Квазианалитическое решение систем дифференциальных уравнений с полиномиальными правыми частями

А. П. Афанасьев, А. С. Тарасов

Аннотация

В работе строится схема исследования области сходимости квазианалитического решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений с полиномиальными правыми частями. Квазианалитическим решением называется приближенное решение, полученное в виде отрезка ряда Тейлора, явно зависящее от начальных условий.

Введение

Метод решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), основанный на разложении в ряд Тейлора, известен очень давно [1]. Его применял еще Ньютон. Однако в настоящее время для численного решения прикладных задач, имеющих заметную вычислительную сложность, этот метод практически не применяется. Связано это с тем, что вычислительные затраты при его применении очень резко начинают расти уже при небольшой размерности задачи. Однако современные концепции построения распределенных вычислительных систем позволяют отвлечься от соображений экономии вычислительных ресурсов [2, 3]. И тогда оказывается, что метод разложения в ряд обладает многочисленными неоспоримыми достоинствами. Прежде всего, это возможность получения решения в символьном виде, и, как следствие, с установленной явной зависимостью решения от начальных условий. Напомним суть этого метода. Пусть имеется система ОДУ с правой частью, не зависящей от независимой переменной (в контексте дальнейших рассуждений такое упрощение не принципиально)

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t)), \tag{1}$$

$t \in [t_0, T]$, $x(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $f(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x(t_0) = x_0$, $f(x)$ — липшицева. Будем искать вектор-функцию $x(t)$ в виде ряда Тейлора, состоящего из $s+1$ членов, а именно:

$$x(t) = x_0 + x^{(1)}(t_0)(t - t_0) + \ldots + x^{(i)}(t_0)\frac{(t - t_0)^i}{i!} + \ldots +$$
$$+ x^{(s)}(t_0)\frac{(t - t_0)^s}{s!} + H(x_0, t_0, T, s),$$

где $x^{(i)}(t_0)$ — i-я производная функции $x(t)$, взятая в точке t_0, а $H(x_0, t_0, T, s)$ — остаточный член.

Очевидно, что

$$x^{(1)}(t_0) = \left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t_0} = f(x(t)) = f(x_0).$$

Чтобы получить $x^{(2)}(t_0)$, нужно проделать следующее:

$$x^{(2)}(t_0) = \left.\frac{d}{dt}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)\right|_{t_0} = \left.\frac{d}{dt}\Big(f(x(t))\Big)\right|_{x_0} = \left.\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right|_{x_0} \cdot f(x_0),$$

где

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n(x)}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Если обозначить $x^{(i)} = \varphi^i(x_0)$, то очевидно, что

$$x^{(i+1)}(t_0) = \varphi^{i+1}(x_0) = \left.\frac{\partial \varphi^i(x)}{\partial x}\right|_{x_0} \cdot f(x_0),$$

где

$$\frac{\partial \varphi^i(x)}{\partial x} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1^i(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi_1^i(x)}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial \varphi_1^i(x)}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial \varphi_2^i(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi_2^i(x)}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial \varphi_2^i(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial \varphi_n^i(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi_n^i(x)}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial \varphi_n^i(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

В конце концов приближенное решение системы (1) можно будет записать в следующем символьном виде

$$x(t) = x_0 + \sum_{i=1}^{s} \frac{\varphi^i(x_0)}{i!}(t - t_0)^i + H(x_0, t_0, T, s).$$

Существующее математическое обеспечение позволяет реализовывать символьную обработку (например, вычисление производных) и символьное хранение данных. И на первое место выходит проблема оценки радиуса сходимости R и остаточного члена $H(\cdot)$. Очевидно следуя логике исследования системы ОДУ в символьном виде, очень желательно получать оценку в параметрическом виде, а именно $T = T(x_0, s)$, $R(x_0)$ и $H(x_0, T(x_0, s), s)$.

В настоящей работе изучаемая система ОДУ сужена до важного как в теоретическом, так и в прикладном отношении случая, когда ее правыми частями являются многомерные многочлены.

Далее в работе строится схема исследования свойств решения системы (2) в виде формулы Тейлора, которая вместе с остаточным членом записывается в символьном виде.

Обозначения

x — вектор начальных данных.
n — размерность задачи, количество компонент x.
t — время.
t_0 — начальный момент.
T — конечный момент.
$H(x_0, t_0, T, s)$ — остаточный член.
$R(x_0)$ — радиус сходимости.
i, j — индексы, пробегающие от 1 до n, если не определено другого.
p — индекс, пробегающий степени производных от 1 до ∞.
$f(x)$ — правая часть ОДУ.
$x(t)$ — решение ОДУ.
$x^{(s)}$ — s-я производная.
s — порядок производной.
x_0 — начальное значение x.
$P_1(x)$ — полиномиальная правая часть, вектор-функция.
m — степень P_1.
$m(s) = s(m-1)+1$ — степень P_s.
$P_{1,i}$ — полиномы в уравнении $\dot{x}_i = P_{1,i}(x)$.
P_s — полином соответствующий s-й производной.
α, β, γ, u — целочисленные вектора размерности n, пробегающие всевозможные индексы в полиномах.
e_j — единичный вектор с нулями везде, кроме координаты j.
$a(\alpha; P_{i,s})$ — коэффициент при мономе x^α в полиноме $P_{s,i}$.
u_k, h_k, d_k — набор коэффициентов, по которым происходит подсчет полной производной.
U — матрица шагов u.
N — суммарное количество мономов в P_1.
k — индекс, пробегающий от 1 до N.
$|P|$ — модуль многочлена.

$\Pi(s, m)$ — произведение $m(1)m(2)\dots m(s-1)$.
K, q — некоторые константы.
s' — индекс, пробегающий от 1 до s.
$g(\cdot)$ — отображение для знакосогласованного определения.
$U \subset R^n$ — подгруппа с базовыми векторами u_k.
$R_{\min}$ — оценка радиуса сходимости снизу.
a_s — коэффициент при мономе $x_1^{m(s)}$.
V — подмножество множества $\{1, \dots, N\}$.
D_V — носитель V.
$l = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$ — вектор из N чисел $\lambda_i > 0$, если u_i принадлежит заданному подмножеству V.
Ul — вектор, сумма некоторого количества шагов.
s_i — последовательность степеней.
$\lambda = \sum\limits_i \lambda_i$
o — индекс компоненты в специальных случаях.
T — последовательность индексов t_i.
t_i — индекс от 1 до N, номер шага u_{t_i}.
b_T — коэффициент по этому пути.
T_i — последовательность путей.
$\langle a, b\rangle$ — скалярное произведение a и b.
$\delta(X)$ — характеристическая функция множества X.
Z — некоторое множество.
c — некоторая константа.
d — временный коэффициент.
$c_l, c_{l'}, c_k, c_{\inf}$ — доли шагов по «нефакториальным» координатам.
$\lfloor x \rfloor$ — целая часть x.

Основные формулы и их представления

Будем записывать систему ОДУ с полиномиальной правой частью в виде

$$\dot{x} = P_1(x(t)), \tag{2}$$

где $P_1(\cdot)$ — n-мерный многочлен m-го порядка с постоянными коэффициентами.

Многочлен удобно представлять в виде массива коэффициентов при различных мономах:

$$P_{s,i} = \sum_{\substack{|\alpha|=m(s)\\ \alpha_i \geqslant 0}} a(\alpha; P_{s,i}) x^\alpha,$$

где α — n-мерный индекс степеней монома.

По формуле полной производной:

$$x_i^{(s)} = \sum \frac{\partial x_i^{(s-1)}}{\partial x_j} \dot{x}_j = P_{s,i}. \tag{3}$$

Заменим $x_i^{(s-1)}$ на $P_{s-1,i}$ и продифференцируем по x_i.

Получаем следующую формулу:

$$P_{s,i} = \sum_{\alpha,j,\beta} a(\alpha; P_{s-1,i})\alpha_j x^{\alpha} x^{-e_j} a(\beta; P_{1,j}) x^{\beta}, \tag{4}$$

где $1 \leqslant i$, $j \leqslant n$, α — пробегает все индексы многочленов $P_{s-1,i}$, β — все индексы многочленов $P_{1,i}$, e_j — вектор, состоящий из нулей и единицы на j-м месте.

С каждый шагом степень многочлена вырастает на $m-1$, и в результате степень многочлена $P_{s,i}$ равна

$$m(s) = s(m-1) + 1.$$

С точки зрения хранения полинома, важным представляется вопрос количества мономов и, соответственно, количество коэффициентов, которые надо хранить. А так же как это количество растет с ростом s.

Количество коэффициентов однородного многочлена от n переменных степени k равно C_{n+k}^{n}. Неоднородный многочлен можно свести к однородному введя дополнительную переменную $x_{n+1} \equiv 0$ и домножая на эту переменную те мономы, степень которых меньше k. Таким образом, количество коэффициентов неоднородного монома равно C_{n+k+1}^{n+1}.

В нашем случае количество коэффициентов

$$C_{n+s(m-1)+2}^{n+1} = \frac{(n+s(m-1)+2)!}{(n+1)!(s(m-1)+2)!} < (s(m-1)+2)^{(n+1)},$$

а значит с ростом s количество мономов многочлена растет полиномиально. Это говорит о том, что объем памяти необходимый для хранения подобных объектов значителен, но позволяет быть размещенным в современных компьютерах. Например для $n = 3$ и билинейной правой части можно хранить производные до $s = 100$.

Формулу (4) можно представить в виде рекуррентной формулы для вычисления коэффициентов P_s:

$$a(\gamma; P_{s,i}) = \sum_{\alpha+\beta-e_j=\gamma} a(\alpha; P_{s-1,i}) a(\beta; P_{1,j}) \alpha_j. \tag{5}$$

Графическое представление многочлена и рекуррентной формулы

Будем представлять многочлен Q в виде n-мерной таблицы, где в ячейке с координатами $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \alpha$ записан коэффициент $a(\alpha; Q)$. Так, например, на рис. 1 *б* представлен многочлен $x_1 x_2$.

Рекуррентная формула (5) в таком представлении выглядит следующим образом. Каждому моному с ненулевым коэффициентом $a(\beta; P_{1,j})x^{\beta}$ многочлена $P_{1,j}$ ставится в соответствие следующий набор коэффициентов: $u_k = \beta - e_j$; $h_k = a(\beta; P_{1,j})$; $d_k = j$, $1 \leqslant k \leqslant N$, где N — количество ненулевых мономов в P_1. По такому набору можно вычислить полную производную произвольного многочлена следующим образом: значение в каждой ячейке с индексом α для каждого $1 \leqslant k \leqslant N$ умножается на h_k и α_{d_k}, после чего полученное значение суммируется в ячейку $\alpha + u_k$.

Если вектор-функция P_1 однородная, то коэффициенты производных $P_{s,i}$ для различных s можно представлять в одной таблице, так как степень многочлена строго определена и различна для разных s, т. е. про каждый коэффициент можно однозначно сказать, какой производной он принадлежит.

Рассмотрим для примера следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}_1 = x_1^1 x_2^1, \quad \dot{x}_2 = x_1^0 x_2^2 - x_1^2 x_2^0.$$

Вектор функция P_1 второго порядка, в ней присутствует 3 монома с ненулевыми коэффициентами. Этим мономам соответствуют три вектора:

- моному $x_1 x_2$ соответствует $u_1 = (0, 1)$, коэффициент при нем $h_1 = 1$, $d_1 = 1$;
- моному x_2^2 соответствует $u_2 = (2, -1)$, $h_2 = 1$, $d_2 = 2$;
- моному $-x_1^2$ соответствует $u_3 = (0, 1)$, $h_3 = -1$, $d_3 = 2$.

На рис. 1 *а* обозначены вектора u_k, соответствующие им коэффициенты и правило, по которому следует суммировать значение в соответствующих ячейках. А также выполнено вычисление одного шага в соответствии с правилами для ячейки $\alpha = (2, 3)$ со значением $a(\alpha) = 1$. При этом в ячейку $(4, 2)$ записалось значение $a(\alpha) * h_2 * \alpha_{d_2} = 1 * 1 * 3$, в ячейку $(4, 2)$ — $a(\alpha) * h_1 * \alpha_{d_1} + a(\alpha) * h_3 * \alpha_{d_3} = 1 * 1 * 2 + 1 * (-1) * 3 = 2 - 3 = -1$.

Попробуем таким методом подсчитать $x_1^{(2)}, x_1^{(3)}, x_1^{(4)}, x_1^{(5)}$.

Создадим таблицу для $\dot{x}_1$. Эта таблица полностью пуста, за исключением ячейки $(1, 1)$, в которой находится единица, что соответствует моному $x_1 x_2$ (рис. 1 *б*).

Будем теперь последовательно применять правило дальнейшего заполнения этой таблицы.

Пройдя 4 шага, мы получим следующую картину (рис. 1 *в*). В этой таблице вычислены значения мономов для производных степеней от 1 до 5. Для каждой производной, в силу однородности, ее коэффициенты находятся на диагонали, для которой $\alpha_1 + \alpha_2$ равно номеру производной плюс один. Записывая обратно в символьный вид получаем:

$$x_1^{(2)} = x_1^3; \quad x_1^{(3)} = 3x_1^3 x_2; \quad x_1^{(4)} = 3x_1^5 + 6x_1^3 x_2^2; \quad x_1^{(5)} = 27x_1^5 x_2 + 6x_1^3 x_2^3.$$

Продифференцируем s-кратно полином $P_{0,i} = x_i$, используя формулу (3). Получаем следующее уравнение для коэффициентов $P_{s,i}$:

$$a(\gamma; P_{s,i}) = \sum_{v_s(T)=\gamma} b_T, \tag{6.0}$$

$$b_T = \prod_{j=1}^{s} h_{t_j}(v_j, e_{d_{t_j}}), \tag{6.1}$$

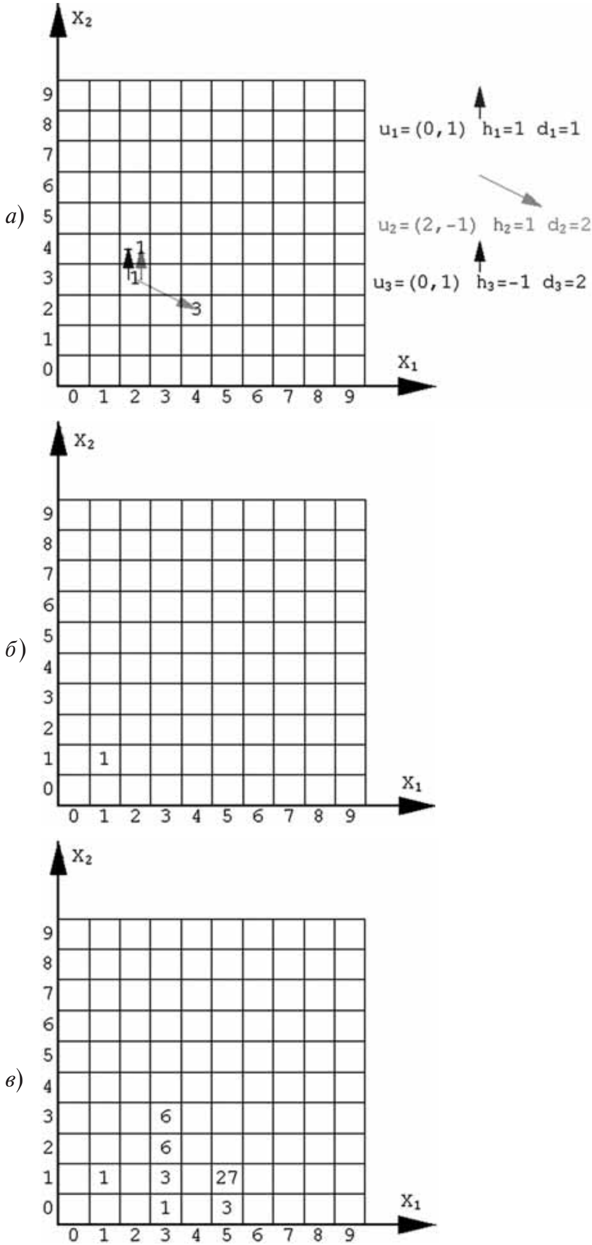

Рис. 1. Таблицы

где T пути — всевозможные последовательностям индексов $T=(t_1,t_2,\dots,t_s)$, а

$$v_k(T) = e_i + \sum_{j=1}^{k} u_{t_j}$$

— конец частично пройденного пути T после i-го шага.

Для более простой записи здесь происходит не $(s-1)$-кратное дифференцирование P_1, а s-кратное дифференцирование $P_0 = x$, т. е. $P_{0,i} = x_i^1$.

Оценка радиуса сходимости снизу

Определение 1. Для заданного многочлена $P = \sum a(\alpha)x^\alpha$, обозначим через $|P| = \sum |a(\alpha)|$ сумму модулей коэффициентов.

Утверждение 1.

$$|P_s| \leqslant \Pi(s,m)\max(|P_{1,i}|)^s|P_1|,$$

где $\Pi(s,m) = \prod_{k=1}^{s'=s} m(s'-1)$. *В частности* $\Pi(s,2) = s!$.

Доказательство. По формуле (4), $|P_{s,i}| \leqslant \sum\limits_{\alpha,j,\beta} a(\alpha;P_{s-1,i})\alpha_j a(\beta;P_{1,j})$. Вклад отдельного монома $a(\alpha;P_{s-1,i})x^\alpha$ в $|P_{s-1}|$ равен

$$a(\alpha;P_{s-1,i})\sum_{j,\beta}\alpha_j a(\beta;P_{1,j}) = a(\alpha;P_{s-1,i})\sum_j \alpha_j|P_{1,j}|.$$

Так как $\sum\limits_j \alpha_j = m(s-1)$, то

$$|P_{s,i}| \leqslant m(s-1)|P_{s-1,i}|\max_k(|P_{1,k}|).$$

По индукции получаем искомую формулу. □

Теорема 1. *Для полиномиальной правой части P_1 уравнения $\dot{x} = P_1(x)$ и начальных условиях $x_0 \in X_0$ радиус сходимости квазианалитического решения*

$$R > R_{\min} = \frac{1}{(m-1)\max(|P_{1,i}|)x_{\max}},$$

где $x_{\max} = \max\limits_{x\in X_0}(|x_i|)$.

Доказательство. $P_s(x) \leqslant |P_s|\max(|x_i(t_0)|)^{s+1}$ и $\frac{\Pi(s,m)}{s!} \leqslant (m-1)^s$. Тогда коэффициент ряда

$$\frac{P_s(x)}{s!}t^s \leqslant \frac{\Pi(s,m)}{s!}\max(|P_{1,i}|)^s|P_1|\max(|x_i(t_0)|)^{s+1}t^s \leqslant Kq^s,$$

где $q = \max(|P_{1,i}|)(m-1)\max(|x_i(t_0)|)t$, а $K = |P_1|\max(|x_i(t_0)|)$.

Тогда остаточный член можно оценить $H(x_0,t) < Kq^{s+1}$.

Радиус сходимости оценивается из соотношения $q < 1$, в результате чего получается искомая оценка. □

Несмотря на примитивность оценки, в ряде случаев она является точной. Например, в дифференциальном уравнении $\dot{x} = x^2$.

Знакосогласованная правая часть

Определение 2. Назовем вектор-функцию $P_{1,i}$ *знакосогласованной*, если при вычислении любой заданной производной $x^{(s)}$ по формуле (4) для всех мономов с совпадающими коэффициентами x^γ, $\gamma = \alpha + \beta - e_j$ знаки их коэффициентов совпадали.

В частности вектор-функция P_1 с положительными коэффициентами является знакосогласованной.

Утверждение 2. *Рассмотрим группу $U \subset Z^n$ натянутую на элементы $u = \beta - e_j \in Z^n$ для мономов с ненулевыми коэффициентами из $P_{1,j}$. Пусть для некоторого гомоморфизма $g : U \to Z_2$ знак $\operatorname{sgn}(a(\alpha; P_{1,i})) = -1^{g(\alpha - e_i)}$ для всех коэффициентов вектор-функции P_1. Тогда для всех P_s это правило так же выполняется и P_1 является знакосогласованной.*

Докажем по индукции. Пусть правило выполняется для всех $P_{s'}$ при $s' < s$. Знак $\operatorname{sgn}(a(\alpha; P_{s-1,i})a(\beta; P_{1,i}))$ равен знаку

$$-1^{g(\alpha - e_i)} \times -1^{g(\beta - e_j)} = -1^{g(\gamma - e_i)}.$$

То есть знаки всех коэффициентов в сумме (4) при мономе x^γ в многочлене $P_{s,i}$ равны между собой и равны $-1^{g(\gamma - e_i)}$. □

Определение конечности радиуса сходимости по правой части

Представляет собой интерес следующая задача — выделить класс правых частей, и начальных данных, для которых разложение в ряд Тейлора имеет бесконечный радиус сходимости. По-видимому, этот класс достаточно узок. Покажем это на двух примерах:

Первый пример. Рассмотрим множество $|x| = 1$ и возьмем проекцию $\dot{x}$ на эту сферу. Получили непрерывное векторное поле, которое для $n \equiv 1 \pmod 2$ всегда имеет особую точку. То есть существует такой x, что $x||\dot{x}$. В силу однородности P_1, для любого $\lambda \neq 0$ $(\lambda x)||(\lambda x)^{(1)}$.

Проведем замену координат, переводящую x в вектор $|x|e_1$. Вектор-функция P_1 при этом перейдет в некоторую другую вектор-функцию P_1', в которой ненулевой коэффициент при x_1^m может встретиться только в $P_{1,1}'$. Тогда, если коэффициент a в мономе ax_1^m не равен нулю, то решение, стартующее из e_1 (или из $-e_1$, если $a < 0$), уходит на бесконечность за время $1/a$. То есть, для P_1 общего положения с вероятностью 1 найдутся такие начальные значения, для которых траектория уходит на бесконечность за конечное время.

Второй пример. Рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\dot{x}_1 = -x_2^2, \quad \dot{x}_2 = x_1 x_2.$$

Скалярное произведение $(\dot{x}, x) \equiv 0$, точка x движется по дуге. Скорость движения $|\dot{x}|$ равна при этом $|x| * x_2$. То есть скорость точки на оси OX_1 равна нулю, а траекторией является половина окружности с концами на оси OX_1. Таким образом, все траектории ограничены. Однако и в этом случае радиус сходимости ограничен.

Покажем это для точки $x_1(0) = 0, x_2(0) = 1$.

Так как $x_1(0) = 0$, то $x_2^{(s)}(x_0) = P_n(x_0) = a_s x_2^{s+1}$.

Эта система уравнений является знакосогласованной для отображения $(x_1, x_2) \to (x_1 + x_2/2) \pmod 2$. Векторами, на которые натягивается U, являются $u_1 = (1, 0)$ для монома $x_1 x_2$ при дифференцировании по x_2 и $u_2 = (-1, 2)$ для монома $-x_2^2$ при дифференцировании по x_1. При операции полного дифференцирования многочлена $P_{s,i}$ в формуле (4) каждому элементу суммы соответствует в точности один элемент u.

Для выбранной последовательности $T = (t_1, t_2, \ldots, t_s)$, где $t_j \in \{1, 2\}$, можно подсчитать вклад в a_s, отбрасывая при взятии производной на шаге j все элементы суммы, не соответствующие u_{t_j}.

Так как наш пример знакосогласованный, то $|a_s|$ оценивается снизу модулем этой величины.

Возьмем $s = 4k$, подсчитаем, чему равен вклад b для последовательности, состоящей из k троек u_1, u_1, u_2, а далее k шагов u_2.

При взятии каждого шага степень монома изменяется на соответствующий u, а коэффициент домножается на коэффициент при мономе, соответствующем u и степени монома в той координате, по которой проходило дифференцирование.

Таким образом, $b = -1 * (2 * 2 * -2) * (4 * 4 * -3) * (6 * 6 * -4) * \ldots * ((2k) * (2k) * (-k-1)) * -k * (-k+1) * \ldots * -2 * -1 = (-1)^{k+1} 4^k (k!)^4 (k+1)$.

Тогда

$$\left|\frac{P_s(x_0)}{s!}\right| \geqslant \frac{4^k (k!)^4 (k+1)}{(4k)!} \geqslant \frac{4^k (k+1)}{4^{4k}} \geqslant \frac{1}{64^k}.$$

Радиус сходимости при этом $R < 64 < \infty$.

В некоторых случаях решение системы ОДУ можно представить рядом Тейлора с бесконечным радиусом сходимости. Можно рассмотреть следующий пример:

$$\dot{x}_1 = 0, \quad \dot{x}_2 = x_1^2 + x_1 x_2.$$

Несложно вычислить, что

$$x_1^{(s)} = 0, \quad x_2^{(s)} = x_1^s (x_1 + x_2).$$

Для точки $x_0 = (1, 0)$, $x^{(s)} = (0, 1)^t$. Радиус сходимости при этом равен ∞.

Следующая ниже теорема обобщает описанные выше примеры и дает ответ, когда для начальных условий $x_0 = e_1$ и знакосогласованной правой части радиус сходимости конечен, а когда нет.

Введем необходимые леммы и определения.

Лемма 1. *Пусть задан набор* $q_i > 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $\sum\limits_{i=1}^{n} q_i \leqslant 1$. *И задана последовательность* $a_p = \prod_i \lfloor q_i p \rfloor !$. *Тогда существует предел* $\lim\limits_{p\to\infty} (a_p/p!)^{1/p} = C < \infty$. *Причем* $C = 0$, *если* $\sum\limits_i q_i < 1$, *и* $C > 0$, *если* $\sum\limits_i q_i = 1$.

Доказательство. Пусть k — количество сомножителей в a_p. Тогда $k \geqslant p - n$. Пусть $q = 2(\min\limits_i q_i)^{-1}$.

Домножим каждый сомножитель в a_p на q. Таким образом,

$$a_p q^{k_p} = (q1) * (q2) * \ldots * (q\lfloor q_1 p \rfloor) * \ldots * \ldots * (q1) * (q2) * \ldots * (q\lfloor q_n p \rfloor).$$

Подсчитаем количество сомножителей $k(x)$, меньших некоторого числа x: Преобразуем формулу $q\lfloor q_i y \rfloor < x$. Получаем $\lfloor q_i y \rfloor < xq^{-1}$, и наконец $\lfloor q_i y \rfloor \leqslant \lfloor xq^{-1} \rfloor$.

Для данного i количество возможных различных значений $\lfloor q_i y \rfloor$ не превышает $\lfloor xq^{-1} \rfloor$. Суммируя по всем i, получаем

$$k(x) \leqslant n\lfloor xq^{-1} \rfloor \leqslant n\left(\frac{1}{2} x \min_i (q_i)\right).$$

Минимум $\min\limits_i (q_i) \leqslant 1/n$, поэтому $k(x) \leqslant x/2$.

То есть $a_p q^{k_p}$ есть произведение k_p чисел, среди которых чисел, не превышающих x, не более $x/2$. Значит, если отсортировать сомножители в порядке возрастания $a_p q^{k_p} = b_1 * b_2 * \ldots * b_{k_p}$, то $b_i \geqslant 2i > i$, а значит $a_p q^{k_p} > (k_p)!$.

Таким образом,

$$\lim_{p\to\infty} \left(\frac{a_p}{p!}\right)^{1/p} \geqslant q^{-1} \lim_{p\to\infty} \left(\frac{q^{p-k_p} k_p!}{p!}\right)^{1/p}.$$

Выражение под корнем ведет себя полиномиально с ростом p, поэтому этот предел равен 1.

В результате

$$\lim_{p\to\infty} \left(\frac{a_p}{p!}\right)^{1/p} \geqslant q^{-1}.$$

Если $r = \left(1 - \sum\limits_i q_i\right) > 0$, то $p!/a_p \geqslant \lfloor rp \rfloor$, так как $\sum \lfloor q_i p \rfloor + \lfloor rp \rfloor \leqslant p$, тогда

$$\lim_{p\to\infty} \left(\frac{a_p}{p!}\right)^{1/p} \leqslant \lim_{p\to\infty} \left(\frac{1}{\lfloor rp \rfloor !}\right)^{1/p}$$

Сделав замену $p' = rp$, получаем

$$\lim_{p\to\infty} \left(\frac{1}{\lfloor rp \rfloor !}\right)^{1/p} = \lim_{p'\to\infty} \left(\frac{1}{\lfloor p' \rfloor !}\right)^{r/p'} = 0. \qquad \square$$

Лемма 2. *Пусть у нас задана последовательность целочисленных векторов x^i с неотрицательными координатами размерности n. Тогда, из этой последовательности можно выделить такую бесконечную подпоследовательность, в которой не убывает каждая компонента.*

Доказательство. Пусть последовательность x_1^i немонотонна. Если она не ограничена, тогда в ней можно выбрать монотонно возрастающую последовательность, а если ограничена, тогда найдется такое число C, что $x_1^i = C$ для бесконечного количества различных i, это множество и выберем в качестве подпоследовательности.

С полученной подпоследовательностью повторим операцию для x_2, и так далее до x_n. В результате получим подпоследовательность, в которой для каждого k последовательность x_k^i монотонно не убывает. □

Определение 3. Для некоторого подмножества $V \subset \{1, 2, \ldots, N\}$ индексов u_k обозначим через D_V множество индексов дифференцирования $D_V = \{d_k | k \in V\}$ — *носитель.*

Определение 4. Некоторое подмножество V индексов u_k назовем полным, если существует сумма $U_V = \sum\limits_k \lambda'_k u_k$ (где $\lambda'_k \geqslant 0$) такая, что $\langle U_V, k\rangle > 0$ при $k \in D_V \cup \{1\}$ и $\langle U_V, k\rangle = 0$ в остальных случаях.

Определение 5. Правую часть $P_1(x)$ уравнения $\dot{x} = P_1(x)$ назовем *полной*, если существует такое полное подмножество $V \subset \{1, 2, \ldots, N\}$, и такие $\lambda_k > 0$, что для векторов u_k соответствующих правой части P_k: $\sum\limits_k u_k \lambda_k = \lambda(m-1)e_1$, где $\lambda_k > 0$.

Теорема 2. *Если знакосогласованная правая часть $P_1(x)$ уравнения $\dot{x} = P_1(x)$ является полной, то в этом и только в этом случае радиус сходимости для начальных условий $x_0 = e_1$ ограничен.*

Доказательство. Достаточность.

1. Для начала предположим, что множество V минимально, в том смысле, что в нем нельзя выбрать подмножества, для которого все условия теоремы сохраняются. Если это не так, то всегда можно перейти к минимальному подмножеству.

Так же покажем, что если для V существует полное подмножество W, то само V так же полное. Так как $D_V = D_W$, то нам остается доказать, что существует такая сумма U_V, в которой каждый u_k встречается как минимум один раз и $\langle U_V, e_i\rangle > 0$ для любого $i \in D_V$. Пусть $U' = \sum\limits_{k \in V \setminus W} u_k$ (рис. 1*б*). Пусть c — $\min\limits_i \langle U', e_i\rangle$. Если $c \geqslant 0$, то $U_V = U_W + U'$, если $c < 0$, то $U_V = (1-c)U_W + U'$.

В силу целочисленности u_k величины λ_k, λ, сформулированные в условии, так же можно считать целыми. При этом, так как сумма коэффициентов каждого u_k равна $m-1$, $\lambda = \sum \lambda_i$.

Так как V полное подмножество, то для него существует такой набор λ'_k, так же целых, что вектор $\sum \lambda'_k u_k$ положителен на всех индексах из D_V.

Так же будем считать, что $\lambda_k \geqslant \lambda'_k$. Если это не так, то всегда можно домножить λ_k на некоторое число, чтобы неравенство стало выполняться.

2. Покажем, что существует такая координата o и возрастающая последовательность s_p, такая что $|P_o^{s_i}(x_0)| > s_i! q^{s_i}$, где $q > 0$. Из этого автоматически будет следовать, что радиус сходимости ряда Тейлора ограничен q^{-1}.

В качестве o возьмем индекс, принадлежащий D_V, а s_p определим позже.

Вычислим $P_o^{(s_p)}(x_0) = a_p x_1^{m(s_p)} = a_p$.

$P_o^{s_p}$ — результат s_p-кратного дифференцирования уравнения $x_o = x_o$.

$$\sum_{i=1}^{p} u_{t_i} = m(s_p)e_1 - e_o, \quad \text{а} \quad v_i(T) = e_o + \sum_{j=1}^{i} u_{t_j}.$$

Для доказательства ограниченности радиуса сходимости нам достаточно найти такую последовательность путей T_p, соответствующих s_p, коэффициент b_{T_p} при которых растет с факториальной скоростью, т. е. отношение $b_{T_p}/s_p! > q^{s_p}$ для некоторого $0 < q < \infty$ для всех p, начиная с некоторого номера.

Заметим, что в b_{T_p} коэффициенты h_{t_i} можно не рассматривать, так как они дают только экспоненциальный рост.

3. Для начала покажем, что такой путь T_p существует.

В случае, если $1 \in D_V$, то можно взять $o = 1$, такой путь будет существовать по условию теоремы для всех $s_p = p\lambda$.

4. Рассмотрим случай, когда $1 \notin D_V$.

Покажем, что для любого индекса $o \in D_W$ существует *сток* — сумма $\sum\limits_{k=1}^{N} \gamma_k u_k = ce_1 - e_o$, где γ_k — целое неотрицательное.

Заметим, что для всех $j \notin \{1\} \cup D_V$ $\langle u_k, e_j \rangle = 0$. Действительно, если найдется u_k, для которого $\langle u_k, e_j \rangle > 0$, то в силу условий задачи найдется j, такое что $\langle u_{k'}, e_j \rangle < 0$. А тогда $j = d_{k'} \in D_V$.

Тогда задачу можно переформулировать следующим образом:

Существует такой набор λ_k, что $\left\langle \sum \gamma_k u_k + e_0, \delta(D_V) \right\rangle = 0$, где $\delta(D_V)$ — характеристическая функция.

Предположим, что это не так, т. е. существует непустое множество Z, для индексов $o \in Z$ которого это не верно.

Тогда для любого u_k, $\sum u_k \delta(Z) \geqslant 0$. Действительно, предположим, что существует такой u, что $\sum u\delta(Z) < 0$. То по определению u его коэффициенты не отрицательные числа за исключением быть может одной -1 в некотором индексе o.

Тогда все положительные коэффициенты u принадлежат $D_V \backslash Z$. Для каждого $o' \in D_V \backslash Z$ существует сток $\gamma_{i,o'}(u_i, \delta(D_V)) = -e_{o'}$.

Тогда сумма $u + \sum \gamma_{i,o'} * \langle u, e_{o'} \rangle u_i = -e_o$. То есть $o \notin Z$. Противоречие.

Значит, для взятого нами индекса o существует набор γ, такой что $\gamma_k u_k = ce_1 - e_o$.

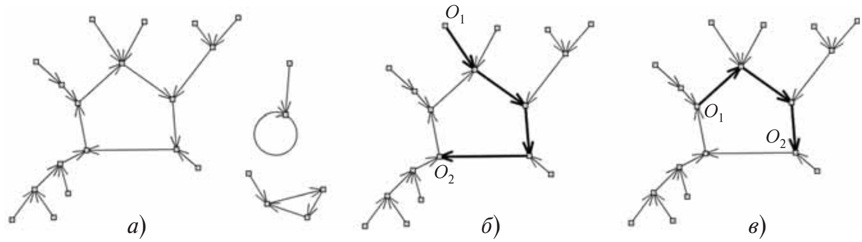

Рис. 2

Тогда в качестве s_p можно брать $r + \lambda p$, где $r = \frac{c-1}{m-1} = \sum\limits_k \gamma_k$, а путь T_p будет состоять из u_k с кратностью $\gamma_k + p\lambda_k$.

5. Путь T_p разобьем на следующие части (рис. 2 *б*):

- «подъем», состоящий из p повторяющихся частей T';
- далее «спуск», состоящий из p повторяющихся частей T'';
- и наконец завершающий кусок T''', приводящий в точку ce_1.

В пути T' каждый шаг u_k будет встречаться λ'_k раз. При прохождении по этому пути значение вектора по каждой координате из D_V увеличивается.

В пути T'' каждый шаг u_k будет встречаться $\lambda''_k = \lambda_k - \lambda'_k \geqslant 0$. При прохождении по этому пути значение вектора по каждой координате из $D_V \backslash \{1\}$ уменьшается. В сумме эти два пути оставляют значение вектора по каждой координате из $D_V \backslash \{1\}$ неизменной.

Завершающий кусок T''' состоит из шагов u_k с кратностью γ_k, если $o \neq 1$, или пустой, если $o = 1$.

Мы задали, какие шаги и в каком количестве находятся в T'. Зададим теперь их порядок, так чтобы выполнялось условие $b_{T_p} \neq 0$, т. е. на каждом шагу i домножающий коэффициент был больше нуля.

Сначала покажем это для первого шага T', стартующего из e_o.

6. Выберем последовательность шагов $t_1, t_2, \ldots t_{\lambda'}$ в пути T', так чтобы все домножающие коэффициенты $(v_i, e_{d_{t_i}})$ были отличны от нуля при первом повторе пути T'.

Такая последовательность существует. $\sum v_i = m(i) = i(m-1) + 1$, значит множество Q_i координат j, для которых $\langle v_i, e_j \rangle > 0$, — непусто. В качестве шага следует выбрать $t_i = k$, для которого $d_{t_i} \in Q_i$.

Пусть на некотором шаге i' оказалось, что все вектора u_k, для которых $d_k \in Q_{i'}$, оказались выбраны, и следующий шаг совершить нельзя. Для любого индекса $o \in D_V \backslash \{1\}$ существует сток, значит, для некоторого $o' \in Q_{i'}$ существует, такой k, что $d_k = o'$ и $\big\langle u_k \delta(\{1, 2, \ldots, N\} \backslash Q_{i'})\big\rangle > 0$. То есть существует координата j вне $Q_{i'}$ для которой $\langle u_k, e_j \rangle > 0$. j не может принадлежать $D_V \setminus Q_{i'}$, так как тогда u_k был бы подходящим и неиспользованным шагом. Значит $j = 1$. В таком случае существует подмножество $V' \subset V$, для которого выполняются условия теоремы и $D_{V'} = \{1\} \cup Q_{i'} \neq D_V$.

А это противоречит тому, что V было выбрано минимальным.

7. Покажем теперь, что при таком выборе T' $b_{T_p} \neq 0$.

Мы доказали что при первом шаге произведение $\prod_{i=1}^{\lambda'}\langle v_i, d_{t_i}\rangle > 0$. При последующих повторениях шага T'

$$\prod_{i=1}^{p'\lambda'}\langle v_i, d_{t_i}\rangle = \prod_{i'=1}^{p'}\prod_{i=1}^{\lambda'}\left\langle v_i + (i'-1)U', d_{t'_i}\right\rangle > 0,$$

$$\prod_{i'=1}^{p}\prod_{i=1}^{\lambda'}\left\langle v_i + (i'-1)(v_{\lambda'} - e_o), d_{t'_i}\right\rangle > \prod_{i'=1}^{p}\prod_{i=1}^{\lambda'} 1 + (i'-1) = p!^{\lambda'}.$$

8. Посмотрим, не обнуляется ли b_{T_p} на спуске и оценим произведение множителей на этой части пути.

$U'' = \sum \lambda''_k u_k$ имеет отрицательные величины по всем координатам из $D_V\backslash\{1\}$ (рис. 2 *б*). $U''' = \sum \gamma_k u_k$ имеет неположительные величины по всем координатам из $D_V\backslash\{1\}$.

Будем задавать порядок в T'' так чтобы на последнем шаге T'' не было множителя 0. Частичная сумма перед последним шагом T'' $\langle v_{s_p-r-\lambda''}, j\rangle > 0$ для всех $j \in D_V\backslash\{1\}$.

Каждый следующий шаг k будем выбирать так, чтобы $\langle v_i, d_k\rangle > 0$. Это всегда можно сделать, иначе бы мы не смогли прийти в конечную точку.

Аналогично можно выбрать последовательность в T''', не обнуляющую b_T.

Оценим теперь произведение множителей из формулы (6.1), относящееся к спуску. Для пути $T'' = (t''_1, t''_2, \ldots, t''_{\lambda''})$ обозначим через $v'_i = \sum_{j=i}^{\lambda''} u_{t_i}$. Так как для U'', $\langle v'_i, j\rangle \leqslant 0$ для $j \in D_V\backslash\{1\}$.

$$\prod_{i=p\lambda'}^{p\lambda}\langle v_i, d_{t_i}\rangle = \prod_{i'=1}^{p'}\prod_{i=1}^{\lambda''}\left\langle v_{s_p-r} - v'_i - (i'-1)U'',\ d_{t''_i}\right\rangle > 0,$$

$$\prod_{i=p\lambda'}^{p\lambda}\left\langle v_{s_p-r} - v'_i - (i'-1)U'',\ d_{t''_i}\right\rangle > \prod_{i'=1}^{p}\prod_{i=1}^{\lambda''} 1 + (i'-1) = p!^{\lambda''},$$

$$b_{T_p} > p!^{\lambda'} * p!^{\lambda''} * K = p!^{\lambda},$$

где K — часть формулы (6.1), относящая к завершающему куску. K больше нуля и меньше $m^r_{s_p}$, поэтому при изучении факториальности роста b_{T_p} K можно игнорировать.

По доказанной лемме рост b_{T_p} такой же, как и у $s_p!$.

А значит, радиус сходимости формального ряда Тейлора меньше бесконечности.

Необходимость.

1. Если радиус сходимости ограничен, значит найдется такой индекс o, для которого $\sup(|P_o^{(s)}(x_0)|/s!)^{1/s} > 0$.

Значит, существует бесконечная последовательность s_i, для которой $|P_0^{(s_i)}| > 0$. Тогда по лемме 2 найдутся такие s_1 и s_2 и такие пути T_{s_1} и T_{s_2}, для которых $|b_{T_{s_1}}| > 0$, $|b_{T_{s_2}}| > 0$ и для каждого k количество λ_{k,s_1} шагов u_k, участвующих в T_{s_1}, не больше чем соответствующее число λ_{k,s_2} шагов в T_{s_2} (s_2 доминирует s_1).

Тогда получаем, что для $\lambda_k = \lambda_{k,s_2} - \lambda_{k,s_1}$

$$\sum_k u_k \lambda_k = (\lambda_{k,s_2}(m-1)-1)e_1 + e_0) - (\lambda_{k,s_1}(m-1)-1)e_1 + e_0) = \lambda(m-1)e_1.$$

Необходимость условия суммы $\lambda_k u_k = \lambda(m-1)e_1$ доказана.

2. Предположим, что условие теоремы не выполняется. То есть для любого набора V, для которого выполняется условие задачи, не существует полного подмножества с тем же носителем D_V.

Заметим следующий факт, если W_1 полное подмножество и W_2 так же полное подмножество, то $W_1 \cup W_2$ так же является полным подмножеством с носителем $D_{W_1} \cup D_{W_2}$. В силу этого в любом множестве V всегда существует максимальное полное подмножество W и соответствующий ему максимальный носитель D_W.

Значит $D_V \backslash D_W \neq \varnothing$, и тогда найдется непустое подмножество $Y \subset D_V \backslash D_W$, так что для любого u_k $(u_k, \delta(Y)) \leqslant 0$.

Почему? Предположим противное: для каждого $Y \subset D_V \backslash D_W$ найдется u_Y $(u_Y, \delta(Y)) > 0$.

В частности, для всех одноэлементных подмножеств $Y = \{o\}$, $o \in D_V \backslash D_W$ найдется u_o, $(u_o, e_o) > 0$.

В векторе u_o найдется максимум одно отрицательное значение (и тогда это -1).

Построим отображение $M : D_V \backslash D_W \to D_V \backslash D_W$, переводящее o в индекс o' для которого $(u_o, e'_o) = -1$ или в o если такого o' не существует.

Отображение M является ориентированным графом-*монадой* (рис. 3 *а*). Монада распадается на связные области, в каждой из которых ровно один цикл.

Взяв некоторую цепочку шагов из некоторой вершины o_1 в вершину o_2, и сложив соответствующие u, мы получим вектор, значения которого неотрицательны во всех координатах, за исключением быть может o_2, а в координате o_1 значение строго положительно. Мы всегда можем подобрать такую цепочку, чтобы o_1 был любой наперед заданной вершиной, а o_2 любой вершиной из цикла в той же компоненте связности (рис. 3 *б*, *в*).

Для каждого цикла C найдется вектор u_C: $(U_C, \delta(C)) > 0$. Выберем число λ_C так, чтобы $\lambda_C(U_C, \delta(C))$ было не меньше количества элементов в компоненте связности, в которой находится цикл C.

Далее всегда можно подобрать такие цепочки, чтобы суммируя с $\lambda_C u_C$ мы получили вектор положительный на всех вершинах данной компоненты связности.

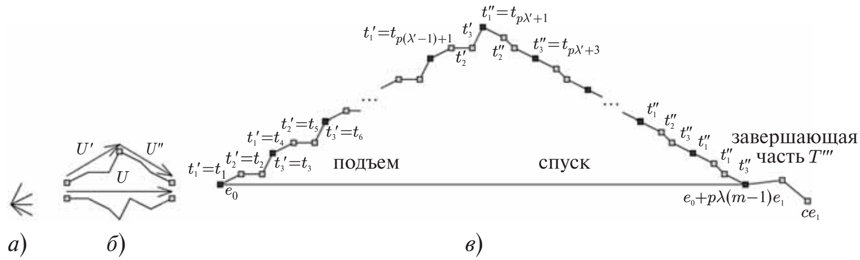

Рис. 3. Монада M и различные пути от o_1 до o_2

Суммируя по всем компонентам, мы получили вектор $U_{W'}$ положительный на $D_V \backslash D_W$.

Обозначим множество W' индексы всех векторов u_k, которые участвовали в $U_{W'}$.

Для множества векторов $W \cup W'$ существует сумма, положительная на всем D_V. Действительно по определению для W существует сумма U_W положительная на D_W. У $U_{W'}$ на D_V существует минимальное значение c. Если $c > 0$, то $U_{W'}$ и есть искомая сумма. Если $c \leqslant 0$, то искомой суммой является $U_W(1-c) + U_{W'}$.

Если носитель $D_{W \cup W'} = D_V$, то $W \cup W'$ полное множество на D_V, если носитель $D_{W \cup W'}$ не совпадает с D_V, то $W \cup W'$ можно дополнить до полного на D_V следующим образом: выберем множество W'' индексов i для которых $d_i \in D_V \setminus D_{W \cup W'}$.

Тогда существует сумма $U_{\widetilde{W}}$, где $\widetilde{W} = W \cup W' \cup W''$, в которую каждый элемент входит ненулевое количество раз, и эта сумма положительна.

Действительно, возьмем сумму $U_{W''}$ в которой каждый элемент u_i встречается один раз. У этой суммы имеется минимум c'. Если $c' > 0$, то искомой суммой является $U_{W''} + U_{W' \cup W}$. А если $c' \leqslant 0$, то $U_{\widetilde{V}} = U_{W''}(1-c') + U_{W' \cup W}$.

В результате мы получили множество $\widetilde{W}$, для которого носитель совпадает с D_V и существует сумма, положительная на D_V. То есть $\widetilde{W}$ полно на D_V. Противоречие. Значит, найдется такое множество Y, что для всех u_k $(u_k, \delta(Y)) \leqslant 0$.

3. Для различных V и некоторого набора $l = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, выполняющего условие теоремы, $\lambda_i u_i = ce_1$, обозначим через $c_l = \frac{1}{\lambda} \sum\limits_{u_i \in Y_V} \lambda_i$, где Y_V множество Y для набора V. Покажем что точная нижняя грань по всевозможным наборам l больше нуля $\inf c_l > 0$.

В силу конечности выбора множества V нам нужно показать, что при каждом заданном V $\inf c_l > 0$.

Рассмотрим некоторое множество V. Обозначим через $c(p)$ минимум c по всем наборам $l = (\lambda_1, \lambda_1, \lambda_n)$, где $\sum \lambda_i = \lambda \leqslant p$, и l_p — набор, на котором достигается соответствующий минимум.

Функция $c(p)$ не возрастает. Набор l_p не доминирует строго ни один из наборов l с $\lambda < p$. Действительно, иначе $l' = l_p - l$ был бы так же набором с неотрицательными коэффициентами с теми же множествами V и Y. И при этом $c_l > c_{l_p}$ и $c_{l'} * (\lambda_{l_p} - \lambda_l) + c_l * \lambda_l = c_{l_p}$, то c_{l_p} лежит на отрезке между c_l и $c_{l'}$. То есть $c_{l'} < c_{l_p} < c_l$. Этого не может быть, так как c_{l_p} минимальный.

По лемме 2 не существует бесконечной последовательности, в которой каждый член не доминирует ни один из предыдущих. Значит, последовательность l_p содержит только конечное количество различных значений.

Значит, для заданного V последовательность $c(p)$ начиная с какого-то момента тождественно равна константе, большей либо равной нулю.

Равной нулю она быть не может, так как все $\lambda_k > 0$.

Значит, при заданном V существует точная нижняя грань, отделенная от нуля.

В силу конечности различных наборов V это верно и для любых наборов l $\inf c_l = c_{\inf} > 0$.

4. Таким образом, при взятии производной порядка s в любом пути T существует не менее $c_{\inf}s$ шагов, при которых дифференцирование проходит по координатам входящим в Y_V.

Оценим величину b_T по формуле (6.1).

Для любого промежуточного результата $v_i = e_o + \sum\limits_{j=1} iu_{t_j}$ $(v_i, \delta(Y)) \leqslant (e_0, \delta(Y)) \leqslant 1$. Значит, множитель на этих шагах $|h_{t_i}(v_i, e_{d_i})| \leqslant h_{\max} * 1$, где $h_{\max} = \max\limits_k |h_k|$. А произведение таких множителей можно оценить сверху в $h_{\max}^{s_Y}$, где s_Y — количество таких шагов.

Для шага t_p при котором $d_{t_p} \notin Y$, множитель $(v_{t_p}, e_{d_{t_p}})$ можно оценить сверху степенью многочлена в этот момент $m(p) = p(m-1)+1$. А p можно оценить сверху через $s_Y + p'$, где p' порядковый номер шага после выбрасывания всех шагов над Y.

Тогда следующее произведение

$$\prod_{d_i \notin Y} h_{t_i}(v_i, e_{d_i}) \leqslant h_{\max}^{s-s_Y}((s_Y+1)(m-1)+1)) * ((s_Y+2)(m-1)+1)) *$$
$$* \ldots * (s(m-1)+1)) \leqslant$$
$$\leqslant h_{\max}^{s-s_Y}(m-1)^{s-s_Y}\frac{s!}{s_Y!} = q^s\frac{s!}{s_Y!}, \quad q = h_{\max}(m-1).$$

Количество всевозможных путей в T формуле (6.0) не более N^s, где N — количество различных u_i.

Значит,

$$|a_s| \leqslant (qN)^s\frac{s!}{s_Y!}, \quad \lim_{s\to+\infty}\left(\frac{a_s}{s!}\right)^{1/s} = \lim_{s\to+\infty}(qN)^{1/(m-1)}(s_Y!)^{-1/m(s)}.$$

Так как $s_Y > c_{\inf}s$, то $\lim\limits_{s\to+\infty} s_Y!^{1/s} = +\infty$, а значит

$$\lim_{s\to+\infty}(qN)^{1/(m-1)}(s_Y!)^{-1/m(s)} = 0.$$

Таким образом, радиус сходимости бесконечен. □

Заметим, что в условии необходимости не использовалась знакосогласованность, поэтому это условие необходимо для любого ряда. И в случае, если оно не выполняется, — радиус сходимости бесконечен.

Таким образом, верна следующая теорема:

Теорема 3. *Если правая часть* $P_1(x)$ *уравнения* $\dot{x} = P_1(x)$. *не является полной, то радиус сходимости для сходимости условий* $x_0 = e_1$ *неограничен.*

Нетривиальный пример, когда условие этой теоремы не выполняется:

$$\dot{x}_1 = 0, \quad \dot{x}_2 = x_1^5, \quad \dot{x}_3 = x_2^4 x_3 + x_2^5$$

при $x_0 = (1, 0, 0)$.

$x_1^{(s)} = 0$, $x_2^{(s)} = 0$ при $s > 1$. В $x_3^{(s)}$ с ростом s встречаются мономы $x_1^0 x_2^0 x_3^{(4s+1)}$ с коэффициентами, растущими медленнее факториала.

Заключение

Проведенные исследования показывают, что можно иметь простые оценки радиуса сходимости и на основании их анализировать поведение задачи и конструктивно оценивать **отрезок**, на котором решение существует и представимо в виде ряда Тейлора. При последовательной реализации такой подход позволяет строить приближенные решения дифференциальных уравнений через символьное представление с любой степенью точности.

Такой подход к исследованию ОДУ особенно эффективен при решении задач ОПУ [4].

Литература

1. *Коши Г. А. Л.* Дифференциальное и интегральное исчисление. 1831.
2. *Emelyanov S. V., Afanasiev A. P., Grinberg Y. R., Krivtsov V. E., Peltsverger B. V., Sukhoroslov O. V., Taylor R. G., Voloshinov V. V.* Distributed Computing and Its Applications. Felicity Press, Bristol, USA. 2005.
3. *Афанасьев А. П. Волошинов В. В., Гринберг Я. Р., Емельянов С. В., Кривцов В. Е., Сухорослов О. В.* Реализация GRID-вычислений в среде IARnet // Информационные технологии и вычислительные системы / Под ред. С. В. Емельянова. 2005. № 2. С. 61–76.
4. *Афанасьев А. П.* Продолжение траекторий в оптимальном управлении. М.: КомКнига/URSS, 2005.