Колебания неконсервативной системы с распределенными параметрами под действием движущейся нагрузки

А. В. Пестерев

Аннотация

В статье рассматриваются задача о колебаниях системы с распределенными параметрами под действием движущейся сосредоточенной нагрузки. Предложен метод решения, основанный на разложении отклика в ряд по комплексным собственным функциям распределенной системы, что позволяет свести исходное уравнение в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно обобщенных координат (коэффициентов разложения). Полученная система дифференциальных уравнений справедлива для различных несамосопряженных линейных систем с распределенными параметрами и различных моделей движущейся нагрузки.

1. Введение

В статье предлагается метод решения задачи о колебаниях пространственно-одномерной неконсервативной линейной системы с распределенными параметрами под действием движущейся сосредоточенной нагрузки. Термин «движущаяся сосредоточенная нагрузка» используется здесь для обозначения различных простых моделей конечномерных подсистем, движущихся вдоль континуума, так, что сила, действующая на континуум, описывается дельта-функцией Дирака, точка приложения которой меняется со временем. В последующем мы будем ссылаться на три вида таких нагрузок: «движущаяся сила», «движущаяся масса» и «движущийся осциллятор». Первая модель соответствует случаю, когда распределенная система находится под воздействием внешней сосредоточенной силы, амплитуда которой может быть как постоянной, так и заданной функцией времени, но не зависит от колебаний континуума. Две другие модели подразумевают, что движущаяся подсистема обладает инерцией. В первой из них движущаяся масса жестко связана с континуумом, тогда как в модели движущегося осциллятора масса взаимодействует с континуумом через пружину.

Задача о колебаниях системы с распределенными параметрами под действием движущейся нагрузки возникает во многих инженерных приложениях, таких, например, как проектирование железнодорожных и автомобильных мостов, подвесных канатных дорог и т. п. (см., например, [1] и приведенные там ссылки). Для решения этой задачи было предложено много различных методов, большинство из которых предназначены для решения задач о движущейся силе или движущейся массе (см., например, [1–7]). Некоторые результаты, относящиеся к задаче о движущемся осцилляторе можно найти в [8–12].

Следует подчеркнуть, что большинство методов решения разработаны для конкретных видов распределенных систем (в основном консервативных), например, для струн или балок Эйлера—Бернулли с определенными граничными условиями. Насколько известно автору, не существует универсальных методов, применимых для произвольных неконсервативных систем с распределенными параметрами. Целью настоящей работы является разработка метода вычисления отклика упругой системы, описываемой произвольным линейным несамосопряженным оператором, на движущуюся сосредоточенную нагрузку.

Статья организована следующим образом. В следующем разделе дана математическая постановка задачи. Затем, используя модальное представление для функции Грина произвольной системы с распределенными параметрами, получен отклик континуума в виде разложения в ряд по комплексным собственным функциям. В разделе 4 задача нахождения зависящих от времени коэффициентов разложения сведена к решению системы комплексных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Правые части этих уравнений зависят от некоторой, вообще говоря неизвестной, «силы взаимодействия», действующей на упругую систему. Если эта сила является заданной функцией времени, то полученная система дифференциальных уравнений не связана. В противном случае, эта сила зависит от искомых коэффициентов и/или производных от этих коэффициентов, и мы имеем систему связанных дифференциальных уравнений. В разделе 5 рассматривается применение метода для конкретного случая движущейся нагрузки, а именно для случая движущегося осциллятора. Конкретизация метода для двух видов континуумов рассматривается в разделе 6.

2. Постановка задачи

Колебания пространственно-одномерной линейной несамосопряженной системы с распределенными параметрами описываются дифференциальным уравнением в частных производных вида

$$Mw_{tt}(x,t) + Dw_t(x,t) + Kw(x,t) = f(x,t), \tag{1}$$

граничными условиями (конкретный вид граничных условий не имеет значения в данной работе) и начальными условиями

$$w(x,0) = a_0(x), \quad w_t(x,0) = b_0(x). \tag{2}$$

Здесь $x \in [0, L]$, L — длина континуума; $f(x,t)$ — внешняя сила, действующая на континуум; $(\ )_t = \partial(\ )/\partial t$; M, D и K — дифференциальные операторы, определенные на функциях, удовлетворяющих необходимым гладкостным и граничным условиям. Положительно-определенный оператор M описывает инерцию системы; D может быть представлен в виде суммы симметрического и кососимметрического операторов, ответственных за демпфирование и гироскопические эффекты, соответственно; и K есть сумма симметрического оператора, описывающего жесткость системы, и кососимметрического оператора, связанного с циркуляционными эффектами.

Если сила, действующая на континуум со стороны движущейся нагрузки, является единственной внешней силой, $f(x,t)$ можно представить в виде

$$f(x,t) = y(t)\delta(x - \zeta(t)), \tag{3}$$

где $\zeta(t)$ — положение сосредоточенной нагрузки на континууме, а функция $y(t)$ определяется рассматриваемой моделью сосредоточенной нагрузки. В простейшем случае (модель движущейся силы) $y(t)$ не зависит от колебания континуума. В задачах, где учитывается масса движущейся подсистемы, $y(t)$ зависит от перемещения континуума и ее конкретный вид определяется законом взаимодействия между массой и континуумом. В случае модели движущейся массы, сила, действующая на континуум, принимается равной сумме веса движущейся подсистемы и силе инерции,

$$y(t) = mg - m\frac{d^2}{dt^2}w(\zeta(t),t), \tag{4}$$

где m — масса движущейся подсистемы. В модели движущегося осциллятора масса взаимодействует с континуумом через пружину; т. е.

$$y(t) = k(z(t) - w(\zeta(t),t)), \tag{5}$$

где $z(t)$ есть отклонение массы от положения равновесия вдоль оси, перпендикулярной продольной оси континуума, а k — жесткость пружины, соединяющей массу с распределенной системой.

Рассматриваемый метод не зависит от закона движения массы вдоль континуума, и координата точки приложения будет обозначаться как ζ. В случае постоянной скорости v, $\zeta = vt$; если задан закон изменения скорости, надо добавить к системе уравнений дополнительное уравнение $\ddot{\zeta} = a(t)$ с подходящим начальным условием, где $a(t)$ — заданное ускорение.

Целью настоящей статьи является разработка метода вычисления отклика неконсервативного континуума общего вида, описываемого уравнением (1), под действием линейного консервативного осциллятора. Мы покажем, что отклик $w(x,t)$ можно представить в виде ряда по комплексным собственным функциям континуума и сведем задачу к решению системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) относительно зависящих от времени коэффициентов разложения.

3. Модальное представление для отклика континуума

Для упрощения последующих уравнений, мы рассмотрим случай однородных граничных и нулевых начальных условий ($a_0(x) = b_0(x) = 0$ в (2)). Последнее соответствует случаю, где масса достигает левого конца континуума в момент $t = 0$ ($\zeta(0) = 0$), и континуум находится в покое при отрицательных значениях t. Очевидно, что рассмотрение неоднородных граничных и ненулевых начальных условий не представляет никаких принципиальных трудностей, а просто приводит к более громоздким формулам.

Хорошо известно (см., например, [13]), что, в случае однородных граничных и нулевых начальных условий, отклик системы с распределенными параметрами на воздействие внешней силы $f(x,t)$ можно найти по формуле

$$w(x,t) = \int_0^t\int_0^L g(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau, \tag{6}$$

где $g(x,\xi,t)$ — функция Грина континуума. Как показано в [13], функция Грина неконсервативного континуума, не имеющего твердотельных собственных функций, может быть представлена в следующем модальном виде:

$$g(x,\xi,t) = \frac{1}{2}\sum_{n=\pm1}^{\pm\infty}\frac{1}{\lambda_n}e^{\lambda_n t}\phi_n(x)\bar{\psi}_n(\xi), \tag{7}$$

где λ_n и $\phi_n(x)$ — n-е собственное значение и собственная функция распределенной системы, являющиеся решениями уравнения

$$\{\lambda_n^2 M + \lambda_n D + K\}\phi_n(x) = 0. \tag{8}$$

Функции $\psi_n(x)$ являются решениями сопряженной задачи на собственные значения

$$\{\bar{\lambda}_n^2 M + \bar{\lambda}_n D^* + K^*\}\psi_n(x) = 0; \tag{9}$$

черта над символом означает комплексное сопряжение, а звездочка обозначает сопряженные операторы. Так как коэффициенты уравнения (1) действительные числа, собственные значения и собственные функции обладают следующими свойствами:

$$\lambda_{-n} = \bar{\lambda}_n, \quad \phi_{-n} = \bar{\phi}_n, \quad \psi_{-n} = \bar{\psi}_n. \tag{10}$$

Кроме того, $\phi_n(x)$ и $\psi_n(x)$ удовлетворяют условию нормировки ([13])

$$\int_0^L \bar{\psi}_n(x)M\phi_n(x)\,dx - \frac{1}{\lambda_n^2}\int_0^L \bar{\psi}_n(x)K\phi_n(x)\,dx = 2. \tag{11}$$

Подставляя (3) и (7) в (6), получаем модальное разложение отклика системы с распределенными параметрами:

$$w(x,t) = \frac{1}{2}\sum_{n=\pm1}^{\pm\infty}\phi_n(x)q_n(t), \tag{12}$$

где

$$q_n(t) = \frac{1}{\lambda_n}\int_0^t e^{\lambda_n(t-\tau)}\bar{\psi}_n(\zeta(\tau))y(\tau)\,d\tau. \tag{13}$$

Подставляя индекс $-n$ вместо n в (13) и учитывая (10) и тот факт, что $y(t)$ — действительная функция, получаем соотношение $q_{-n}(t) = \bar{q}_n(t)$; т. е., нам требуется найти коэффициенты $q_n(t)$ только для положительных n. В силу (10), $w(x,t)$ — действительная функция, и ряд (12) можно переписать в виде

$$w(x,t) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}[\phi_n(x)q_n(t) + \bar{\phi}_n(x)\bar{q}_n(t)] \tag{14}$$

или

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re}\,[\phi_n(x)q_n(t)]. \tag{15}$$

В общем случае функция $y(t)$ может зависеть от неизвестных $q_n(t)$ (а также от их производных), и (13) представляет собой систему связанных интегральных (или интегро-дифференциальных) уравнений относительно $q_n(t)$. В следующем разделе задача о нахождении коэффициентов q_n будет сведена к решению системы линейных ОДУ.

4. Дифференциальные уравнения для коэффициентов разложения

В этом разделе мы на время забудем, что сила $y(t)$, действующая на континуум, неизвестна, и будем трактовать ее как некоторую заданную функцию времени. При таком предположении мы получим систему формально несвязанных комплексных ОДУ, которую в дальнейшем можно применять к решению задач с различными моделями движущейся нагрузки, добавляя к этой системе уравнение для $y(t)$, выраженное в терминах неизвестных коэффициентов. Следует отметить, что система формально несвязанных дифференциальных уравнений, которую мы получим в этом разделе, справедлива для несамосопряженных систем с распределенными параметрами общего вида.

Дифференцируя обе части уравнения (13), получаем

$$\dot{q}_n(t) = \int_0^t e^{\lambda_n(t-\tau)}\bar{\psi}_n(\zeta(\tau))y(\tau)\,d\tau + \frac{1}{\lambda_n}\bar{\psi}_n(\zeta(t))y(t).$$

С учетом (13), приходим к системе комплексных ОДУ относительно $q_n(t)$:

$$\dot{q}_n(t) = \lambda_n q_n(t) + \frac{1}{\lambda_n}\bar{\psi}_n(\zeta(t))y(t), \quad n = 1, 2, \dots\ . \tag{16}$$

Представляя комплексные величины в стандартном виде

$$q_n = q_n^R + iq_n^I, \quad \phi_n = \phi_n^R + i\phi_n^I, \quad \psi_n = \psi_n^R + i\psi_n^I,$$

и вводя обозначения $\lambda_n = \alpha_n + i\omega_n$, где i — мнимая единица, запишем n-е комплексное уравнение системы (16) в виде двух действительных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{q}_n^R &= \alpha_n q_n^R - \omega_n q_n^I + \gamma_n \big(\alpha_n \psi_n^R - \omega_n \psi_n^I\big) y(t), \\ \dot{q}_n^I &= \omega_n q_n^R + \alpha_n q_n^I - \gamma_n \big(\omega_n \psi_n^R + \alpha_n \psi_n^I\big) y(t), \end{aligned} \tag{17}$$

где $\gamma_n = (\alpha_n^2 + \omega_n^2)^{-1}$.

Будем использовать фигурные скобки для обозначения действительных векторов. Пусть N — число членов в разложении (15), используемых для аппроксимации решения. Введем обозначения $\{\phi^R\}$, $\{\phi^I\}$, $\{\psi^R\}$, $\{\psi^I\}$, $\{q^R\}$ и $\{q^I\}$ для N-мерных векторов, составленных из компонент ϕ_n^R, ϕ_n^I, ψ_n^R, ψ_n^I, q_n^R и q_n^I соответственно, а также A и Ω_1 для диагональных матриц порядка N:

$$A = \mathrm{diag}\,[\alpha_1, \ldots, \alpha_N], \quad \Omega_1 = \mathrm{diag}\,[\omega_1, \ldots, \omega_N].$$

Введем также следующие $2N$-мерные векторы

$$\{\phi\} = \begin{Bmatrix} \{\phi^R\} \\ \{\phi^I\} \end{Bmatrix}, \quad \{\psi\} = \begin{Bmatrix} \{\psi^R\} \\ \{\psi^I\} \end{Bmatrix}, \quad \{q\} = \begin{Bmatrix} \{q^R\} \\ \{q^I\} \end{Bmatrix}$$

и $2N\times 2N$ блочную матрицу

$$\Omega = \begin{bmatrix} A & -\Omega_1 \\ \Omega_1 & A \end{bmatrix}.$$

Легко проверить, что с использованием введенных обозначений система комплексных уравнений (16) может быть записана в виде действительного матричного уравнения

$$\{\dot{q}\} = \Omega\{q\} + \Omega^{-1}\{\overline{\psi}(\zeta)\}y(t), \tag{18}$$

где

$$\{\overline{\psi}\} = \big\{\{\psi^R\}^T, \, -\{\psi^I\}^T\big\}^T.$$

Формула (15) для отклика системы с распределенными параметрами принимает вид

$$w(x,t) = \{\overline{\phi}(x)\}^T\{q(t)\}. \tag{19}$$

5. Задача о движущемся осцилляторе

Полученные уравнения включают в себя вообще говоря неизвестную функцию $y(t)$. Если сила $y(t)$ не зависит от отклика распределенной системы (как в случае задачи о движущейся силе), уравнения (16) не связаны и (18), (19) немедленно дают решения рассматриваемой задачи. Для того чтобы решить задачу в случае, когда сила $y(t)$ зависит от неизвестных $q_n(t)$, надо добавить к полученной системе уравнения для $y(t)$.

В этом разделе мы получим решение задачи о движущемся осцилляторе. Для этой задачи сила, с которой осциллятор действует на континуум, описывается уравнением (5), и мы имеем дополнительное неизвестное — поперечное смещение массы $z(t)$. Сосредоточенная масса находится под действием двух сил, вес осциллятора и сила $-y(t)$, так что функция $z(t)$ удовлетворяет уравнению

$$m\ddot{z}(t) = mg - y(t).$$

Интегрируя это уравнение с нулевыми начальными условиями

$$z(0) = \dot{z}(0) = 0,$$

получаем

$$z(t) = \frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{m}\int\limits_0^t (t-\tau)y(\tau)\,d\tau.$$

Для удобства обозначений запишем последнее уравнение в виде, аналогичном тому, в котором записан отклик континуума:

$$z(t) = \frac{1}{2}gt^2 - \varphi_0 q_0(t), \tag{20}$$

где $\varphi_0 = 1/\sqrt{m}$ — нормированная твердотельная собственная функция изолированной массы и

$$q_0 = \varphi_0 \int\limits_0^t (t-\tau)y(\tau)\,d\tau.$$

Теперь, в силу (19) и (20), уравнение (5) принимает вид

$$y(t) = k\left[\frac{1}{2}gt^2 - \varphi_0 q_0(t) - \{\overline{\phi}(\zeta)\}^T\{q(t)\}\right]. \tag{21}$$

Добавляя это уравнение и уравнение относительно новой неизвестной $q_0(t)$,

$$\ddot{q}_0 = \varphi_0 y(t), \tag{22}$$

к уравнениям (18), получаем следующую систему уравнений суммарного дифференциального порядка $2N+2$ относительно зависящих от времени коэффициентов разложения решения по собственным функциям

$$\begin{cases} \{\dot{q}\} = \Omega\{q\} + \Omega^{-1}\{\overline{\psi}(\zeta)\}y(t), \\ \ddot{q}_0 = \varphi_0 y(t), \\ y(t) = k\left[\dfrac{1}{2}gt^2 - \varphi_0 q_0(t) - \{\overline{\phi}(\zeta)\}^T\{q(t)\}\right], \end{cases} \tag{23}$$

с нулевыми начальными условиями

$$q_0(0) = \dot{q}_0(0) = 0, \quad \{q\} = 0. \tag{24}$$

Заметим, что уравнения (23) одинаковы для любых несамосопряженных линейных систем с распределенными параметрами, и требуют знания только собственных значений и нормированных собственных функций $\phi_n(x)$ и $\overline{\psi}$ прямой и сопряженной задач на собственные значения.

6. Приложение к двум распределенным системам

В предыдущем разделе общие уравнения, выведенные в разделе 4, были специализированы для конкретной модели движущейся нагрузки, модели консервативного осциллятора. Специализация общих уравнений для случая континуумов определенного вида также требует некоторого обсуждения. Дело в том, что коэффициенты полученных уравнений выражены в терминах собственных функций прямой и сопряженной задач на собственные значения. В то время как собственные функции (формы собственных колебаний) прямой задачи известны для ряда однородных неконсервативных распределенных систем (или, в случае неоднородных систем, могут быть эффективно найдены численно), сопряженная задача требует отдельного рассмотрения.

Физический смысл собственных функций сопряженной задачи для систем с демпфирующими, гироскопическими и циркуляторными силами не всегда ясен. Эта проблема обсуждается в [13, 14], где показано, что сопряженные собственные функции связаны с формами колебаний континуума. Следует однако отметить, что сопряженные функции, приведенные в [13, 14], не удовлетворяют условию (11) и, таким образом, определены с точностью до (в общем случае комплексного) скалярного множителя.

В этом разделе уравнения предыдущих разделов специализированы применительно к двум видам континуумов. Сначала, с целью иллюстрации, показано, что в случае консервативного континуума полученные уравнения совпадают с ранее опубликованными решениями, полученными другим способом. Затем рассмотрен случай пропорционально-демпфированной распределенной системы и выведен явный вид коэффициентов соответствующих уравнений.

Далее символом $\varphi_n(x)$ будем обозначать n-ю действительную собственную функцию соответствующей консервативной системы (т. е. системы, в которой демпфирование положено равным нулю), удовлетворяющую условию нормировки

$$\int_0^L \varphi_n(x) M \varphi_n(x)\, dx = 1 \tag{25}$$

(заметим, что для консервативной системы это условие совпадает с (11)).

6.1. Консервативные системы

Хорошо известно, что консервативная система ($D = 0$, $K = K^*$) имеет чисто мнимые собственные значения $\lambda_n = i\omega_n$ (нулевая матрица A)

и действительные и ортогональные собственные функции. Прямая и сопряженная задачи на собственные значения совпадают, и, таким образом, сопряженные собственные функции совпадают с формами собственных колебаний системы $\varphi_n(x)$. Пусть $\{\varphi\}$ — N-мерный вектор с компонентами $\varphi_n(\zeta)$. Тогда

$$\{\overline{\psi}\} = \{\psi\} = \{\phi\} = \begin{Bmatrix} \{\varphi\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}, \tag{26}$$

и уравнение (18) принимает вид

$$\begin{Bmatrix} \{\dot{q}^R\} \\ \{\dot{q}^I\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_1 \\ \Omega_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q^R\} \\ \{q^I\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \Omega_1^{-1} \\ -\Omega_1^{-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\varphi\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} y(t) \tag{27}$$

или

$$\{\dot{q}^R\} = -\Omega_1\{q^I\},$$
$$\{\dot{q}^I\} = \Omega_1\{q^R\} - \Omega_1^{-1}\{\varphi\}y(t).$$

Дифференцируя первое из этих уравнений и подставляя в него второе уравнение, получаем систему из N дифференциальных уравнений 2-го порядка

$$\{\ddot{q}^R\} = -\Omega_1^2\{q^R\} + \{\varphi(\zeta)\}y(t)$$

или

$$\ddot{q}_n^R = -\omega_n^2 q_n^R + \varphi_n(\zeta)y(t), \quad n = 1, 2, \ldots, N, \tag{28}$$

которая совпадает с системой (39), выведенной в [10].

Возвращаясь к задаче о движущемся осцилляторе, введем обозначение $\omega_0 = 0$ для твердотельной собственной частоты сосредоточенной массы. Учитывая (26)–(28), нетрудно проверить, что система уравнений (23) может быть переписана в более простом виде как

$$\ddot{q}_n^R + \omega_n^2 q_n^R + k\varphi_n(\zeta) \sum_{m=0}^{N} \varphi_m(\zeta) q_m^R = \frac{1}{2} kgt^2 \varphi_n(\zeta), \quad n = 0, 1, \ldots, N, \tag{29}$$

что совпадает с уравнением (1) в [11].

Наконец, заметим, что уравнение (28) можно непосредственно применить к решению задачи о движущейся массе. Действительно, подставляя (19) в (4) с учетом (26) и ограничиваясь случаем постоянной скорости v, получаем

$$y(t) = m\big(g - \{\varphi\}^T\{\ddot{q}^R\} - 2v\{\varphi'\}^T\{\dot{q}^R\} - v^2\{\varphi''\}^T\{q^R\}\big). \tag{30}$$

Подставляя это уравнение в (28), получаем систему дифференциальных уравнений, описывающих решение задачи о движущейся массе [3]. Эта система может быть разрешена относительно вторых производных, как показано в [5].

6.2. Негироскопические системы с пропорциональным демпфированием

Хорошо известно (например, [14, 15]), что собственные значения пропорционально-демпфированной системы ($K^* = K$, $D^* = D$ и $DM^{-1}K = KM^{-1}D$) комплексны, а собственные функции как прямой, так и сопряженной задачи действительны и совпадают с собственными функциями $\varphi_n(x)$ соответствующей классической самосопряженной задачи

$$(\widetilde{\lambda}_n^2 M + K)\varphi_n(x) = 0, \tag{31}$$

где $\widetilde{\lambda}_n = i\widetilde{\omega}_n$, а $\widetilde{\omega}_n$ — n-я собственная частота недемпфированного континуума. Однако, мы не можем взять $\varphi_n(x)$ в качестве $\overline{\psi}$, так как условие нормировки (11) не выполнено. Так как собственные функции определены с точностью до произвольного множителя, будем искать сопряженные собственные функции в виде

$$\psi_n(x) = c_n\varphi_n(x), \tag{32}$$

где комплексные множители c_n выбираются так, чтобы удовлетворить условию (11) с $\phi_n(x) \equiv \varphi_n(x)$.

Прежде чем находить c_n, выведем формулу, связывающую λ_n, $\bar{\lambda}_n$ и $\widetilde{\lambda}_n$. Подставляя $\varphi_n(x)$ в (8) и (9), умножая первое из них на $\bar{\lambda}_n$, а второе на λ_n и вычитая его из первого уравнения с учетом условий $K = K^*$ и $D = D^*$, получаем

$$(\bar{\lambda}_n - \lambda_n)\{-\bar{\lambda}_n\lambda_n M + K\}\varphi_n(x) = 0. \tag{33}$$

Сравнивая это уравнение с (31), получаем

$$\bar{\lambda}_n\lambda_n = -\widetilde{\lambda}_n^2. \tag{34}$$

Теперь, подставляя (32) и $\phi_n(x) = \varphi_n(x)$ в (11) и принимая во внимание (31) и (25), получаем уравнение

$$\bar{c}_n \int\limits_0^L \varphi_n(x)M\varphi_n(x)\,dx - \frac{\bar{c}_n}{\lambda_n^2}\int\limits_0^L \varphi_n(x)K\varphi_n(x)\,dx =$$

$$\bar{c}_n\left\{\int\limits_0^L \varphi_n(x)M\varphi_n(x)\,dx + \frac{\widetilde{\lambda}_n^2}{\lambda_n^2}\int\limits_0^L \varphi_n(x)M\varphi_n(x)\,dx\right\} = \bar{c}_n\left\{1 + \frac{\widetilde{\lambda}_n^2}{\lambda_n^2}\right\} = 2.$$

Из этого уравнения, с учетом (34), следует что

$$\bar{c}_n = \frac{2\lambda_n}{\lambda_n - \bar{\lambda}_n} = \frac{\lambda_n}{i\omega_n}, \tag{35}$$

где, как и прежде, ω_n — мнимая часть λ_n.

Подставляя $\overline{\psi}_n(\zeta) = \bar{c}_n\varphi_n(\zeta)$ в (16), получаем

$$\dot{q}_n(t) = \lambda_n q_n(t) + \frac{1}{i\omega_n}\varphi_n(\zeta(t))y(t), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{36}$$

или

$$\dot{q}_n^R = \alpha_n q_n^R - \omega_n q_n^I,$$
$$\dot{q}_n^I = \omega_n q_n^R + \alpha_n q_n^I - \frac{1}{\omega_n}\varphi_n y(t). \tag{37}$$

Как и в случае консервативного континуума, неизвестные q_n^I можно исключить, и полученная система сводится к системе дифференциальных уравнений второго порядка. Действительно, дифференцируя первое из уравнений (37) и подставляя в него второе уравнение, получаем систему N ОДУ

$$\ddot{q}_n^R = (\alpha_n^2 - \omega_n^2) q_n^R + \varphi_n(\zeta) y(t), \quad n = 1, 2, \ldots, N, \tag{38}$$

аналогичную (28). Уравнения (38) не зависят от конкретного вида движущейся нагрузки. В случае движущейся силы уравнения не связаны и немедленно дают требуемое решение после подстановки функции $y(t)$. Система уравнений, соответствующая случаю движущегося осциллятора, получается точно также, как и в случае консервативного континуума,

$$\ddot{q}_n^R + (\omega_n^2 - \alpha_n^2) q_n^R + k\varphi_n(\zeta) \sum_{m=0}^{N} \varphi_m(\zeta) q_m^R = \frac{1}{2} k g t^2 \varphi_n(\zeta), \qquad n = 0, 1, \ldots, N, \tag{39}$$

где $\omega_0 = 0$ и $\alpha_0 = 0$.

7. Заключение

В статье предложен метод нахождения отклика неконсервативной системы с распределенными параметрами в ответ на движущуюся сосредоточенную нагрузку. Метод основан на разложении отклика в ряд по комплексным собственным функциям распределенной системы. Полученная система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно зависящих от времени коэффициентов разложения справедлива для различных линейных моделей движущейся нагрузки, но содержит (в общем случае) неизвестную силу взаимодействия нагрузки с континуумом. Для того, чтобы получить систему уравнений, соответствующую конкретному виду движущейся нагрузки, требуется представить силу взаимодействия в терминах неизвестных коэффициентов разложения и подставить полученное выражение в систему уравнений. В статье эта процедура была проделана для случая нагрузки, представимой в виде движущегося осциллятора. В случае консервативной распределенной системы, полученная система уравнений совпадает с системой полученной ранее в [10, 11].

В общем случае неконсервативной распределенной системы коэффициенты полученных дифференциальных уравнений выражаются через собственные частоты и собственные функции сопряженной системы. Для того, чтобы применить их к конкретной несамосопряженной системе, требуется найти собственные функции сопряженной задачи, удовлетворяющие условиям нормировки (11). В статье это иллюстрируется на примере пропорционально-демпфированного континуума.

Литература

1. *Frýba L.* Vibration of Solids and Structures under Moving Loads. London: Thomas Telford Ltd., 1999.
2. *Bolotin V. V.* The Dynamic Stability of Elastic Systems. San Francisco: Holden-Day, 1964.
3. *Lee U.*, Revisiting the Moving Mass Problem: Onset of Separation Between the Mass and Beam // ASME Journal of Vibration and Acoustics. 1996. Vol. 118. P. 516–521.
4. *Olson M.* On the Fundamental Moving Load Problem // Journal of Sound and Vibration. 1991. Vol. 145. P. 299–307.
5. *Пестерев А. В.* К задаче о движущейся массе // Проблемы вычислений в распределенной среде: Модели обработки и представления данных. Динамические системы / Сборник трудов ИСА РАН. М.: КомКнига/URSS, 2005. С. 217–221.
6. *Sadiku S.*, *Leipholz H. H. E.* On the Dynamics of Elastic Systems with Moving Concentrated Masses // Ingenieur-Archiv. 1987. Vol. 57. P. 223–242.
7. *Stanišić M. M.* On a New Theory of the Dynamic Behavior of the Structures Carrying Moving Masses // Ingenieur-Archiv. 1985. Vol. 55. P. 176–185.
8. *Bogacz R.*, *Szolc T.* On Methods of Solution for the Discrete-Continuous System Under Moving Load // ZAMM. 1992. Vol. 72. P. 16–19.
9. *Delgado R. M.*, *dos Santos S. M.* Modelling of Railway Bridge-Vehicle Interaction on High Speed Tracks // Computers and Structures. 1997. Vol. 63. P. 511–523.
10. *Pesterev A. V.*, *Bergman L. A.* Response of Elastic Continuum Carrying Moving Linear Oscillator // ASCE Journal of Engineering Mechanics. 1997. Vol. 123. P. 878–884.
11. *Pesterev A. V.*, *Bergman L. A.* Vibration of Elastic Continuum Carrying Accelerating Oscillator // ASCE Journal of Engineering Mechanics. 1997. Vol. 123. P. 886–889.
12. *Yang B.*, *Tan C. A.*, *Bergman L. A.* On the Problem of a Distributed Parameter System Carrying a Moving Oscillator // Dynamics and Control of Distributed Systems. (H. Tzou, L. Bergman, eds.) Cambridge University Press, 1998.
13. *Yang B.* Integral Formulas for Non-Self-Adjoint Distributed Dynamic Systems // AIAA Journal. 1996. Vol. 34. P. 2132–2139.
14. *Yang B.* Modal Controllability and Observability of General Mechanical Systems // ASME Journal of Vibration and Acoustics. 1995. Vol. 117. P. 510–515.
15. *Caughey T. N.*, *O'Kelly M. E.* Classical Normal Modes in Damped Linear Dynamic Systems // ASME Journal of Applied Mechanics. 1965. Vol. 32. P. 563–588.