МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ОПТИМИЗАЦИЯ

Типическое поведение движений динамических и непрерывных периодических систем: новый взгляд на устойчивость по Пуассону*

А. П. Афанасьев, С. М. Дзюба, А. П. Пьянов

Рассмотрим автономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), \tag{1}$$

считая, что $x \in \Sigma$ и f — гладкое (вообще говоря, класса C^1) векторное поле, определенное в каждой точке x некоторого открытого подмножества Σ евклидова векторного пространства $\mathbb{R}^n$.

Одно из важнейших мест в теории динамических систем, как известно, занимает проблема изучения поведения траекторий системы (1) на инвариантных и минимальных множествах. Многие классические результаты в данной области так или иначе относятся к случаю, когда порядок n рассматриваемой системы равен двум и связаны с теоремой Пуанкаре—Бендиксона и ее обобщениями (см., например, [1, 2]). Что же касается многомерных систем, то характерными результатами здесь являются теоремы Биркгофа о рекуррентных траекториях и минимальных множествах, теоремы возвращения Пуанкаре—Каратеодори и Хинчина, а также эргодические теоремы (см., например, [1]).

Упомянутые выше теоремы Биркгофа определяют ситуацию типического поведения решений системы (1). Под этим представляется уместным понимать следующее.

Согласно Биркгофу замыкание каждой рекуррентной траектории системы (1), содержащейся в ограниченном множестве, представляет собой компактное минимальное множество, а каждая целая траектория, содержащаяся в компактном минимальном множестве рекуррентна. Но любое непустое компактное множество, состоящее из целых траекторий, содержит компактное минимальное множество. Поэтому, если $\varphi(t)$ — некоторое решение системы (1), определенное для всех значений $t \in \mathbb{R}$ и ограниченное при $t \geqslant 0$, то ω-предельное множество Ω решения $\varphi(t)$ содержит

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 06–01–00821, 06–07–89350).

компактное минимальное множество. Другими словами, рекуррентные траектории являют собой те «кирпичики», которые собственно и образуют фундамент предельных множеств системы (1).

Заметим теперь, что каждая рекуррентная траектория устойчива по Пуассону. При этом в работах [3–6] показано, что каждое компактное минимальное множество содержит рекуррентные траектории, обладающие некоторым новым свойством, несколько более сильным, чем просто устойчивость по Пуассону. Основной целью настоящей работы является уточнение результатов, приведенных в [3–6]. Данное уточнение позволяет дополнить классическое определение устойчивости по Пуассону. Это, в свою очередь, позволяет существенно более точно описать ситуацию типического поведения решений системы (1). Более того, предложенный подход позволяет с единых позиций рассмотреть ситуацию типического поведения решений как динамических систем общего вида, так и непрерывных периодических систем. И, наконец, все сказанное непосредственно приводит к конструктивной процедуре построения равномерно устойчивых по Пуассону движений.

1. Динамические системы

Пусть Σ — компактное метрическое пространство с метрикой d, $\mathbb{R}$ — действительная ось $(-\infty, \infty)$ и g^t — однопараметрическая группа гомеоморфизмов на Σ, определенная и непрерывная при всех значениях $t \in \mathbb{R}$. Рассмотрим динамическую систему

$$f(t, p) = g^t p, \tag{2}$$

характеризуемую группой g^t, считая, что если точка $p \in \Sigma$ фиксирована, то $f(t, p)$ — движение (см., например, [1, с. 267]).

Первая основная лемма

Важнейшее свойство движений в пространстве Σ устанавливает следующая основная для дальнейших построений

Лемма 1. *Пусть q — фиксированная точка из Σ и $f(t, q)$ — соответствующее движение. Тогда для каждого положительного числа T из каждой последовательности*

$$N_1, N_2, \dots, N_k, \dots, \quad \lim_{k\to\infty} N_k = \infty, \tag{3}$$

натуральных чисел можно выбрать такую ее подпоследовательность

$$N_{k_1}, N_{k_2}, \dots, N_{k_l}, \dots, \quad \lim_{l\to\infty} N_{k_l} = \infty,$$

что

$$\lim_{l\to\infty} f(t + (N_{k_l} - 1)T, q) = f(t, p)$$

равномерно на каждом из отрезков $[a, b] \subset \mathbb{R}$ и

$$\lim_{l\to\infty} f(t + (N_{k_{l+1}} - N_{k_l})T, p) = f(t, p)$$

равномерно на всей оси $\mathbb{R}$, где $f(t,p)$ — некоторое устойчивое по Пуассону движение.

Доказательство. Зафиксируем некоторое $T > 0$. Для всех значений $t \in \mathbb{R}$ и $N = 1, 2, 3, \ldots$ положим

$$x_N(t) = f(t + (N-1)T, q) \tag{4}$$

и

$$a_N = f((N-1)T, q).$$

Тогда, как несложно заметить, при этих значениях t и N имеет место равенство

$$x_N(t) = g^t \underbrace{g^T \ldots g^T}_{N-1} q,$$

которое, очевидно, может быть переписано в следующем эквивалентном виде:

$$x_N(t) = g^t a_N. \tag{5}$$

Пусть теперь (3) — произвольная последовательность натуральных чисел. В соответствии с (3) из множества

$$a_1, a_2, \ldots, a_N, \ldots$$

выберем последовательность

$$a_{N_1}, a_{N_2}, \ldots, a_{N_k}, \ldots \tag{6}$$

и заметим, что согласно компактности пространства Σ из (6) можно выбрать сходящуюся подпоследовательность

$$a_{N_{k_1}}, a_{N_{k_2}}, \ldots, a_{N_{k_l}}, \ldots,$$

пределом которой является точка p, лежащая в ω-предельном множестве $\Omega \subset \Sigma$ движения $f(t,q)$.

Действуя как и при выборе последовательности (6), выберем из множества (4) последовательность

$$x_{N_1}, x_{N_2}, \ldots, x_{N_k}, \ldots \,. \tag{7}$$

Так как пространство Σ компактно, то в силу равенства (5) последовательность (7) равностепенно непрерывна на отрезке $[0,T]$. Поэтому согласно компактности Σ из (7) можно выбрать равномерно сходящуюся на $[0,T]$ подпоследовательность

$$x_{N_{k_1}}, x_{N_{k_2}}, \ldots, x_{N_{k_l}}, \ldots, \tag{8}$$

пределом которой является функция φ, определенная и непрерывная на отрезке $[0,T]$, т. е.

$$\lim_{l\to\infty} x_{N_{k_l}}(t) = \varphi(t)$$

равномерно на $[0,T]$ (см., например, [7, с. 481, 489]). Более того,

$$\varphi(0) = p,$$

а при $t \in [0,T]$ значения функции φ содержатся в множестве Ω.

Поскольку при всех значениях $t \in \mathbb{R}$ оператор g^t непрерывно отображает пространство Σ в себя, заметим, что

$$\lim_{l\to\infty} g^t a_{N_{k_l}} = g^t p$$

равномерно на отрезке $[0, T]$. Тогда, переходя в (5) к пределу при $N \to \infty$ вдоль множества (8), получим равенство

$$\varphi(t) = g^t p,$$

справедливое для всех значений $t \in [0, T]$.

Для простоты обозначений будем считать, что выбранная подпоследовательность (8) совпадает с последовательностью (7). Пусть

$$\Delta(N_1), \Delta(N_2), \ldots, \Delta(N_k), \ldots$$

— множество, элементы которого при всех значениях N_k из (3) определим по формуле

$$\Delta(N_k) = N_{k+1} - N_k.$$

При этом будем считать, что

$$\lim_{k\to\infty} \Delta(N_k) = \infty;$$

последнего всегда можно добиться, удалив из множества (3) соответствующие элементы при сохранении его счетности.

Заметим теперь, что в силу компактности пространства Σ и равенства (5) последовательность (7) равностепенно непрерывна на произвольном отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Поэтому согласно компактности Σ для всех значений $t \in \mathbb{R}$ имеет место равенство

$$\lim_{k\to\infty} x_{N_k}(t) = \varphi(t), \tag{9}$$

в котором сходимость равномерна на каждом из отрезков $[a, b] \subset \mathbb{R}$ (см., например, [7, с. 481]). Другими словами, функция $\varphi(t)$, построенная по формуле (9), определена и непрерывна при $t \in \mathbb{R}$, принимает значения в множестве Ω и удовлетворяет условию

$$\varphi(t) = g^t p, \tag{10}$$

т. е. при фиксированном $p \in \Omega$

$$f(t, p) = g^t p$$

— движение, целиком содержащееся в Ω.

Поскольку для всех значений N_k

$$a_{N_{k+1}} = x_{N_k}(\Delta(N_k)T),$$

то

$$p = \lim_{k\to\infty} x_{N_k}(\Delta(N_k)T).$$

Более того, так как движение $f(t, p)$ содержится в множестве Ω, а множество Ω по построению компактно, без какой-либо потери общности можем считать, что существует предел

$$\lim_{k\to\infty} f(\Delta(N_k)T, p) = p^*, \tag{11}$$

где p^* — некоторая точка множества Ω.

Если $p \neq p^*$, то в силу условий (9) и (11) найдется такое положительное число ε и такое натуральное число k_0, зависящее от ε, что

$$d\big(x_{N_k}(\Delta(N_k)T), f(\Delta(N_k)T, p)\big) \geqslant \varepsilon$$

при $k > k_0$. Поэтому для всех значений $k > k_0$ справедливо неравенство

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T} d\big(x_{N_k}(t + \Delta(N_k)T), f(t + \Delta(N_k)T), p\big) \geqslant \varepsilon. \tag{12}$$

Обозначим через F множество функций

$$f(t, p),\ f(t \pm T, p),\ \ldots,\ f(t \pm NT, p),\ \ldots,$$

определенных на отрезке $[0, T]$. Поскольку множество Ω компактно, то в силу соотношения (2) множество F равностепенно непрерывно на $[0, T]$. Поэтому согласно компактности Ω замыкание $\overline{F}$ множества F — компактное в топологии равномерной сходимости на $[0, T]$ множество.

Для всех значений $t \in [0, T]$ положим

$$x^*(t) = \lim_{k\to\infty} x_{N_k}(t + \Delta(N_k)T), \tag{13}$$

причем в силу компактности пространства Σ можем принять существование такого предела. Пусть при этом

$$t_k = (\Delta(N_k) + 1)T, \quad k = 1, 2, 3, \ldots .$$

Тогда согласно неравенству (12) для всех значений $k > k_0$ справедливо также и неравенство

$$\max_{0\leqslant t\leqslant t_k} d(x_{N_k}(t), f(t, p)) \geqslant \varepsilon.$$

Обозначим через k_1 некоторое натуральное число, удовлетворяющее условию $k_1 > k_0$. Тогда

$$\max_{0\leqslant t\leqslant t_{k_1}} d(x_{N_{k_1}}(t), f(t, p)) \geqslant \varepsilon.$$

Более того, найдутся такие положительное число $\varepsilon_1 < \varepsilon$ и натуральное число $k_2 > k_1$, что

$$\max_{0\leqslant t\leqslant t_{k_1}} d(x_{N_{k_2}}(t), f(t, p)) < \varepsilon_1.$$

Тогда, как и ранее,

$$\max_{0\leqslant t\leqslant t_{k_2}} d(x_{N_{k_2}}(t), f(t, p)) \geqslant \varepsilon,$$

причем найдутся такие положительное число $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ и натуральное число $k_3 > k_2$, что

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant t_{k_2}} d(x_{N_{k_3}}(t), f(t,p)) < \varepsilon_2.$$

Продолжая действовать аналогичным образом, несложно построить такие последовательности

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_l, \ldots, \qquad \lim_{l \to \infty} \varepsilon_l = 0,$$

положительных и

$$k_1, k_2, \ldots, k_l, \ldots, \qquad \lim_{l \to \infty} k_l = \infty,$$

натуральных чисел, что

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant t_{k_l}} d(x_{N_{k_l}}(t), f(t,p)) \geqslant \varepsilon \tag{14}$$

и

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant t_{k_l}} d(x_{N_{k_{l+1}}}(t), f(t,p)) < \varepsilon_l. \tag{15}$$

Заметим теперь, что объединение

$$\bigcup_{l=1}^{\infty} [0, t_{k_l}]$$

расширяющихся отрезков

$$[0, t_{k_1}] \subset [0, t_{k_2}] \subset \ldots \subset [0, t_{k_l}] \subset \ldots$$

исчерпывает всю полуось $[0, \infty)$, а на каждом из этих отрезков $[0, t_{k_l}]$ выполнены неравенства (14) и (15). Поэтому в силу (12) видим, что $x^* \notin \overline{F}$. Последнее, однако, противоречит равенствам (9) и (13). Отсюда следует, что

$$p = \lim_{k \to \infty} f(\Delta(N_k)T, p)$$

и, значит, в силу соотношений (9) и (10) для всех значений $t \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$f(t,p) = \lim_{k \to \infty} f(t + \Delta(N_k)T, p), \tag{16}$$

в котором сходимость равномерна на каждом из отрезков $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Но, согласно компактности множества $\overline{F}$, несложно заметить, что в равенстве (16) равномерная сходимость имеет место на всей оси $\mathbb{R}$.

Заметим теперь, что выбор числа T и последовательности (3) выше по существу не играл никакой роли. Поэтому в силу соотношений (4), (9), (10) и (16) лемма 1 доказана. $\square$

Замечание 1. Легко видеть, что в условиях леммы 1 выбор последовательности (3) не зависит от выбора числа T и обратно.

Равномерно устойчивые по Пуассону движения, рекуррентные траектории и минимальные множества

Как и ранее, будем считать, что пространство Σ компактно, и введем следующее новое по отношению к работам [3–6]

Определение 1. Пусть p — фиксированная точка из Σ и $f(t,p)$ — соответствующее движение. Будем говорить, что движение $f(t,p)$ *равномерно устойчиво по Пуассону*, если для каждой пары ε, T положительных чисел можно указать такое натуральное число N, что при $t \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство

$$d(f(t,p), f(t+NT,p)) < \varepsilon.$$

Легко видеть, что равномерно устойчивое движение устойчиво по Пуассону в классическом смысле этого определения. Простейшим примером равномерно устойчивого движения может служить периодическое движение. В качестве несколько менее тривиального примера отметим иррациональную обмотку тора и любое другое почти периодическое движение (см. ниже). При этом из дальнейшего будет видно, что приводить эти (и все другие) примеры бессмысленно, поскольку, как оказалось, они лишь по новому иллюстрируют одно из фундаментальных понятий теории динамических систем.

Теорема 1. *Пусть p — фиксированная точка из Σ и $f(t,p)$ — соответствующее движение. Оказывается, что $f(t,p)$ — рекуррентное движение тогда и только тогда, когда оно равномерно устойчиво по Пуассону.*

Доказательство. Пусть $f(t,p)$ — равномерно устойчивое по Пуассону движение. Тогда найдется такая последовательность натуральных чисел вида (3), что

$$\lim_{k\to\infty} f(t+N_kT,p) = f(t,p) \tag{17}$$

равномерно на каждом из отрезков $[-NT, NT]$, где N — любое натуральное число. Но сходимость в равенстве (17) равномерна относительно N, а объединение

$$\bigcup_{N=1}^{\infty} [-TN, TN]$$

расширяющихся отрезков

$$[-T,T] \subset [-2T,2T] \subset \ldots \subset [-NT,NT] \subset \ldots$$

исчерпывает всю ось $\mathbb{R}$. Поэтому замыкание $\overline{K}$ траектории K, описываемой движением $f(t,p)$, — минимальное множество, компактное в силу компактности пространства Σ. Поэтому $f(t,p)$ — рекуррентное движение (см., например, [1, с. 308]).

Обратно, предположим, что $f(t,p)$ — рекуррентное движение. Для некоторого значения $T > 0$ рассмотрим множество F функций

$$f(t,p),\ f(t\pm T,p),\ \ldots,\ f(t\pm NT,p),\ \ldots,$$

определенных на отрезке $[0, T]$. Так как пространство Σ компактно, то в силу соотношения (2) множество F равностепенно непрерывно на $[0, T]$. Более того, поскольку из компактности пространства Σ следует его полнота (см., например, [8, с. 102]), $\overline{K}$ — компактное минимальное множество (см., например, [1, с. 309]). Тогда из сказанного выше следует, что замыкание $\overline{F}$ множества F — компактное в топологии равномерной сходимости на отрезке $[0, T]$ минимальное множество (см., например, [7, с. 481]).

Заметим теперь, что в силу леммы 1 найдется такая последовательность натуральных чисел вида (3), что

$$\lim_{k\to\infty} f(t + (N_k - 1)T, p) = f(t, q) \tag{18}$$

равномерно на каждом из отрезков $[a, b] \subset \mathbb{R}$ и

$$\lim_{k\to\infty} f(t + (N_{k+1} - N_k)T, q) = f(t, q) \tag{19}$$

равномерно на всей оси $\mathbb{R}$, где $f(t, q)$ — некоторое устойчивое по Пуассону движение.

Обозначим через E множество функций

$$f(t, q),\ \ f(t \pm T, q),\ \ \ldots,\ \ f(t \pm NT, q),\ \ \ldots,$$

определенных на отрезке $[0, T]$. Рассуждая как и в случае множества F, несложно проверить, что множество E равностепенно непрерывно на $[0, T]$. Так как при этом пространство Σ компактно, то замыкание $\overline{E}$ множества E — компактное в топологии равномерной сходимости на $[0, T]$ минимальное множество. Но согласно равенствам (18) и (19) $\overline{E} \subset \overline{F}$. Последнее, в свою очередь, означает равенство множеств $\overline{E}$ и $\overline{F}$ как минимальных.

Заметим теперь, что выбор числа T выше по существу не играл никакой роли. Поэтому согласно лемме 1 несложно заметить, что $f(t, p)$ — равномерно устойчивое по Пуассону движение.

Таким образом, теорема 1 доказана. □

Легко видеть, что теорема 1 дает новое определение рекуррентного движения, которое естественным образом дополняет классическое (см., например, [1, с. 308]).

Возвращаясь к рассмотрению примеров равномерно устойчивых по Пуассону движений отметим, что в силу теоремы 1 каждое почти периодическое движение оказывается равномерно устойчивым, поскольку траектория, описываемая почти периодическим движением рекуррентна (см. [1, с. 316]). Обратное, вообще говоря, неверно (см. [1, с. 321], где приведен пример рекуррентного движения на торе, не являющегося почти периодическим). Более того, устойчивое по Пуассону движение не обязано быть равномерно устойчивым (см. [1, с. 278], где приведены примеры просто устойчивых движений, которые не являются рекуррентными).

В качестве тривиального следствия теоремы Биркгофа (см., например, [1, с. 308]) и теоремы 1 имеет место следующая

Теорема 2. *Каждая траектория K, содержащаяся в компактном минимальном множестве M, является траекторией, описываемой равномерно устойчивым по Пуассону движением $f(t,p)$.*

Замечание. В условиях леммы 1 $f(t,p)$ — равномерно устойчивое по Пуассону движение. Последнее непосредственно следует из доказательства первой части теоремы 1 и теоремы 2.

Конечномерный случай

Если пространство Σ конечномерно, то без допущения о его компактности имеет место следующее дополнение к теореме Пуанкаре—Бендиксона, дающее весьма полную картину поведения движений.

Теорема 3. *Пусть q — фиксированная точка из Σ и $f(t,q)$ — соответствующее движение. Предположим, что данное движение ограничено при $t \in \mathbb{R}^+$. Тогда для каждого положительного числа T из каждой последовательности натуральных чисел вида (3) можно выбрать такую ее подпоследовательность*

$$N_{k_1}, N_{k_2}, \dots, N_{k_l}, \dots, \qquad \lim_{l\to\infty} N_{k_l} = \infty,$$

что

$$\lim_{l\to\infty} f(t + (N_{k_l} - 1)T, q) = f(t,p)$$

равномерно на каждом из отрезков $[a,b] \subset \mathbb{R}$ и

$$\lim_{l\to\infty} f(t + (N_{k_{l+1}} - N_{k_l})T, p) = f(t,p)$$

равномерно на всей оси $\mathbb{R}$, где $f(t,p)$ — некоторое равномерно устойчивое по Пуассону движение.

Доказательство теоремы 3 почти дословно повторяет доказательство леммы 1 и потому здесь опускается.

Замечание 2. Как и в условиях леммы 1 в условиях теоремы 3 выбор последовательности (3) не зависит от выбора числа T и обратно.

2. Непрерывные периодические системы

Рассмотрим нормальную систему обыкновенных дифференциальных уравнений, векторная запись которой имеет вид

$$\dot{x} = f(t,x), \tag{20}$$

где $x = (x^1,\dots,x^n)$ — векторная функция действительного переменного t, а $f = (f^1,\dots,f^n)$ — векторная функция, определенная и непрерывная вместе со своими частными производными

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^j}, \quad i,j = 1,\dots,n,$$

на прямом произведении $\mathbb{R}\times\Sigma$ действительной оси $\mathbb{R}$ и некоторого открытого подмножества Σ евклидова векторного пространства $\mathbb{R}^n$. Кроме того, будем считать, что функция f периодична по t с периодом, равным единице.

Вопрос о существовании у системы (20) периодических решений весьма важен как для теории дифференциальных уравнений, так и для приложений. Одним из основных результатов здесь является следующее утверждение, принадлежащее Х. Л. Массера (см. [9] или [10, с. 53]): пусть порядок n системы (20) равен двум и пусть каждое решение этой системы определено для всех значений $t \geqslant 0$; тогда, если система (20) имеет некоторое решение $\xi(t)$, ограниченное при этих значениях t, то данная система имеет также и периодическое решение $\varphi(t)$ периода, равного единице. В многомерном нелинейном случае, как известно, из существования у системы (20) ограниченного решения следует существование лишь интегрального инвариантного множества (см., например, [11, с. 105]). При этом о свойствах решений системы (20) во многом судят по свойствам дискретной системы, порожденной действием за период оператора сдвига вдоль решений данной системы.

В работах [3–5] для исследования ситуации типического поведения решений как и системы (1), так и системы (20), был применен единый подход, в котором существенным образом используется только групповые свойства оператора сдвига вдоль решений дифференциальных уравнений. Ниже в рамках методов § 1 приводится усиление результатов работ [3–5], ориентированных на неавтономный случай и опирающихся на работу [6].

Периодический оператор сдвига, непрерывные и дискретные системы и движения

Прежде всего, во избежание возможных разночтений приведем следующие основные определения.

Пусть Σ — некоторое метрическое пространство с метрикой d, $\mathbb{R}$ — действительная ось $(-\infty, \infty)$, $\mathbb{R}^+$ — действительная полуось $[0, \infty)$ и $f(\tau, t, p)$ — отображение множества $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+\times\Sigma$ в пространство Σ. Положим

$$f(\tau, t, p) = G(\tau, t)p$$

и будем считать, что:

a) отображение $f(\tau, t, p)$ непрерывно по совокупности переменных τ, t, p на множестве $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \Sigma$;

b) для всех значений $\tau \in \mathbb{R}$

$$G(\tau, 0) = E,$$

где E — оператор тождественного преобразования;

c) для всех значений $(\tau, t, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$

$$G(\tau + s, t)G(\tau, s) = G(\tau, t + s). \tag{21}$$

Тогда будем говорить, что $f(\tau, t, p)$ — *движение*, если пара $(\tau, p) \in \mathbb{R} \times \Sigma$ фиксирована.

Приведенное выше определение движения близко к определению процесса, используемому в книге [11], но не эквивалентно ему. При этом по аналогии с [10, с. 12] представляется уместным называть оператор $G(\tau, t)$ *оператором сдвига* вдоль движения $f(\tau, t, p)$. Систему же, характеризуемую оператором сдвига $G(\tau, t)$, в дальнейшем будем называть *непрерывной системой*.

Из всего множества операторов сдвига в дальнейшем будет рассматриваться только лишь *T-периодический оператор сдвига*, т. е. оператор $G(\tau, t)$, при всех значениях $(\tau, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ удовлетворяющий условию

$$G(\tau + T, t) = G(\tau, t), \tag{22}$$

где T — некоторое положительное число. Систему, характеризуемую T-периодическим оператором сдвига $G(\tau, t)$, будем называть *непрерывной T-периодической системой*.

Установим теперь некоторые простейшие свойства движений непрерывных T-периодических систем. Для этого предположим, что пространство Σ компактно.

Пусть (τ, p) — фиксированная точка множества $\mathbb{R} \times \Sigma$ и $f(\tau, t, p)$ — соответствующее движение непрерывной T-периодической системы. Для всех значений $t \in [0, T]$ и $N = 0, 1, 2, \ldots$ положим

$$\varphi_N(t) = f(\tau, t + NT, p). \tag{23}$$

Обозначим F — множество функций (23). Поскольку пространство Σ компактно, множество F равностепенно непрерывно на $[0, T]$. Поэтому замыкание $\overline{F}$ множества F — компактное в топологии равномерной сходимости на отрезке $[0, T]$ множество (см., например, [7, с. 481]).

В силу периодичности оператора $G(\tau, t)$ несложно заметить, что на множестве $\overline{F}$ определен оператор U, непрерывно отображающий $\overline{F}$ в себя и удовлетворяющий условию

$$\varphi_{N+1} = U\varphi_N, \quad N = 0, 1, 2, \ldots .$$

Более того, U имеет непрерывный обратный оператор U^{-1}, такой, что

$$\varphi_N = U^{-1}\varphi_{N+1}, \quad N = 0, 1, 2, \ldots .$$

Система, характеризуемая итерациями U^N оператора U, является обычной дискретной динамической системой, обладающей всеми соответствующими свойствами (см., например, [11, гл. 4]). В дальнейшем дискретную систему U^N, построенную указанным выше способом, будем называть *дискретной системой над движением $f(\tau, t, p)$*.

В дальнейшем при исследовании движений непрерывных T-периодических систем будет использовано следующее простейшее свойство дискретных систем, для простоты приводимое именно для дискретной системы над движением $f(\tau, t, p)$.

Лемма 2. *Пусть (τ, p) — фиксированная точка множества $\mathbb{R} \times \Sigma$, $f(\tau, t, p)$ — соответствующее движение и пусть F — множество, задаваемое равенством* (23). *Тогда ω-предельное множество $\Omega(\overline{F})$ замыка-*

ния $\overline{F}$ множества F — непустое компактное инвариантное множество. При этом

$$\lim_{N\to\infty} U^N \overline{F} = \Omega(\overline{F}).$$

Доказательство леммы 2 почти дословно повторяет доказательство леммы 4.2.2 книги [11] и, потому, здесь опускается.

Вторая основная лемма

Пусть $G(\tau, t)$ — T-периодический оператор сдвига в компактном пространстве Σ. Тогда имеет место следующая важнейшая для дальнейших построений

Лемма 3. *Пусть (τ, q) — фиксированная точка множества $\mathbb{R}\times\Sigma$ и $f(\tau, t, q)$ — соответствующее движение. Тогда из каждой последовательности*

$$N_1, N_2, \ldots, N_k, \ldots, \quad \lim_{k\to\infty} N_k = \infty, \tag{24}$$

натуральных чисел можно выбрать такую ее подпоследовательность

$$N_{k_1}, N_{k_2}, \ldots, N_{k_l}, \ldots, \quad \lim_{l\to\infty} N_{k_l} = \infty,$$

что

$$\lim_{l\to\infty} f(\tau, t + (N_{k_l} - 1)T, q) = f(\tau, t, p)$$

равномерно на каждом из отрезков $[a, b] \subset \mathbb{R}^+$ и

$$\lim_{l\to\infty} f(\tau, t + (N_{k_{l+1}} - N_{k_l})T, p) = f(\tau, t, p)$$

равномерно на всей полуоси $\mathbb{R}^+$, где $f(\tau, t, p)$ — некоторое движение, зависящее лишь от выбора последовательности (24).

Доказательство. Для всех значений $t \in \mathbb{R}^+$ положим

$$x_N(t) = f(\tau, t + (N-1)T, q), \quad N = 1, 2, 3, \ldots,$$

и

$$a_N = f(\tau, (N-1)T, q).$$

Так как $G(\tau, t)$ — T-периодический оператор сдвига вдоль движения $f(\tau, t, q)$, то в силу условий (21) и (22) для всех значений $t \in \mathbb{R}^+$ справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned} G(\tau, t + (N-1)T) &= G(\tau + T, t + (N-2)T)G(\tau, T) = \\ &= G(\tau, t + (N-2)T)G(\tau, T) = \\ &= G(\tau + T, t + (N-3)T)G(\tau, T)G(\tau, T) = \\ &= G(\tau, t + (N-3)T)G(\tau, T)G(\tau, T). \end{aligned}$$

Продолжая действовать аналогичным образом, легко показать, что

$$G(\tau, t + (N-1)T) = G(\tau, t)\underbrace{G(\tau, T)\ldots G(\tau, T)}_{N-1}, \quad N = 1, 2, 3, \ldots .$$

Тогда имеем

$$x_N(t) = G(\tau, t)\, \underbrace{G(\tau, T) \dots G(\tau, T)}_{N-1}\, q, \quad N = 1, 2, 3, \dots,$$

или, что эквивалентно,

$$x_N(t) = G(\tau, t) a_N, \quad N = 1, 2, 3, \dots .$$

Теперь, почти дословно повторяя доказательство леммы 1, несложно проверить справедливость утверждения и леммы 3. □

Устойчивые по Пуассону движения и минимальные множества

Пусть $G(\tau, t)$ — T-периодический оператор сдвига в компактном пространстве Σ. Введем следующее

Определение 2. Пусть (τ, p) — фиксированная точка множества $\mathbb{R} \times \Sigma$ и $f(\tau, t, p)$ — соответствующее движение. Будем говорить, что движение $f(\tau, t, p)$ *устойчиво по Пуассону*, если для каждого положительного числа ε можно указать такое натуральное число N, что при $t \in \mathbb{R}^+$ выполнено неравенство

$$d(f(\tau, t, p), f(\tau, t + NT, p)) < \varepsilon.$$

Легко видеть, что лемма 3 устанавливает существование устойчивых по Пуассону движений и сценарий перехода к ним. Более того, пусть $f(\tau, t, p)$ — некоторое устойчивое движение и пусть F — множество функций, определенных на отрезке $[0, T]$ равенством (23). Рассмотрим дискретную динамическую систему U^N над движением $f(\tau, t, p)$. Тогда в силу лемм 2 и 3 несложно заметить, что замыкание $\overline{F}$ множества F — компактное в топологии равномерной сходимости на $[0, T]$ минимальное множество. При этом имеет место следующая обратная

Теорема 4. *Пусть (τ, p) — фиксированная точка множества $\mathbb{R} \times \Sigma$, $f(\tau, t, p)$ — соответствующее движение и пусть F — множество, задаваемое равенством (23). Тогда, если замыкание $\overline{F}$ множества F — минимальное множество, то $f(\tau, t, p)$ — равномерно устойчивое по Пуассону движение.*

Доказательство. Прежде всего, заметим, что в силу леммы 3 в условиях теоремы 4 найдется такая последовательность натуральных чисел вида (24), что

$$\lim_{k \to \infty} f(\tau, t + (N_k - 1)T, p) = f(\tau, t, q) \tag{25}$$

равномерно на каждом из отрезков $[a, b] \subset \mathbb{R}^+$ и

$$\lim_{k \to \infty} f(\tau, t + (N_{k+1} - N_k)T, q) = f(\tau, t, q) \tag{26}$$

равномерно на всей полуоси $\mathbb{R}^+$, где $f(\tau, t, q)$ — некоторое устойчивое по Пуассону движение.

Предположим, что $\overline{F}$ — минимальное множество, очевидно, компактное. Обозначим через E множество функций

$$f(\tau, t, q),\ f(\tau, t+1, q),\ \ldots,\ f(\tau, t+N, q),\ \ldots,$$

определенных на отрезке $[0, T]$. Рассмотрим дискретную динамическую систему U^N над движением $f(\tau, t, q)$. Поскольку $f(\tau, t, q)$ — устойчивое движение, то в силу леммы 2 несложно заметить, что замыкание $\overline{E}$ множества E — компактное в топологии равномерной сходимости на $[0, T]$ минимальное множество. Но согласно условиям (25) и (26) $\overline{E} \subset \overline{F}$, что в данном случае означает равенство множеств $\overline{E}$ и $\overline{F}$ как минимальных. Следовательно, по лемме 3 устойчивость движения $f(\tau, t, q)$ влечет за собой устойчивость движения $f(\tau, t, p)$.

Таким образом, теорема 4 доказана. □

Конечномерный случай

Если пространство Σ конечномерно, то без допущения о его компактности имеет место следующий полный аналог теоремы 3.

Теорема 5. *Пусть* (τ, q) *— фиксированная точка множества* $\mathbb{R} \times \Sigma$ *и* $f(\tau, t, q)$ *— соответствующее движение. Предположим, что данное движение ограничено при* $t \in \mathbb{R}^+$. *Тогда из каждой последовательности натуральных чисел вида* (24) *можно выбрать такую ее подпоследовательность*

$$N_{k_1}, N_{k_2}, \ldots, N_{k_l}, \ldots, \qquad \lim_{l\to\infty} N_{k_l} = \infty,$$

что

$$\lim_{l\to\infty} f(\tau, t + (N_{k_l} - 1)T, q) = f(\tau, t, p)$$

равномерно на каждом из отрезков $[a, b] \subset \mathbb{R}^+$ *и*

$$\lim_{l\to\infty} f(\tau, t + (N_{k_{l+1}} - N_{k_l})T, p) = f(\tau, t, p)$$

равномерно на всей полуоси $\mathbb{R}^+$, *где* $f(\tau, t, p)$ *— некоторое равномерно устойчивое по Пуассону движение.*

Доказательство теоремы 5 здесь опускается, поскольку оно почти дословно повторяет доказательство леммы 3. И хотя в настоящей работе доказательство леммы 3 только намечено, его несложно воспроизвести, действуя как и при доказательстве леммы 1.

3. Построение равномерно устойчивых по Пуассону движений

Как видно из определений 1 и 2 проблема отыскания равномерно устойчивых по Пуассону движений в каждом конкретном случае совсем нетривиальна. Поэтому перейдем к построению общего метода построения таких движений. Поскольку, очевидно, случаи движений в динамических и непрерывных периодических системах принципиально не отличаются, в настоящей работе ограничимся рассмотрением только динамических систем.

Устойчивость по Пуассону в дискретных динамических системах

Прежде всего, следуя [1], рассмотрим проблемы устойчивости по Пуассону в дискретных динамических системах.

Пусть теперь Σ — метрическое пространство с метрикой d и пусть U^N — дискретная динамическая система, характеризуемая гомеоморфным отображением U пространства Σ в себя.

Определение 3. Точку $p \in \Sigma$ назовем *положительно устойчивой по Пуассону* (относительно действия на нее системы U^N), если для каждой ее окрестности E и каждого натурального числа k можно указать такое натуральное число $N_k > k$, что $U^{N_k}p \in E$. Аналогичным образом, точку $p \in \Sigma$ назовем *отрицательно устойчивой по Пуассону*, если для каждой ее окрестности E и каждого натурального числа k можно указать такое натуральное число $N_k > k$, что $U^{-N_k}p \in E$. И, наконец, будем говорить, что точка $p \in \Sigma$ *устойчива по Пуассону*, если она и положительно, и отрицательно устойчива.

Легко видеть, что точка $p \in \Sigma$ положительно устойчива по Пуассону тогда и только тогда, когда найдется такая последовательность вида (3), что

$$\lim_{k\to\infty} U^{N_k}p = p. \tag{27}$$

В самом деле, из равенства (27) определение положительной устойчивости следует непосредственно. Обратно, если имеет место положительная устойчивость, найдется такая последовательность

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k, \ldots, \quad \lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0,$$

положительных чисел и такие натуральные числа $N_k > k$, что

$$d(U^{N_k}p, p) < \varepsilon_k,$$

откуда и следует (27).

Аналогичным образом, точка $p \in \Sigma$ отрицательно устойчива по Пуассону тогда и только тогда, когда найдется такая последовательность вида (3), что

$$\lim_{k\to\infty} U^{-N_k}p = p.$$

Построению равномерно устойчивых по Пуассону движений в динамической системе g^t предпошлем построение устойчивых по Пуассону точек в системе U^N. Для этого, прежде всего, предположим, что пространство Σ сепарабельно. Далее, следуя [1], рассмотрим некоторое множество $E \subset \Sigma$ и посредством равенства

$$F = E \setminus (E \cap U^{-1}E \cup U^{-2}E \cup \ldots \cup U^{-k}E \cup \ldots)$$

введем в рассмотрение множество F, очевидно, являющемуся той частью множества E, которая не содержит точки множеств

$$U^{-1}E,\ U^{-2}E,\ \ldots,\ U^{-k}E,\ \ldots .$$

Тогда

$$U^{-k}E \cap F = \varnothing, \quad k = 1, 2, 3, \ldots .$$

Но так как по построению $F \subset E$, отсюда следует, что

$$U^{-k}F \cap F = \varnothing, \quad k = 1, 2, 3, \ldots .$$

Поэтому, как легко видеть,

$$U^{k}E \cap F = \varnothing, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

и

$$U^{k}F \cap F = \varnothing, \quad k = 1, 2, 3, \ldots .$$

Пространство Σ сепарабельно, т. е. в Σ существует счетное всюду плотное множество P. Пусть

$$E_1, E_2, \ldots, E_k, \ldots \tag{28}$$

— счетное множество окрестностей точек $p_k \in P$, таких что $p_k \in E_k$, и, следовательно, объединение множеств (28) покрывает пространство Σ. Действуя как и ранее, для каждого множества семейства (28) построим соответствующее множество F_k и положим

$$G^{+} = F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_k \cup \ldots$$

и

$$H^{+} = \Sigma \setminus G^{+}.$$

Тогда множество H^{+} будет содержать положительно устойчивые по Пуассону точки системы g^N, а множество G^{+} — нет.

В самом деле, пусть $p \in H^{+}$ и пусть E_i — любая окрестность, содержащая точку p. По определению множества H^{+} точка p не принадлежит множеству F_i и потому для некоторого значения k принадлежит множеству $E_i \cap U^{-k}E_i$. Поэтому, применив отображение U^k к включению

$$p \in E_i \cap U^{-k}E_i,$$

получим

$$U^{k}p \in E_i,$$

откуда непосредственно следует, что точка p положительно устойчива по Пуассону.

Пусть теперь $p \in G^{+}$. Тогда найдется некоторая окрестность U_j точки p, такая что $p \in F_j$. Так как для всех значений $k = 1, 2, 3, \ldots$ по построению

$$U^{k}F_j \cap U_j = \varnothing,$$

то, тем более,

$$U^{k}p \cap U_j = \varnothing,$$

т. е. точка p покидает свою окрестность U_j и не возвращается в нее. Последнее, очевидно, означает, что точка p не может быть положительно устойчивой по Пуассону.

Таким образом, множества положительно устойчивых H^+ и неустойчивых G^+ по Пуассону точек построены. Очевидно, что аналогичным образом строятся множества отрицательно устойчивых H^- и неустойчивых G^- точек. Положим

$$H = H^+ \cap H^-,$$

завершая тем самым построение множества H устойчивых по Пуассону точек в системе U^N.

Построение равномерно устойчивых по Пуассону движений в динамических системах

Вновь предположим, что пространство Σ компактно. Пусть $f(t,p)$ — движение в динамической системе g^t и пусть

$$f(N,p), \quad N = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{29}$$

— множество положений этой системы в дискретные моменты времени N. Тогда *дискретной динамической системой вдоль движения* $f(t,p)$ системы g^t будем называть семейство отображений g^N, определяющих положения (29).

Переходя к построению равномерно устойчивых движений в системе g^t, заметим, что имеет место следующая

Теорема 6. *Каждые два из приводимых ниже утверждений эквивалентны*:

1) *точка p положительно устойчива по Пуассону в системе g^N*;
2) *точка p отрицательно устойчива по Пуассону в системе g^N*;
3) *точка p устойчива по Пуассону в системе g^N*;
4) *$f(t,p)$ — равномерно устойчивое по Пуассону движение в системе g^t.*

Доказательство. Если справедливо утверждение 4, то очевидно, справедливо также и утверждение 1. Обратно, если справедливо утверждение 1, то найдется такая последовательность вида (3), что выполнено равенство (27). Тогда в силу леммы 1 из последовательности (3) можно выбрать такую ее подпоследовательность

$$N_{k_1}, N_{k_2}, \ldots, N_{k_l}, \ldots, \quad \lim_{l\to\infty} N_{k_l} = \infty,$$

что равенство

$$\lim_{l\to\infty} f(t + (N_{k_{l+1}} - N_{k_l})T, p) = f(t,p)$$

выполнено равномерно на всей оси $\mathbb{R}$. Следовательно, по замечанию к теореме 2 $f(t,p)$ — равномерно устойчивое по Пуассону движение.

Если $f(t,p)$ — равномерно устойчивое движение, то легко видеть, что в силу определения 1 для каждой пары ε, T положительных чисел можно указать такое натуральное число N, что при $t \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство

$$d(f(t - NT, p), f(t,p)) < \varepsilon.$$

Поэтому, рассуждая как и выше, несложно показать, что утверждения 2 и 4 теоремы 6 также эквивалентны. По этой причине эквивалентны и утверждения 3 и 4.

Таким образом, теорема 6 доказана. □

Если принять компактность пространства Σ, то в силу леммы 1 и замечания к теореме 2 несложно заметить, что в Σ существуют равномерно устойчивые по Пуассону движения системы g^t. Следовательно, согласно теореме 6 построенное выше множество H (применительно, конечно, к системе g^N) не пусто и содержит те и только те точки p, для которых $f(t, p)$ — равномерно устойчивое движение.

Литература

1. *Немыцкий В. В.*, *Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.; Л.: ОГИЗ, 1947; 3-е изд. М.: УРСС, 2004.
2. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
3. *Афанасьев А. П.*, *Дзюба С. М.* К вопросам управления в периодических процессах // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1998. № 4. С. 15–20.
4. *Дзюба С. М.* Об условно-периодических решениях дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 8. С. 1020–1023.
5. *Афанасьев А. П.*, *Дзюба С. М.* Периодический оператор сдвига и квазипериодические кривые // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40. № 10. С. 1367–1372.
6. *Афанасьев А. П.*, *Дзюба С. М.* О рекуррентных траекториях, минимальных множествах и квазипериодических движениях динамических систем // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 11. С. 1544–1549.
7. *Шварц Л.* Анализ. Т. 2. М.: Мир, 1972.
8. *Шварц Л.* Анализ. Т. 1. М.: Мир, 1972.
9. *Massera J. L.* The existence of periodic solutions of systems of differential equations // Duke Math. J. 1950. Vol. 17. P. 457–475.
10. *Красносельский М. А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1966.
11. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.