничениям,  $M''(\cdot)$  и  $N''(\cdot)$  — все остальные.

Если решение задачи (7.4.16)–(7.4.23) регулярно, то опять-таки можно утверждать, что существует окрестность точки  $w_o$ , так что структура решения задачи сохраняется.

Обратим теперь внимание на то, что если в задаче (7.4.13)–(7.4.15) при некотором значении параметра возникает нерегулярность, то следует переходить к исследованию задачи (7.4.16)–(7.4.23) и можно ожидать возникновения новых режимов.

Таким образом, учитывая связь между рассмотренными задачами математического программирования и процедурой последовательного наращивания оптимальных режимов, нетрудно убедиться, что зависимость моментов переключения от параметра  $w$  будет непрерывной.

## § 5. О возможности аппроксимация поверхностей переключения сплайнами

Установленная в предыдущем разделе непрерывная зависимость моментов переключения от параметров задачи позволяет поставить вопрос об аппроксимации поверхностей переключения сплайнами. Выбор именно сплайнов обуславливается видом функций

$$t_{i+1} - t_i = \begin{cases} 0 & \text{при } t_{i+1} \leq t_i, \\ \hat{f}_i(w, x_0, T - t_0) & \text{при } t_{i+1} > t_i. \end{cases}$$

Напомним, что сплайн представляет собой совокупность последовательно сопряженных интерполяционных многочленов с наложенными требованиями гладкости в местах сопряжения (линиях узлов сплайна).

В описываемой диалоговой системе используются сплайны не выше второй степени. На линиях узлов сплайна оказывается достаточным потребовать непрерывности.

Построение сплайна можно вести в автоматическом режиме, фиксируя значения вектора параметров  $w$  и значения моментов переключения  $t_i$  при расчете различных вариантов для заданной демографической характеристики. Чтобы упростить процедуру построения сплайна, следует обеспечивать равномерность восстанавливаемой интерполяционной решетки.

Как уже отмечалось, имея в виду выбранный метод решения задач оптимального управления, переключения бывают двух типов — по прямым переменным и по сопряженным. Аппроксимировать сплайнами следует только переключения по сопряженным переменным, так как переключения по прямым переменным процедура продолжения решений реализует автоматически при любых допустимых значениях параметров. Отметим также, что зависимость моментов переключения от параметра  $T - t_0$  устанавливается уже при просчете одного варианта потому, что, как отмечалось, используемый метод дает решение целого семейства задач при разных значениях  $T - t_0$ .

Описанный в главе 4 метод, реализуя по существу естественную декомпозицию задачи, позволяет сводить ее решение к двум подзадачам: решение конечного числа задач математического программирования и интегрирование задачи Коши вдоль каждого режима. Причем, как уже отмечалось, размерность этих подзадач не превосходит исходной размерности задачи. Комплекс программ, реализующий описанный метод, состоит из следующих основных частей:

- подпрограммы решения задач линейного и билинейного программирования для определения режимов;
- подпрограмм численного решения задачи Коши для системы нелинейных дифференциальных уравнений вдоль каждого режима.

Решение задач ЛП вида (7.4.13)–(7.4.15) принципиальных трудностей не вызывает, так как их размерность не превышает числа динамических переменных. А ограничения на количество динамических переменных

зависят от требуемой точности численного решения последовательности задач Коши и длины отрезка, на котором задача решается. Таким образом, основные вычислительные затраты падают на решение задачи Коши. Тем более, что в процессе решения задачи приходится делать много прогонок. Однако использование для решения задачи Коши методов с переменным порядком и шагом, позволяет уменьшать число итераций и экономить время вычислений.

При решении задач билинейного программирования используется процедура отсекающих плоскостей [94].

## Глава VIII

### **Реализация процедуры продолжения оптимальных решений в распределенной вычислительной среде**

В предыдущих главах было установлено, что процедура продолжения оптимальных траекторий реализуется следующим образом: если в результате увеличения отрезка времени, на котором задача определена (параметра задачи), вдоль траектории возникает новая нерегулярность, то формируется локальная вариационная задача и на основе ее решения определяются новые режимы и моменты переключения, которые встраиваются в исследуемый момент в структуру оптимальной траектории. Было также выяснено, что для задач, линейных по управлениям, эта процедура сводит исходную задачу к последовательности задач Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Благодаря этому процедура продолжения оптимальных траекторий, реализуя естественную декомпозицию задачи, является основой для построения эффективных вычислительных алгоритмов, учитывающих и отслеживающих структуру оптимальных решений. Именно возможность декомпозирования задачи позволяет рассредоточить ее решение по различным вычислительным узлам и подойти к разрешению «проклятия размерности», висящего над задачами оптимального управления и другими сложными динамическими задачами. Конечно, организация адекватной вычислительной среды, особенно в глобальных сетях (например, в Интернете), является отнюдь не тривиальной задачей. Под вычислительными узлами следует понимать совокупность взаимодействующих между собой вычислительных алгоритмов и реализующих решение типовых подзадач, к набору которых декомпозируется исходная (алгоритмические ресурсы), и источников параметров и начальных данных (информационные ресурсы). Эти информационно-алгоритмические ресурсы (ИАР) функционируют на удаленных хостах или рабочих станциях, на которых установлено специальное программное обеспечение. Речь идет о системах, обеспечивающих прозрачный доступ к ИАР различных типов и позволяющих осуществить их координированное использование для решения широкого круга задач прикладного характера. Это направление имеет большие перспективы и относительно мало развито в настоящее время, особенно в применении к таким динамичным, гетерогенным и слабосвязанным средам, как глобальные сети, где гибкость и надежность зачастую важнее производительности [88, 90].

## § 1. Процедура продолжения оптимальных решений и основные вычислительные задачи

Выпишем еще раз задачу оптимального управления со смешанными ограничениями, линейную по управляющим воздействиям:

$$\int_{t_0}^T \langle g(x(t)), u(t) \rangle dt \rightarrow \min,$$

$$\dot{x}(t) = u(t),$$

$$K(x(t)) \cdot u(t) = L(x(t)),$$

$$M(x(t)) \cdot u(t) \geq N(x(t)),$$

$$x(t_0) = x_0.$$

Фазовый вектор  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ .

Управление  $u = (u_1(t), \dots, u_n(t))$ .

$K(x(t))$  — матрица размерности  $l \times n$ .

$M(x(t))$  — матрица размерности  $m \times n$ .

$L(x(t))$  и  $N(x(t))$  — вектора соответствующих размерностей  $l$  и  $m$ .

Как было показано выше, решение исходной задачи оптимального управления на отрезке  $[t_0, T]$  складывается из последовательности оптимальных режимов  $r_i [t_i, t_{i+1}, R_i]$ , определяемым следующим локальным вариационным задачам:

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \langle g(x(t)) + \Phi_i(x(t), t_{i+1} - t_i, t_{i+2} - t_{i+1}, \dots, t_j - t_{j-1}, t - t_j), \dot{x}(t) \rangle dt \rightarrow \min,$$

$$\dot{x}(t) = u(t),$$

$$K(x(t)) * u(t) = L(x(t)),$$

$$M(x(t)) * u(t) \geq N(x(t)),$$

$$x(t_i) = x^*(t_i),$$

$$\Phi_i(x(t)) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \sum_{j=i}^{N-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \langle g(\varphi(x(t_i), t_{i+1} - t_i, \dots, t - t_j)), \psi(x(t_i), t_{i+1} - t_i, \dots, t - t_j) \rangle dt \right) \Big|_{x(t)}$$

Их исследование дает следующие ограничения на величину  $t_{i+1} - t_i$ :

$$(g(x(t_i)) + \Phi_i(x(t_i), T - t_{N-1}, \dots, t_{i+1} - t_i)) \cdot R_i^{-1}(x(t_i)) \neq 0,$$

$$g(\varphi(x(t_i), t_{i+1} - t_i)) \cdot R_i^{-1}(\varphi(x(t_i), t_{i+1} - t_i)) \neq 0,$$

$$\det R_i(\varphi(x(t_i), t_{i+1} - t_i)) \neq 0,$$

$$M_{B_i}(\varphi(x(t_i), t_{i+1} - t_i)) \cdot \psi(x(t_i), t_{i+1} - t_i) - N_{B_i}(\varphi(x(t_i), t_{i+1} - t_i)) \neq 0.$$

Тогда если при увеличении длины отрезка  $[t_0, T]$  ограничения на величину  $t_{i+1} - t_i$  выполняются, то исходная последовательность оптимальных режимов дает решение задачи на увеличивающийся отрезок  $[t_0, T]$ . Для тех значений  $t_i$ , где происходит нарушение условий, между режимами  $r_{i-1}[t_{i-1}, t_i, R_{i-1}]$  и  $r_i[t_i, t_{i+1}, R_i]$  возникает новый режим или целая последовательность режимов.

В результате применения метода продолжения оптимальных траекторий поиск решения задачи оптимального управления сводится к решению следующих вычислительных задач:

- 1) задачи математического программирования — для получения новых режимов в процессе наращивания длины оптимальной траектории;
- 2) задачи Коши для системы ОДУ — для получения траектории вдоль каждого режима;
- 3) поиск корней нелинейных уравнений — для определения моментов нарушения условий, определяющих сохранение режима.

### 1.1. Задачи математического программирования

При необходимости получения нового режима в процессе построения оптимальной траектории возникает потребность в решении различных задач математического программирования. Среди них есть как задачи, для которых методы решения хорошо известны, так и задачи, требующие разработки новых методов и алгоритмов.

Большое число возникающих вспомогательных задач МП являются задачами линейного программирования. В задаче с постоянными коэффициентами, т. е. в случае, когда функции, входящие в ограничения задачи и в выражение под знаком интеграла в целевой функции, не зависят от  $x(t)$ , все вспомогательные задачи являются задачами ЛП. При решении задач ЛП необходимо выяснять структуру оптимального решения: единственность или не единственность, ранг базисной матрицы, количество активизировавшихся ограничений. Для решения этих задач разработаны методы и алгоритмы, доступны реализующие их программные средства. Такие пакеты программ могут быть использованы в качестве ИАР в распределенной вычислительной среде при помощи агентов доступа [88].

Еще один класс возникающих задач МП — это задачи с билинейной целевой функцией и линейными ограничениями. Для этих задач необходима разработка специальных методов решения и их программная реализация. При организации распределенного вычислительного процесса информационно-алгоритмические ресурсы, используемые для решения таких задач, должны предоставлять возможности для работы компонентов, реализующих решение задачи МП. Вычислительные ресурсы представляют собой серверы, позволяющие запускать на выполнение, предоставляемое ПО (модель пересылки кода). Могут включать в себя в качестве подзадач задачи линейного программирования (фрактальные свойства).

## 1.2. Задачи Коши для системы ОДУ

При решении задачи Коши необходимо учитывать, что для проверки условий сохранения режимов важно иметь зависимость решения на каждом отрезке от начальных данных

$$x^*(t) = \varphi_i(x^*(t_i), t - t_i), t \in [t_i, t_{i+1}].$$

Одним из способов установления зависимости решения от начальных данных является метод разложения решения в ряд.

Будем рассматривать задачу Коши для системы ОДУ, в которой правая часть не зависит явно от времени:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x), \quad t \in [t_0, T], \\ x(t_0) &= x_0. \end{aligned}$$

Приближенное решение в окрестности точки  $x_0$  может быть представлено в виде формулы Тейлора:

$$\begin{aligned}
 x(t) = & x_0 + \dot{x}_0(t-t_0) + \frac{\ddot{x}_0}{2!}(t-t_0)^2 + \dots + \frac{x_0^{(s)}}{s!}(t-t_0)^s + \\
 & + \frac{x^{(s+1)}(\xi)}{(s+1)!}(t-t_0)^{(s+1)},
 \end{aligned} \tag{1}$$

где

$$x_0^{(k)} = x^{(k)}(t_0), \xi \in (t_0, t), \quad k = 3, \dots, s.$$

Выражения для вычисления производных, входящих в формулу (1), имеют вид:

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{A} &= f(x) = \varphi^1(x), \\
 \mathfrak{B} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot f(x) = \varphi^2(x), \\
 &\dots \\
 x^{(s)} &= \frac{\partial \varphi^{s-1}}{\partial x} \cdot f(x) = \varphi^s(x), \\
 \frac{\partial \varphi^s}{\partial x} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1^s}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1^s}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_1^s}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_2^s}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2^s}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_2^s}{\partial x_n} \\ \mathbb{M} & \mathbb{M} & \bigcirc & \mathbb{M} \\ \frac{\partial \varphi_n^s}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_n^s}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_n^s}{\partial x_n} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Вычисление производных  $\varphi^1(x), \dots, \varphi^s(x)$  осуществляется в символьном виде, и полученные символьные выражения хранятся для последующего использования, тем самым хранится информация о зависимости решения от начальных условий. В случае, когда правые части являются многочленами многих переменных или дробно-рациональными функциями, дифференцирование правых частей выполняется достаточно просто. Вычисления могут быть эффективно распараллелены на двух уровнях:

- 1) для каждого  $i = \overline{1, n}$  производные компоненты  $x_i$  могут вычисляться независимо от других  $x_j, j \neq i$ :

$$x_i^{(s)} = \varphi_i^s = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_i^{s-1}}{\partial x_j} f_j, \quad s = 2,$$

- 2) вычисление  $\frac{\partial \varphi_i^s}{\partial x_j}$  может вестись независимо для всех  $j = \overline{1, n}$ .

В силу того, что алгоритм решения задачи Коши хорошо распараллеливается, его реализация может быть выполнена с применением таких распространенных технологий параллельных вычислений как PVM или MPI. Таким образом, информационно-алгоритмическим ресурсом, используемым для решения этой вычислительной подзадачи, будет программный компонент, реализующий решение задачи Коши с использованием параллельных вычислений на суперкомпьютере или кластере.

### 1.3. Поиск корней нелинейных уравнений

Проверка условий сохранения режима с вычислительной точки зрения представляет собой нахождение корней нелинейных уравнений. Эти задачи в вычислительном отношении исследованы достаточно подробно. Существует множество методов и программных средств для их решения. Так как решение таких задач не требует мощных аппаратно-вычислительных ресурсов, ИАР, отвечающий за их решение, может работать, например, на обычных рабочих станциях. Данные подзадачи требуют относительно небольших объемов вычислений, то есть могут быть решены при помощи маломощных вычислительных ресурсов (рабочие станции, Condor-кластер). Однако, так как число режимов (и условий) априори неизвестно, то в процессе вычислений может возникнуть необходимость в динамическом добавлении новых ресурсов. Таким образом, для данной задачи важно использование механизмов динамического распределения нагрузки и эффектов самоорганизации.

- 1 Пусть построена последовательность оптимальных режимов для некоторого значения  $T^*$ . Формируются условия сохранения для всех режимов. Для каждого условия ищется  $T_i' \leq T$  — наибольшая величина интервала, при которой оно не нарушается, выбирается  $T' = \min_i T_i'$ .
- 2 Если  $T' < T$ , то рассматривается вспомогательная задача МП для определения нового режима.
- 3 Для новой последовательности режимов и значения  $T^* := T'$  процедура повторяется.

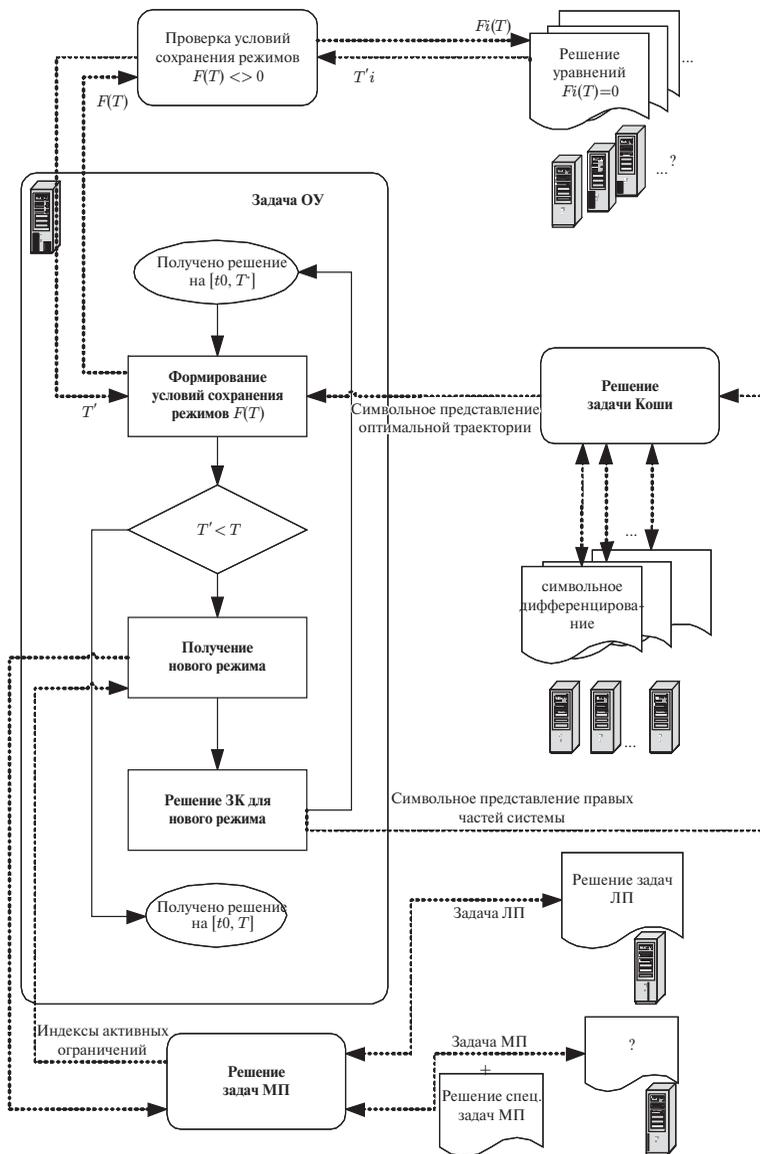


Рис. 8.1. Блок-схема алгоритма

## § 2. Символьное представление задачи. Многочлены от нескольких переменных и схема их вычисления

### 2.1. Преимущества символьного подхода

- Возможность установить зависимость от входных данных, что зачастую не предусматривается классическими численными методами.
- Механизм символьного представления функций позволяет установить более гибкую зависимость «значение переменной — значение функции».
- Символьное представление задачи может стать ключевым моментом при построении распределенного алгоритма решения.

Рассмотрим этот вопрос более детально на примере задачи Коши для системы ОДУ:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \end{cases}$$

$$x_1(t_0) = x_1^0, \quad x_2(t_0) = x_2^0, \quad \dots, \quad x_n(t_0) = x_n^0,$$

$$(x_1, \dots, x_n) \in D \subset V^n, \quad \|x\| = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad t \in [t_0, T],$$

$\forall i = 1 \dots n$ ,  $f_i(x_1, \dots, x_n)$  — аналитические функции в  $D$ .

### 2.2. Системы дифференциальных уравнений с правыми частями, задаваемыми многомерными многочленами

В силу аналитичности каждой из функций  $f_i(x_1, \dots, x_n)$ , их в свою очередь можно аппроксимировать посредством многомерной формулы Тейлора многомерными многочленами  $P_i[x_1, \dots, x_n]$  на  $D$  с любой степенью точности. Но и системы дифференциальных уравнений с правыми частями, задаваемыми многомерными многочленами, являются исключи-

тельно важным и интересным объектом (например, знаменитый аттрактор Лоренца представляет собой систему из трех дифференциальных уравнений с правыми частями, задаваемыми трехмерными многочленами второго порядка).

Итак,

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = P_1[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)], \\ \frac{dx_2}{dt} = P_2[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)], \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \frac{dx_n}{dt} = P_m[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)], \end{cases}$$

$$x_1(t_0) = x_1^0, \quad x_2(t_0) = x_2^0, \quad \dots, \quad x_n(t_0) = x_n^0.$$

Будем искать решение в виде суммы ряда Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$x(t) = x^0 + \sum_{k=1}^N x^{(k)} \Big|_{t_0} \cdot \frac{(t-t_0)^k}{k!} + R_{N+1}(t),$$

где

$$R_{N+1}(t) = (t-t_0)^{N+1} \cdot \frac{\tilde{x}^{(N+1)}(\tilde{t})}{(N+1)!}, \quad \tilde{t} \in [t_0, T],$$

$$x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0), \quad x^{(k)} \Big|_{t_0} = \Phi^k \Big|_{x_0},$$

где

$$\Phi^k = \frac{\partial \Phi^{k-1}}{\partial x} \cdot \bar{P}[x_1, \dots, x_n],$$

$$\bar{P}[x_1, \dots, x_n] = (P_1[x_1, \dots, x_n], \dots, P_m[x_1, \dots, x_n]),$$

$$\Phi^1 = \bar{P}[x_1, \dots, x_n],$$

$\frac{\partial \Phi^{k-1}}{\partial x}$  — матрица частных производных

$$\frac{\partial \Phi^{k-1}}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1^{k-1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_1^{k-1}}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \Phi_n^{k-1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_n^{k-1}}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Пусть  $\bar{x}(t) = x^0 + \sum_{k=1}^N x^{(k)} \Big|_{t_0} \cdot \frac{(t-t_0)^k}{k!}$ , тогда  $\|x(t) - \bar{x}(t)\| = \|R_{N+1}(t)\|$ .

Таким образом, если требуется найти решение задачи Коши с любой заданной степенью точности  $\varepsilon$ , то достаточно вычислить столько членов ряда  $N_0$ , чтобы  $\|R_N(T_{сходимости})\| \leq \varepsilon \quad \forall N \geq N_0$ , где  $T_{сходимости}$  радиус сходимости ряда Тейлора, определяющего решение  $x(t)$ . Существенным здесь является то, что данный метод позволяет установить зависимость решения  $x(t)$  от начальных данных  $x^0$ .

Каждая итерация алгоритма включает следующую последовательность действий:

- Вычисление символьного выражения для производной  $x^{(k)}$ :

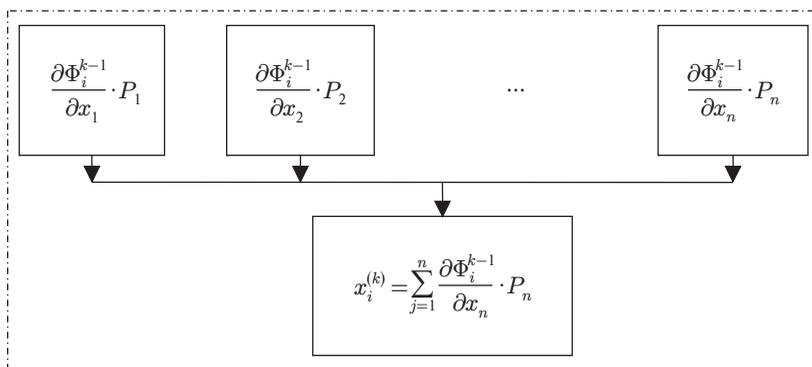


Рис. 8.2

Здесь важным моментом является то, что выражения, помещенные в прямоугольники, могут вычисляться независимо, вообще говоря, на различных вычислителях. При этом вычисления проводятся одновременно для всех  $\forall i = 1 \dots n$ .

- Вычисление матрицы частных производных  $\frac{\partial \Phi^k}{\partial x} (m \times n)$ :

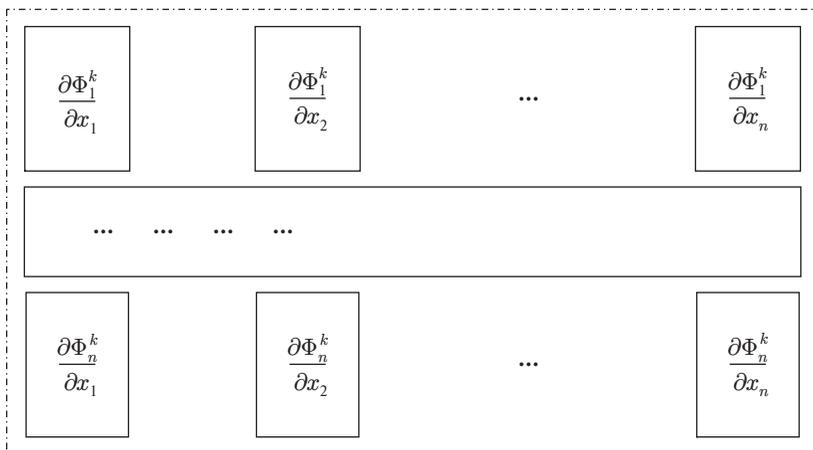


Рис. 8.3

Здесь справедливы те же рассуждения с тем замечанием, что на каждом вычислителе должен быть установлен инструмент для вычисления производной функции, заданной в символьном виде. В случае с многочленами, такой инструмент может быть реализован с достаточно высокой степенью эффективности.

- Вычисление значения производной  $x^{(k)} \Big|_{t_0}$ .

Вычисление  $x^{(k)} \Big|_{t_0}$  сводится к общему вопросу о вычислении некоторого многочлена  $P[x_1, \dots, x_n]$  в точке  $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ , рассмотрим его более подробно. Для начала обратимся к традиционной схеме Горнера:

$$P[x] = a_M \cdot x^M + a_{M-1} \cdot x^{M-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0.$$

Каждый раз, вынося наибольший общий множитель соседних слагаемых, преобразуем многочлен к форме с минимальным числом умножений:

$$P[x] = (\dots((a_M \cdot x + a_{M-1}) \cdot x + a_{M-2}) \cdot x + \dots) \cdot x + a_0.$$

Представим многочлен  $P[x_1, \dots, x_n]$  следующим образом:

$$P[x_1, \dots, x_n] = \sum_{\alpha} a_{\alpha} \cdot x^{\alpha}; \quad \alpha = (\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

$$x^{\alpha} = x_1^{\lambda_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\lambda_n}.$$

Обозначим через  $|\alpha|$  сумму  $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ , и упорядочим слагаемые в многочлене  $P[x_1, \dots, x_n]$  по убыванию  $|\alpha|$ :

$$P[x_1, \dots, x_n] = \sum_{i=1}^M a_{\alpha_i} \cdot x^{\alpha_i}, \quad |\alpha_1| \geq |\alpha_2| \geq \dots \geq |\alpha_M|.$$

Сопоставим многочлену  $P[x_1, \dots, x_n]$  матрицу  $A(n+1 \times M)$ , столбцами которой являются  $n+1$ -номерные вектора  $\xi_i$ :

$$\xi_i = (c^i \cdot p^i[x_1, \dots, x_n], \lambda_1^i, \dots, \lambda_n^i),$$

здесь  $c^i$  — константа,  $p^i[x_1, \dots, x_n]$  — многочлен.

Для каждой пары столбцов составим вектор:

$$\xi^{ij} = (\text{НОД}(c^i, c^j) * p^{ij}[x_1, \dots, x_n], \min(\lambda_1^i, \lambda_1^j), \dots, \min(\lambda_n^i, \lambda_n^j)),$$

при этом многочлен  $p^{ij}[x_1, \dots, x_n]$  имеет вид:

$$p^{ij}[x_1, \dots, x_n] = \frac{c^i}{\text{НОД}(c^i, c^j)} \cdot p^i[x_1, \dots, x_n] \cdot x_1^{\lambda_1^i - \min(\lambda_1^i, \lambda_1^j)} \cdot \dots \cdot x_n^{\lambda_n^i - \min(\lambda_n^i, \lambda_n^j)} +$$

$$+ \frac{c^j}{\text{НОД}(c^i, c^j)} \cdot p^j[x_1, \dots, x_n] \cdot x_1^{\lambda_1^j - \min(\lambda_1^i, \lambda_1^j)} \cdot \dots \cdot x_n^{\lambda_n^j - \min(\lambda_n^i, \lambda_n^j)},$$

$$i = 1 \dots M-1; \quad j = i+1 \dots M.$$

Среди полученных векторов  $\xi^{ij}$ , а их будет

$$M-1 + M-2 + \dots + 1 = \frac{M * (M-1)}{2},$$

выберем тот, для которого сумма  $\sum_{k=1}^n \min(\lambda_k^i, \lambda_k^j)$  максимальна и обозначим его  $\xi^{max}$ . В матрице  $A(n+1 \times M)$  заменим столбцы, из которых был получен вектор  $\xi^{max}$ , на столбец соответствующий вектору  $\xi^{max}$ , так что  $A(n+1 \times M) \rightarrow A(n+1 \times M-1)$ . Далее с новой матрицей  $A(n+1 \times M-1)$  проделаем то же самое. Тем самым за конечное число шагов многочлен

$P[x_1, \dots, x_n]$  можно преобразовать к виду оптимальному для вычисления  $P[x_1^0, \dots, x_n^0]$ .

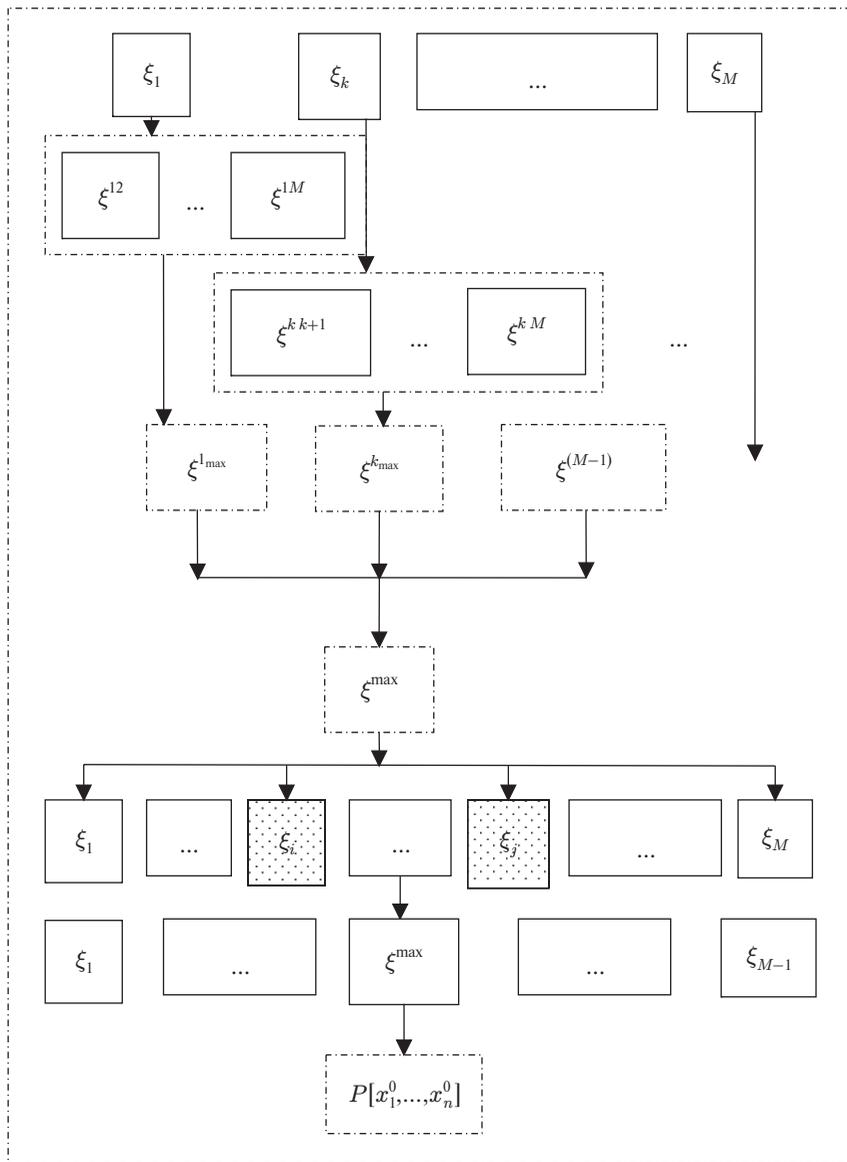


Рис. 8.4

- Оценка остаточного члена  $\|R_N(t)\|$ :

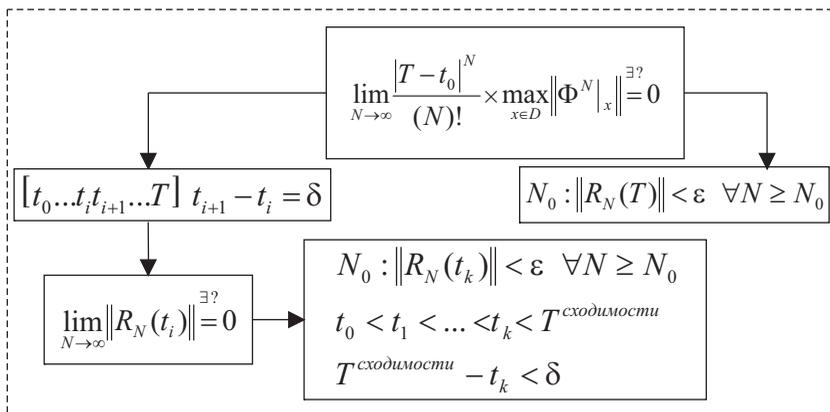


Рис. 8.5

Завершающий этап в процессе построения решения  $x(t)$  включает следующие подзадачи:

1. Определить существует ли предел  $\lim_{N \rightarrow \infty} \|R_N(T)\| = 0$  и, если существует, то определить, равен ли он нулю. В случае положительного ответа перейти к пункту 2, в случае отрицательного к пункту 3.
2. Определить номер  $N_0$ , начиная с которого выполнено соотношение  $\|R_N(T)\| < \epsilon \quad \forall N \geq N_0$ .
3. Весь отрезок  $[t_0, T]$  разбивается точками  $t_i$ , так что  $t_{i+1} - t_i = \delta$  — есть некоторая фиксированная величина:  $[t_0 \dots t_i t_{i+1} \dots T] \quad t_{i+1} - t_i = \delta$ .
4. Для каждого  $t_i, i = 1 \dots M = \frac{T-t_0}{\delta}$  осуществляется проверка  $\lim_{N \rightarrow \infty} \|R_N(t_i)\| = 0$ , последняя точка  $t_i$ , для которой предел существует и равен нулю, дает оценку для радиуса сходимости ряда Тейлора  $T^{сходимости} - t_k < \delta$ .
5. Далее требуется определить номер  $N_0$ , начиная с которого выполнено соотношение  $\|R_N(t_k)\| < \epsilon \quad \forall N \geq N_0$ .

Здесь важно отметить, что остаточный член  $\|R_N(t)\|$  представлен в символьном виде, что существенно упрощает и оптимизирует процесс его оценивания.

### § 3. Распределенная вычислительная среда IARnet

Для практической реализации описанной схемы распределенного решения задачи оптимального управления предлагается использовать распределенную вычислительную среду IARnet [88, 90]. Остановимся вкратце на главных предпосылках создания среды IARnet и опишем ее архитектуру.

Среда IARnet предназначена для организации доступа и координированного использования разнообразных распределенных информационно-алгоритмических ресурсов в масштабах глобальной сети.

Под *информационно-алгоритмическом ресурсом (ИАР)* понимается любой программный компонент, обладающий определенной функциональностью (набором возможностей) и ориентированный на решение четко заданного круга прикладных задач. Примеры ИАР:

- Специализированные пакеты прикладных вычислительных алгоритмов.
- Математические и имитационные модели систем и явлений.
- Интерпретаторы языков программирования.

Перспективным направлением представляется разработка средств удаленного использования ИАР для решения различных задач или проведения исследований, в которых данные ресурсы необходимы как готовые компоненты, предоставляющие требуемую функциональность, например, определенную процедуру обработки данных, модель внешней среды или технической системы.

Данный подход, ориентированный на интеграцию типизированных ИАР, а не «сырых» вычислительных мощностей и хранилищ данных, расширяет традиционный взгляд на распределенные вычислительные среды и Grid-вычисления. Основной целью является построение на основе базовой Grid-инфраструктуры новых моделей координированного использования ИАР для распределенного выполнения вычислительных алгоритмов.

Ключом к прозрачному объединению гетерогенных и автономных ресурсов в единую вычислительную среду может быть только унификация их внешних интерфейсов на основе четко определенных типов ресурсов. В свою очередь эта типизация должна быть произведена на основе детальной классификации ресурсов по их функциональности и предоставляемым возможностям. Конечным результатом этой работы должны стать спецификации внешних интерфейсов ресурсов различных типов, например — пакетов решения ОДУ, пакетов решения задач оптимизации и т. д.

В ходе обсуждения нескольких типовых сценариев использования ИАР, таких как распределенное решение задачи оптимального управления, были выработаны требования к распределенной вычислительной среде IARnet, предназначенной для координированного использования ИАР для решения прикладных задач. На основе приведенных выше требований была разработана архитектура IARnet (рис. 8.6).

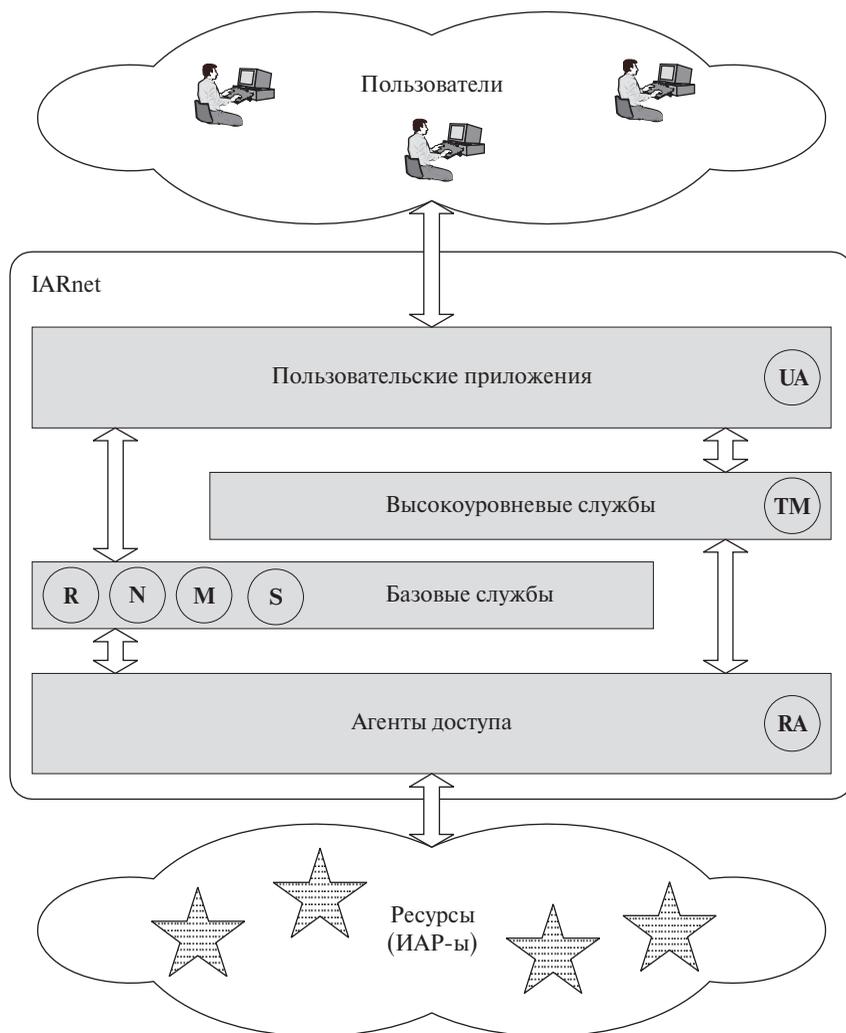


Рис. 8.6. Основные уровни архитектуры системы

Ключевым элементом архитектуры IARnet являются *агенты доступа* к ИАР — посредники, организующие доступ к ресурсу в соответствии с его типом, интегрирующие его в систему, а также управляющие доступом к нему пользователей системы. Ресурс, снабженный агентом доступа к нему, представляет собой унифицированный ресурс, готовый к включению в состав системы.

*Вспомогательные службы* IARnet интегрируют систему в единое целое, управляют потоками данных прикладных задач и обеспечивают самоорганизацию системы, используя специальные служебные протоколы. В общем случае службы могут быть построены как распределенные системы.

К вспомогательным службам относятся:

- Служба регистрации.
- Служба мониторинга.
- Служба рассылки уведомлений.
- Служба управления заданиями.

*Служба управления заданиями* предназначена для реализации выполнения заданий пользователя, описанных на специальном языке в терминах вызовов операций ресурсов различных типов. Предполагается использовать готовые спецификации *языков описания заданий* в распределенных системах (Condor DAG, CORBA Script, BPEL) и существующие реализации соответствующих «интерпретаторов» этих языков.

## Заключение

В заключение перечислим основные результаты, полученные в работе:

1. Разработан аппарат исследования ситуаций переключения на основе введенного в монографии понятия локальных вариационных задач. На основе этого понятия выделены специальные классы задач оптимального управления и установлен конечномерный характер их решений. Показано, что к этим классам задач сводятся многие общие проблемы оптимального управления. Эти классы задач представляют большой самостоятельный интерес. В монографии получены решения общих типов изопериметрических задач и исследована задача о числе гамильтоновых циклов для специального класса систем.
2. Разработан аппарат продолжения оптимальных решений, позволяющий получать оптимальную траекторию в виде последовательности оптимальных режимов. Показано, что новые режимы могут возникать в любой точке оптимальной траектории при ее продолжении по параметру. Возникновение новых режимов связано с появлением особенностей в каких-либо точках траектории при критических значениях параметра. Выявление активизировавшихся ограничений типа неравенств, определяющих новые режимы, сводится к задачам математического программирования.
3. Установлено, что процедура продолжения оптимальных траекторий применима непосредственно для задач со свободным правым концом. С позиций развиваемого в монографии подхода задачи с таким типом краевых условий следует считать базовыми. В монографии показано, как через базовую задачу сводятся к процедуре продолжения решений задачи с другими типами краевых условий.
4. Разработаны принципы построения вычислительных алгоритмов на основе развиваемого в монографии подхода. Рассмотрены два способа организации численных процедур для задач, линейных по управлениям, со свободным правым концом. Показано, что применение процедуры продолжения решений реализует естественную декомпозицию задачи и сводит ее решение к двум подзадачам: численное решение задачи Коши вдоль каждого из установленных режимов; численное решение задач математического программирования с размерностью, равной по порядку числу динамических переменных и ограничений.
5. Предложена схема решения задачи оптимального управления в распределенной вычислительной среде и рассмотрена возможность исследования задачи в квазисимвольном виде.

## Литература

1. *Hibbs A.* Optimum Burning Program for Horizontal Flight // Journal of the American Rocket Society. 1952. V. 22. № 4. P. 206–216.
2. *Розенброк Х., Стори С.* Вычислительные методы для инженеров-химиков. М.: Мир, 1968. 321 с.
3. *Дубовский С. В., Дюкалов А. Н., Иванов Ю. Н., Токарев В. В., Уздемир А. П., Фаткин Ю. М.* О построении оптимального экономического плана // Автоматика и телемеханика. 1973. № 8. С. 100–115.
4. *Махров Н. Ю., Ставчиков А. И., Щур В. Н.* Моделирование процессов профессиональной и квалификационной мобильности научных кадров // Комплексная организация исследований. М.: Наука, 1981. С. 151–164.
5. *Goldschmidt.* Detezminatio superficiei minimae rotatione curvae data duo puncta giungentis circa datum axem ortae. Gottingen Prize essay, 1831.
6. *Todhunter.* Researches in the calculus of variations. London, 1871.
7. *Weierstrass K.* Mathematiche Werke, 1927.
8. *Hadamard J.* Lecons sur le calcul des variations. Paris, 1910.
9. *Bolza O.* Lectures on the calculus of variations. New York, 1960.
10. *Bliss G. A.* The Problem of Mayer with variable end-points // Transactions of the American Mathematical Society. 1918. Vol. 19. P. 305.
11. *Tonelli.* Fondamenti di calcolo dell variations. New York, 1921.
12. *Graves L. M.* The problem of Lagrange American Journal of Mathematics. 1931. Vol. 53. № 3.
13. *Mcshane E. J.* On multipliers for Lagrange problems American Journal of Mathematics. 1939. V. 61. P. 809–819.
14. *Valentine F. A.* The problem of Lagrange with differential inequalities as side conditions. Dissertation: The University of Chicago, 1937.
15. *Понтрягин Л. С.* Некоторые математические задачи, возникающие в связи с теорией оптимальных систем автоматического регулирования. Основные проблемы автоматического регулирования и управления // Тр. Сессии АН СССР по научным проблемам автоматизации производства. М.: Изд-во АН СССР, 1957. С. 3–20.
16. *Болтянский В. Г., Гамкрелидзе П. В., Понтрягин Л. С.* К теории оптимальных процессов // Докл. АН СССР. 1956. Т. 110. № 1. С. 7–10.
17. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе П. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.
18. *Розоноэр Л. И.* Принцип максимума Л. С. Понтрягина в теории оптимальных систем // Автоматика и телемеханика. 1959. Т. 20. № 10–12. С. 1320–1334, 1441–1456, 1561–1578.
19. *Дубовицкий А. Я., Милютин А. А.* Задачи на экстремум при наличии ограничений // ЖВМ и МФ. 1965. Т. 5. № 3. С. 395–453.

20. Дубовицкий А. Я., Милютин А. А. Необходимые условия экстремума в задачах оптимального управления со смешанными ограничениями типа неравенств // ЖМВ и МФ. 1968. Т. 8. № 4. С. 725–770.
21. Miele A. General variational theory of the Hpright paths of rocket powered aircraft, missiles and satellite carriers *Astronautical Acta*. 1958. V. 4. № 4.
22. Лейтман Дж. Введение в теорию оптимального управления. М.: Наука, 1968.
23. Berkovitz L. D. Variational methods in problems of control and programming *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 1961. V. 3. № 1.
24. Троицкий В. А. Задача Майера—Больца вариационного исчисления и теория оптимальных систем // Прикладная матем. и мех. 1961. Т. 25. № 3.
25. Троицкий В. А. О вариационных задачах оптимизации процессов управления // Прикладная матем. и мех. 1962. Т. 26. № 1.
26. Brayson A. E., Denhem W. F. *AIAA Journal*. 1963. № 11. P. 25–44.
27. Dreyfus S. E. *Dynamic Programming and the calculus of Variations*. New York: Academic Press, 1965.
28. Смольяков Э. Р. Принцип максимума для задач с фазовыми ограничениями // Исследование операций. М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1971. Вып. 2. С. 136–155.
29. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. М.: Мир, 1974.
30. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. *Оптимальное управление*. М.: Наука, 1979. 432 с.
31. Дикусар В. В. Задачи по определению пространственных маневренных возможностей летательного аппарата // Тр. II-й Всесоюзной конференции по оптимальному управлению в механических системах. Казань: Изд-во Казанского авиационного ин-та, 1973. С. 48–56.
32. Фельдбаум А. А. Интегральные критерии качества регулирования // Автоматика и телемеханика. 1948. Т. 9. № 1. С. 3–19.
33. Красовский А. А. Интегральные оценки качества процесса регулирования. М.: Машгиз, 1949. 24 с.
34. Красовский П. П. К теории оптимального регулирования // Автоматика и телемеханика. 1957. Т. 18. № 11. С. 960–970.
35. Фельдбаум А. А. Основы теории оптимальных автоматических систем. М.: Наука, 1966. 624 с., ил.
36. Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Понтрягин Л. С. Теория оптимальных процессов. Принцип максимума // Изв. АН СССР. 1960. Сер. матем. Т. 24. № 1. С. 3–42.
37. Дубовицкий А. Я., Милютин А. А. Трансляция управлений Эйлора // ЖМВ и МФ. 1969. Т. 9. № 6. С. 1263–1284.
38. Halkin H. On Necessary Conditions for Optimal-Control of Non-linear Systems // *J. Analyse Math.* 1964. V. 12. P. 1–82.
39. Neustadt L. An Abstracht Variational Theory with Applications to a Broad Class of Optimization Problems. 1: General Theory // *SIAM J. Control*. 1966. № 4. P. 505–527.

40. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Двойственность выпуклых функций и экстремальные задачи // УМН. 1968. Т. 23. № 6. С. 51–116.
41. *Кротов В. Ф.* Разрывные решения вариационных задач // Изв. вузов. 1960. Сер. математика. Т. 18. № 5. С. 86–97.
42. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965. 326 с.
43. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью // Матем. сборник. 1960. Т. 51. № 1. С. 99–128.
44. *Беллман Р.* Динамическое программирование. М.: ИЛ, 1960. 400 с.
45. *Левитин Е. С.* К локальной теории возмущений задачи математического программирования в банаховом пространстве // Докл. АН СССР. 1975. Т. 224. № 5. С. 1020–1023.
46. *Левитин Е. С.* К теории возмущения негладких экстремальных задач с ограничениями // Докл. АН СССР. 1975. Т. 224. № 6. С. 1260–1263.
47. *Янг Л.* Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. М.: Мир, 1974. 488 с.
48. *Федоренко Р. Н.* Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978. 488 с., ил.
49. *Гамкрелидзе Р. В.* Теория оптимальных по быстродействию процессов в линейных системах // Изв. АН СССР. 1958. Сер. математика. Т. 22. № 4. С. 499–474.
50. *Летов А. М.* Динамика полета и управление. М.: Наука, 1969. 531 с.
51. *Летов А. М.* Математическая теория процессов управления. М.: Наука, 1981. 256 с.
52. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 542 с.
53. *Johnson C. D.* Singular Solutions in Problems of Optimal Control // Advances in Control Systems. New York: Academic Press, 1965. P. 102–144.
54. *Athans M., Canon M.* On the Fuel-Optimal Singular Control of Nonlinear second-order Systems // Trans. JEEE Automatic Control. 1964. V. 9. № 4. P. 360–370.
55. *Дюкалов А. Н.* Признак оптимальности в линейных динамических задачах оптимального управления со смешанными ограничениями // ЖМВ и МФ. 1976. Т. 16. № 4. С. 856–873.
56. *Дюкалов А. Н., Илютович А. Е.* Признак оптимальности в нелинейных задачах оптимального управления со смешанными ограничениями. I, II // Автоматика и телемеханика. 1977. № 3. С. 96–106; № 5. С. 11–20.
57. *Гер-Крикоров А. М.* Оптимальное управление и математическая экономика. М.: Наука, 1977. 168 с.
58. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Особые оптимальные управления. М.: Наука, 1973. 361 с.
59. *Хоменюк В. В.* Оптимальные системы управления. М.: Наука, 1977. 150 с.
60. *Разумихин В. С.* Физические модели и методы теории равновесия в программировании и экономике. М.: Наука, 1975. 304 с., ил.

61. *Дикусар В. В.* Численное определение оптимальных траекторий при наличии смешанных ограничений // Тр. I-го Всесоюз. семинара по численным методам нелинейного программирования. Киев: Наукова думка, 1975. С. 78–86.
62. *Дикусар В. В., Дьячко А. Г.* Редукция задачи оптимального управления к краевой задаче // Тр. Московского института стали и сплавов. М.: МИСиС, 1981. С. 71–92.
63. *Deuffhard P. A.* Modified Newton Method for the Solution of ill-Conditioned Systems of Nonlinear Equations with Application to Multiple Shooting // *Numerische Mathematik*, Berlin ets.: Springer-Verlag, 1974. B22. H. 4. S. 289–316.
64. *Мoiseев Н. Н.* Численные методы теории оптимального управления, использующие вариации в пространстве состояний // *Кибернетика*. 1966. Т. 5. № 3. С. 1–23.
65. *Евтушенко Ю. Г.* Приближенный расчет задач оптимального управления // *Прикладная матем. и мех.* 1970. Т. 34. № 1. С. 95–104.
66. *Черноусько Ф. Л., Банничук В. П.* Вариационные задачи механики и управления. М.: Наука, 1973. 245 с.
67. *Ватель И. А., Кононенко А. Ф.* Об одной численной схеме решения задач оптимального управления // *ЖМБ и МФ*. 1970. Т. 10. № 1. С. 37–67.
68. *Пропой А. И.* Методы возможных направлений в задачах дискретного оптимального управления // *Автоматика и телемеханика*. 1967. № 2. С. 69–79.
69. *Пропой А. И.* Элементы теории оптимальных дискретных процессов. М.: Наука, 1973. 359 с.
70. *Будак Б. М., Беркович Б. М., Соловьева Е. Н.* О сходимости разностных аппроксимаций для задач оптимального управления // *ЖМБ и МФ*. 1969. Т. 9. № 3. С. 701–719.
71. *Табак Д., Куо В. С.* Оптимальное управление и математическое программирование. М.: Наука, 1975. 230 с., ил.
72. *Афанасьев А. П.* Об одном классе локальных вариационных задач с произвольным вырождением в целевой функции // *ДАН*. 1994. Т. 341. № 4.
73. *Афанасьев А. П.* Обобщенная изопериметрическая задача на многограннике // *Дифференциальные уравнения*. 1993. Т. 29. № 11.
74. *Altman M.* Bilinear Programming // *Bullentin de l'Academie Polonaise des Sciences*. 1968. V. 16. № 9. P. 741–746.
75. *Zwart P.* Computational Aspects of the Use of Cutting Planes in Global Optimization // *Proceedings of the 1971. Annual Conferense of ACM*, 1971. P. 457–465.
76. *Konno H. A.* Cutting Plane Algorithm for Solving Biline — Programs. Laxenburg, 1975. 24 p. (Research Memorandum) IIASA: RM-75–61.
77. *Афанасьев А. П.* О локальных вариационных задачах при наличии функциональных ограничений // *Дифференциальные уравнения*. 1998. Т. 34. № 11.
78. *Афанасьев А. П.* Особенности численной реализации процедуры продолжения решений в вариационных задачах, линейных по производным // *Численные методы в задачах оптимального экономического планирования*. М.: ВНИИСИ, 1983. С. 98–107.

79. *Афанасьев А. П.* Оценка расстояний в многозначных отображениях, возникающих в возмущенных задачах математического программирования // Методы оптимизации. М.: ВНИИСИ, 1984. С. 131–135.
80. *Афанасьев А. П.* Локальная вариационная задача второго порядка для нелинейных задач оптимального управления со смешанными ограничениями // Дифференциальные уравнения. 1995. Т. 31. № 11.
81. *Афанасьев А. П.* Об одном классе локальных вариационных задач с вырожденным интегрантом // ДАН. 1994. Т. 341. № 3.
82. *Афанасьев А. П.* Локальная вариационная задача первого порядка для линейных задач оптимального управления со смешанными ограничениями // Дифференциальные уравнения. 1996. Т. 32. № 11.
83. *Hoffman A. I.* On approximate solutions of systems of linear inequality // I. Res. Nat'l. Bur. Standarts № 49. 1952. P. 263–265.
84. *Афанасьев А. П., Дикусар В. В., Милютин А. А., Чуканов С. А.* Необходимое условие в оптимальном управлении. М.: Наука, 1990. 320 с.
85. *Clarke F.* Periodic solutions to Hamiltonian inclusions. J. Diff. Equations., 1981.
86. *Афанасьев А. П., Рогов С. В., Сухорослов О. В., Хуторной Д. А.* Реализация процедуры продолжения оптимальных решений в распределенной вычислительной среде // Dynamics of non-homogeneous systems. Proceedings of ISA, volume. Moscow, URSS, 2004.
87. *Foster I. and Kesselman C.* (eds.). The Grid: Blueprint for a New Computing Infrastructure. Morgan Kaufmann, 1999.
88. *Афанасьев А. П., Волошинов В. В., Рогов С. В., Сухорослов О. В.* Развитие концепции распределенных вычислительных сред // Проблемы вычислений в распределенной среде: Сборник трудов ИСА РАН / Под ред. С. В. Емельянова, А. П. Афанасьева. М.: УРСС, 2004.
89. *Афанасьев А. П., Волошинов В. В., Кривцов В. Е., Рогов С. В., Сухорослов О. В.* Использование информационно-алгоритмических ресурсов для организации распределенных вычислений // Проблемы вычислений в распределенной среде: Сборник трудов ИСА РАН / Под ред. С. В. Емельянова, А. П. Афанасьева. М.: УРСС, 2004.
90. *Емельянов С. В., Афанасьев А. П., Волошинов В. В., Гринберг Я. Р., Кривцов В. Е., Сухорослов О. В.* Реализация Грид-вычислений в среде IARnet // Информационные технологии и вычислительные системы. 2005. № 4.