

Планирование пути для колесного робота

А. В. Пестерев, Р. Ф. Гилимьянов

Аннотация

В статье рассматривается задача о прокладывании пути для колесного робота по заданному множеству опорных точек (измерений). Требуется аппроксимировать искомый путь гладкой кривой, удовлетворяющей дифференциальным ограничениям, наложенным на исследуемую неголономную систему. Такая задача возникает, например, когда первый раз робот следует некоторому визуально проложенному пути, информация о котором запоминается в виде массива опорных точек (измерений), а потом требуется повторить этот путь в автоматическом режиме. При такой постановке задачи возникает необходимость измерять расстояние (и быть может некоторые производные по времени от расстояния) от движущейся целевой точки до кривой, что, в общем случае, является трудоемкой задачей, которая решается только численно. В статье предлагается аппроксимировать искомую кривую составным кубическим В-сплайном. Кроме того, для точек плоскости, принадлежащих некоторой окрестности построенной сплайновой кривой, определена функция квазирасстояния, показывающая меру удаления этих точек от построенной кривой. Предлагается использовать введенную функцию вместо расстояния в алгоритмах управления с обратной связью. Так как функция и ее производные вычисляются по явным формулам, эффективность соответствующих алгоритмов управления значительно возрастает.

1. Введение

Задача о прокладывании допустимой траектории для колесного робота по заданному массиву точек на плоскости возникает во многих приложениях (см., например, [1] и приведенные там ссылки). Такая задача возникает например тогда, когда первый раз робот следует по некоторому визуально проложенному пути, и в процессе движения с некоторой частотой измеряются координаты дискретного множества точек, принадлежащих траектории (например, с помощью GPS приемника), а потом требуется повторить этот путь в автоматическом режиме. Очевидна практическая важность такой постановки задачи во многих областях (например, в сельскохозяйственных приложениях, когда трактор запахивает некоторые, в общем случае криволинейные, гряды, по которым потом требуется неоднократно следовать для выполнения операций посадки, полива, прополки и т. п.).

В литературе описано много методов планирования пути для мобильных роботов. Большинство из них предназначено для случая, когда требуется перевести робот из заданного начального состояния (характеризуемого положением и ориентацией робота) в заданное конечное состояние [1]. Существует также много публикаций, в которых описаны методы

генерации пути, проходящего через заданное множество точек. В простейших методах путь представляется в виде последовательности прямых линий и дуг окружностей (например, точки соединяются прямыми линиями, а потом углы между линиями скругляются). В других методах используются полиномиальные сплайны, клотоиды (кривые, кривизна которых есть линейная функция длины дуги) [2] или обобщенные спирали Корню (кривые, кривизна которых полиномиально зависит от длины дуги) [3]. Недостаток аппроксимации прямыми и дугами окружности заключается в том, что кривизна кривой в точках соединения дуг и прямых терпит разрыв. Так как угол поворота управляющих колес робота не может измениться мгновенно, полученная траектория не является допустимой. Недостаток аппроксимации сплайновыми кривыми или спиралями Корню (в том числе и клотоидами) заключается, с одной стороны, в сложности построения таких кривых. Другой недостаток связан со сложностью вычисления расстояния от робота до кривой, что делает такие кривые малоприменимыми с точки зрения использования их в алгоритмах управления мобильным роботом.

2. Постановка задачи

Если система локально управляема, то можно попасть из любой точки конфигурационного пространства в любую другую, и задача решается просто: соединить точки заданной последовательности кусочно-линейной линией. Если количество точек, координаты которых известны, достаточно велико, то отклонение полученной аппроксимационной кривой от истинной траектории будет невелико.

Такой способ, однако, неприменим в случае неголономной системы (и в частности для колесного робота). Действительно, требование движения всех колес без проскальзывания накладывает ограничения на гладкостные свойства допустимых траекторий (например, [4]). Учитывая также, что привод управления рулевыми колесами имеет собственную динамику, так что угол поворота колес не может измениться мгновенно, мы приходим к выводу, что допустимая траектория должна быть дважды непрерывно-дифференцируема, т. е., принадлежать классу C^2 . Еще одно ограничение связано с ограниченностью угла поворота колес. Нетрудно видеть, что это ограничение эквивалентно ограничению на максимальную кривизну кривой (минимальный радиус кривизны траектории), $\kappa < \kappa_{\max}$ [4], где κ — мгновенное значение кривизны траектории а κ_{\max} — максимально допустимое значение кривизны.

Еще одно требование на кривую, аппроксимирующую допустимую траекторию, связано с ее последующим использованием в алгоритме управления роботом. Для того, чтобы заставить его следовать заданной кривой требуется вычислять расстояние от любой точки на плоскости до кривой и, возможно, некоторые производные от этого расстояния (количество производных определяется используемым алгоритмом управления). Так как расстояние и его производные должны вычисляться многократно (скажем,

10–20 раз в секунду) а возможности процессора, используемого в мобильном роботе ограничены, очень важно уметь эффективно вычислять требуемые величины. В случае произвольной кривой точное нахождение расстояния является очень трудоемкой задачей, решение которой, в общем случае, не всегда однозначно. Для того, чтобы преодолеть эту трудность, можно использовать кривые, допускающие более эффективное решение этой задачи (например, прямые линии или дуги окружности, расстояние до которых легко вычисляется). С другой стороны, не обязательно находить точное евклидово расстояние до кривой; можно, например, ввести другую метрику, учитывающую специфику аппроксимационной кривой и определить «квазирасстояние». Требования на такую функцию достаточно очевидны. Она должна принимать нулевые значения тогда и только тогда, когда данная точка принадлежит кривой, и уменьшаться по абсолютной величине, когда целевая точка приближается к кривой. Кроме того, удобно так определить эту функцию, чтобы она принимала разные знаки справа и слева от кривой.

Формально, рассматриваемая в статье задача может быть сформулирована следующим образом. По данному набору $n+2$ точек, заданных радиус-векторами в некоторой системе координат $r_0, r_1, \dots, r_n, r_{n+1}$ (например, полученных измерением положений движущегося колесного робота в дискретные моменты времени), построить аппроксимацию пути, пройденного роботом, гладкой дважды непрерывно-дифференцируемой кривой. Для выбранного класса аппроксимационных кривых определить «функцию расстояния» от произвольной точки на плоскости до кривой, позволяющую эффективное вычисление самой функции и некоторых ее производных.

3. Аппроксимация траектории колесного робота сплайновой кривой

Мы предлагаем аппроксимировать искомую кривую составными кубическими В-сплайнами [5]. Составной сплайн состоит из $n-1$ элементарных кубических В-сплайнов, каждый из которых строится по четырем соседним точкам $r_{i-1}, r_i, r_{i+1}, r_{i+2}$ по формуле

$$r^{(i)}(t) = R_i M T(t), \quad (1)$$

где r_i — двумерные векторы координат заданного множества точек, R_i — 2×4 -матрица, $R_i = [r_{i-1}, r_i, r_{i+1}, r_{i+2}]$, $r^{(i)}(t)$ — координаты текущей точки i -го сплайна, $0 \leq t \leq 1$ — параметр, а M и $T(t)$ — матрица и вектор:

$$M = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & -6 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Выбор составного кубического В-сплайна в качестве аппроксимационной кривой объясняется следующими замечательными свойствами этой кривой [5].

1. Кривая лежит в объединении $n - 2$ выпуклых оболочек, порожденных четверками вершин $r_{i-1}, r_i, r_{i+1}, r_{i+2}$.
2. «Повторяет» контрольную ломаную, проведенную через точки, по которым строится сплайновая аппроксимация.
3. Если опорные вершины лежат на одной прямой, то составная сплайновая кривая также лежит на этой прямой.
4. Кривая является C^2 -гладкой; в точке состыковки элементарных сплайнов выполняются равенства:

$$r^{(i)}(1) = r^{(i+1)}(0) = \frac{1}{6}(r_i + 4r_{i+1} + r_{i+2}), \quad (3)$$

$$\dot{r}^{(i)}(1) = \dot{r}^{(i+1)}(0) = \frac{1}{2}(-r_i + r_{i+2}), \quad (4)$$

$$\ddot{r}^{(i)}(1) = \ddot{r}^{(i+1)}(0) = r_i - 2r_{i+1} + r_{i+2}. \quad (5)$$

5. Изменение одной вершины в массиве приводит к необходимости пересчитывать только часть кривой (не более четырех элементарных сплайнов).

Первые три свойства говорят о том, что качественное поведение сплайновой кривой именно такое, какое мы ожидаем от аппроксимационной кривой; т. е. построенный сплайн с качественной точки зрения правильно аппроксимирует искомую кривую. Четвертое свойство показывает, что сплайновая кривая удовлетворяет гладкостным свойствам, накладываемым на траекторию колесного робота; т. е. полученная траектория является допустимой, если не учитывать, что угол поворота колес ограничен. И, наконец, пятое свойство выделяет В-сплайны из множества других сплайнов, которые в большинстве своем зависят от всего заданного набора точек. Таким образом, при добавлении/удалении некоторых точек нет нужды пересчитывать весь сплайн.

Отметим также, что, как правило, кривая не проходит ни через одну точку заданного массива. Учитывая, что координаты измеряются с ошибками, это свойство аппроксимационной кривой следует признать положительным.

Что касается ограничения на кривизну траектории, заметим, что в отсутствие ошибок измерений координат точек, по которым строится аппроксимационная кривая, это ограничение выполнено в силу того, что опорные точки принадлежат реальной траектории, на которой это ограничение удовлетворяется по определению.

Из-за ошибок измерений ограничение на кривизну траектории может нарушаться на некоторых участках аппроксимационной кривой. Очевидно, что эффект ошибок измерения на погрешность вычисления кривизны траектории тем больше, чем меньше расстояние между опорными точками. Поэтому, если ограничение на максимальную кривизну аппроксимационной кривой не выполняется, следует уменьшить количество опорных точек (например, использовать для аппроксимации каждую p -ю точку данного набора, $p = 2, 3, \dots$). Теоретически, эффект ошибок измерения координат

на кривизну траектории может быть сделан сколь угодно малым если расстояние между опорными точками достаточно велико. Однако при этом, очевидно, растут ошибки аппроксимации самого пути. На практике можно использовать следующий эвристический прием. Задаться допустимым порогом ошибки аппроксимации (который можно определить как максимум расстояний от опорных точек до аппроксимационной кривой) и уменьшать число опорных точек до тех пор, пока ошибка аппроксимации меньше порогового значения. Заметим, что ошибка аппроксимации может быть эффективно оценена без построения самой аппроксимационной кривой с помощью функции расстояния, введенной в следующем разделе.

4. Определение расстояния до сплайновой кривой

Как уже упоминалось, для того, чтобы использовать полученную аппроксимацию траектории в алгоритме управления, надо уметь эффективно вычислять расстояние от произвольной точки до кривой (или некоторую другую функцию, характеризующую близость этой точки к кривой). Вычисление расстояния до произвольной кривой является сложной задачей, которая решается только численно и может иметь не одно решение. Поэтому, вместо евклидова расстояния, мы вводим другую функцию (квазирасстояние), которая, с одной стороны, характеризует близость точки к кривой, а с другой стороны, легко вычисляется вместе со всеми ее производными.

Для того, чтобы определить эту функцию, при построении сплайновой кривой будем вычислять и хранить следующую дополнительную информацию о каждом элементарном сплайне: двумерный $2 \times (n - 1)$ массив $X^C = [X_1^C, \dots, X_{n-1}^C]$ и одномерный массив $\Phi = [\Phi_1, \dots, \Phi_{n-1}]$. Точка X_i^C есть «центр» i -го сплайна, который находится как точка пересечения прямых, перпендикулярных к касательным сплайна в его начале и конце, а Φ_i — угол между двумя этими прямыми (рис. 1). Если i -й сплайн представляет собой отрезок прямой линии, то в качестве X_i^C берется бесконечно удаленная точка, а Φ_i принимается равной длине этого отрезка.

Квазирасстояние $d_i(X)$ (в дальнейшем для краткости просто расстояние) от точки X до i -го элементарного сплайна определяется для всех точек, принадлежащих сектору, образованному двумя перпендикулярами с углом раствора Φ_i , как расстояние от точки X до пересечения прямой $X_i^C X$ со сплайном (рис. 1),

$$d_i(X) = (X - r^{(i)}(t_X), l), \quad (6)$$

где l — единичный вектор, направленный вдоль линии $X_i^C X$ (положительное направление l выбирается так, что в начальной точке сплайна вектор l совпадает с направлением нормали к сплайну), а $r^{(i)}(t_X)$ обозначает точку пересечения прямой $X_i^C X$ со сплайном. Значение параметра t_X находится приближенно за два шага. В качестве первого приближения берется $t_X^0 = \varphi_i / \Phi_i$, где φ_i есть угол между лучами, проведенными

из центра X_i^C i -го элементарного сплайна в его начало $r^{(i)}(0)$ и точку X , соответственно. Это значение параметра давало бы точные значения координат точки пересечения в том случае, если бы при равномерном изменении параметра от 0 до 1 описывающая точка также двигалась по сплайновой кривой равномерно. В общем случае это не так, и мы получаем

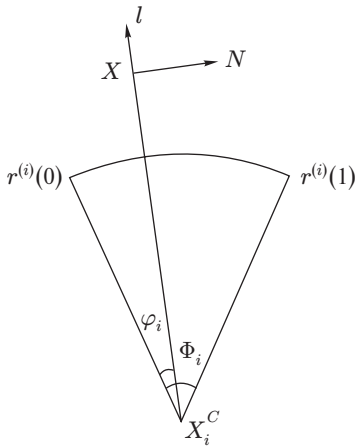


Рис. 1. Нахождение расстояния от точки X до i -го сплайна

приближенное значение $r^{(i)}(t_X^0)$ радиус-вектора этой точки. Чтобы учесть неравномерность движения точки, описывающей сплайн, делается один шаг линейного приближения. Представляя искомое значение параметра t_X в виде $t_X = t_X^0 + \Delta t_X$, разлагая функцию $r^{(i)}(t)$ в ряд Тейлора в окрестности точки t_X^0 относительно малого возмущения Δt_X и оставляя только линейные члены, находим величину поправки из условия ортогональности любого отрезка, лежащего на прямой $X_i^C X$, вектору N как

$$\Delta t_X = \frac{(X - r^{(i)}(t_X^0), N)}{(\dot{r}^{(i)}(t_X^0), N)}, \quad (7)$$

где N — единичный вектор нормали к прямой $X_i^C X$.

Таким образом, $d_i(X)$ приближенно равно расстоянию от точки X до сплайна, измеренному вдоль прямой $X_i^C X$, и имеет разные знаки с разных сторон от сплайна. Заметим также, что для $\varphi_i = 0$ (прямая $X_i^C X$ проходит через начало сплайна $r^{(i)}(0)$) и $\varphi_i = \Phi_i$ (прямая $X_i^C X$ проходит через конец сплайна $r^{(i)}(1)$) значения функции $d_i(X)$ дают обычное евклидово расстояние. Кроме того, функция $d_i(X)$ дает евклидово расстояние в случае когда элементарный сплайн представляет собой отрезок прямой линии. С учетом этих двух замечаний, очевидно, что $d_i(X)$ не сильно отличается от обычного евклидова расстояния и может использоваться в качестве меры удаления точки от целевой кривой в алгоритмах управления.

Расстояние от точки до сплайновой кривой определяется как расстояние от этой точки до «очередного» элементарного В-сплайна, где номер очередного сплайна определяется следующим образом. Предположим, что нумерация элементарных сплайнов согласуется с порядком их прохождения и что номер очередного сплайна в начальный момент времени известен. Тогда очередной сплайн с номером i меняется на сплайн с номером $i + 1$, когда параметр φ_i становится равным Φ_i ($t_X^0 = 1$).

Производные от расстояния $d_i(X)$ по времени находятся непосредственным дифференцированием формулы (6). Зависимость функции $d_i(X)$ от времени определяется законом движения точки X . Так как при движении точки X , направление прямой $X_i^C X$ меняется, вектор l и параметр φ_i также являются функциями времени, которые легко находятся из закона

движения точки $X(t)$. Вывод формул для производных функции расстояния не сложен, но сами формулы довольно громоздки, поэтому мы их опускаем.

Покажем теперь, как можно оценить ошибку аппроксимации (которую мы определили как максимальное расстояние от опорных точек до аппроксимационной кривой), используя введенную выше функцию расстояния. Для того, чтобы найти расстояние от i -й опорной точки до сплайна, можно воспользоваться формулой (6) при $X = r_i$. Нетрудно показать, что в этой формуле можно положить $t_X = 0$, т. е.

$$d_i(r_i) = (r_i - r^{(i)}(0), l),$$

где l есть единичный вектор нормали к i -му сплайну в начальной точке. Очевидно, что указанное расстояние легко вычисляется по массиву опорных точек. Действительно, используя формулу (3), находим

$$r_i - r^{(i)}(0) = \frac{1}{6}(-r_{i-1} + 2r_i - r_{i+1}),$$

а l находится из условия ортогональности касательному вектору $\dot{r}_i(0)$ в начальной точке i -го сплайна, который, в свою очередь, определяется формулой (4), $\dot{r}_i(0) = (r_{i+1} - r_{i-1})/2$. Для данного массива опорных точек ошибка аппроксимации составной В-сплайновой кривой находится как $\max_i d_i(r_i)$.

5. Заключение

В статье рассмотрена задача об аппроксимации пути колесного робота, заданного некоторым упорядоченным массивом опорных точек (измерений), гладкой кривой, удовлетворяющей дифференциальным ограничениям, наложенным на исследуемую неголономную систему. Предложено аппроксимировать искомую кривую составным кубическим В-сплайном. Полученная кривая является дважды непрерывно-дифференцируемой, и составляющие ее элементарные сплайны строятся локально по четырем соседним точкам, так что изменение/добавление одной опорной точки приводит к изменению не более четырех элементарных сплайнов.

Для точек плоскости, принадлежащих некоторой окрестности кривой, определена функция квазирасстояния, показывающая меру удаления этих точек от построенной кривой. В отличие от евклидова расстояния, которое можно найти только численно, введенная функция (а также ее производные) легко вычисляется по явным формулам. Функция принимает нулевые значения тогда и только тогда, когда точка принадлежит кривой и ненулевые значения разного знака по разные стороны от кривой. Наличие такой, эффективно вычисляемой, функции позволяет использовать построенную аппроксимационную кривую в алгоритмах управления с обратной связью (когда задачей управления является следование заданному пути, а управляющие воздействия формируются по результатам измерения положения робота).

Литература

1. *LaValle S. M.* Planning Algorithms. Cambridge University Press, 2006.
2. *Shin D. H., Singh S.* Path Generation for Robot Vehicles Using Composite Clothoid Segments // Technical Report CMU-RI-TR-90-31. Carnegie-Mellon University, 1990.
3. *Nagy B., Kelly A.* Trajectory Generation for Car-Like Robots Using Cubic Curvature Polynomials // Proc. of the Conf. "Field and Service Robots 2001" (FSR 01). Helsinki, Finland, 2001.
4. *Рапопорт Л. Б.* Оценка области притяжения в задаче управления колесным роботом // Автоматика и телемеханика. 2006 (в печати).
5. *Позняк Э. Г., Шикин Е. В.* Дифференциальная геометрия. М.: УРСС, 2003.