Построение симплициального многогранника из куба

М. Н. Матвеев

Аннотация

Триангуляция K_1 пространства R_d устроена таким образом, что она одновременно разбивает на симплексы поверхность единичного куба. Важной особенностью этого разбиения является исключительная простота его описания. В данной работе предлагается метод «вытягивания» вершин куба, превращающий его в симплициальный многогранник, грани которого находятся во взаимно однозначном соответствии с симплексами, на которые триангуляция K_1 разбивает поверхность единичного куба. Полученный таким образом симплициальный многогранник с хорошо описанными гранями может быть использован в процедурах вычисления неподвижных точек.

1. Введение

Многогранник называется симплициальным, если все его грани являются симплексами. Симплициальные многогранники являются важным объектом и одновременно инструментом для теоретических исследований. Превосходное описание этой стороны их использования может быть найдено в [3]. Однако симплициальные многогранники находят применение и в прикладных задачах, возникающих в различных областях знания.

Настоящая статья будет касаться вопросов использования симплициальных многогранников для вычисления неподвижных точек. Основы для такого их применения заложены в [4]. При этом выделяются два наиболее важных условия: а) многогранник должен иметь большое количество вершин и б) грани этого многогранника должны быть хорошо описанными. Нетрудно видеть, что в общем случае первое из этих условий, вообще говоря, противоречит второму.

Предлагаемый ниже метод построения симплициального многогранника из триангулированной поверхности куба является одним из подходов к решению данной проблемы. С одной стороны, куб имеет достаточно большое (2^d) количество вершин. С другой стороны, для разбиения на симплексы поверхности куба в данной статье используется триангуляция K_1 пространства R^d. Одной из отличительных черт этой триангуляции является как раз чрезвычайно простое описание ее симплексов.

2. Триангуляция K_1 пространства R_d

Пусть C — произвольное множество в $\mathbb{R}^d$. Набор $\mathcal{S}$ выпуклых многогранных множеств называется разбиением C, если:

1. C является объединением всех множеств из $\mathcal{S}$.
2. Пересечение любых двух множеств или пусто или является их общей собственной гранью.
3. Любая точка C имеет окрестность, пересекающуюся только с конечным числом элементов из $\mathcal{S}$.

Если разбиение $\mathcal{S}$ состоит исключительно из симплексов, т. е., выпуклых оболочек афинно-независимых точек, то такое разбиение называется триангуляцией или симплициальным разбиением.

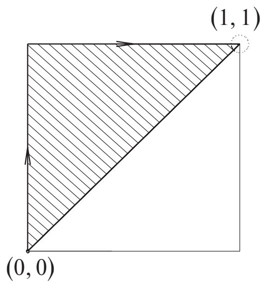

Рис. 1. Триангуляция K_1 разбивает квадрат на симплексы $1 \geqslant x_1 \geqslant x_2 \geqslant 0$ (заштрихован) и $1 \geqslant x_2 \geqslant x_1 \geqslant 0$

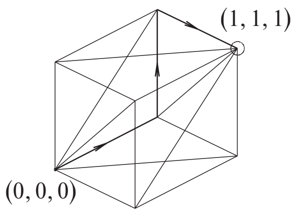

Рис. 2. Триангуляция K_1 разбивает куб на 9 симплексов с общим ребром $(0, 0, 0)$ – $(1, 1, 1)$

Триангуляция K_1 является разбиением на симплексы целого пространства $\mathbb{R}^d$. Эта триангуляция также часто называется K или триангуляцией Куна. Однако впервые она была описана Фройденталем [1], а затем переоткрыта Таккером (см. [2, с. 140]). Фройденталь построил K_1 для ответа на вопрос, поставленный Брауэром: существует ли регулярная триангуляция произвольной мелкости, симплексы которой не были бы «сколь угодно длинными и тонкими»?

Триангуляция K_1 пространства $\mathbb{R}^d$ с вершинами симплексов в точках с целыми координатами строится следующим образом. Сначала все пространство разбивается на единичные кубы, а затем каждый куб триангулируется таким образом, что в результате получается триангуляция всего пространства $\mathbb{R}^d$.

Итак, пусть $\mathbb{I}^d$ — множество d-мерных векторов с целыми координатами, тогда множество единичных кубов, заполняющих $\mathbb{R}^d$, может быть представлено как

$$\{\, C_\alpha^\beta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{I}^d, \beta_i = \alpha_i + 1, i \in 1 : d \,\},$$

где C_α^β обозначает куб с диагональю $\alpha - \beta$, координаты вершин которого определяются условием $\alpha_i \leqslant x_i \leqslant \beta_i$.

Очевидно, что если u_i, $i \in 1 : d$, — единичные векторы, а $\pi = (\pi(1), \ldots, \pi(d))$ — некоторая перестановка чисел $1, \ldots, d$, то выпуклая оболочка $s_\pi(\alpha)$ точек $y_0(\pi), y_1(\pi), \ldots, y_d(\pi)$, где $y_0(\pi) = \alpha$, а $y_i(\pi) = y_{i-1}(\pi) + u_{\pi(i)}$, $i \in 1 : d$, есть симплекс, множество вершин которого является подмножеством вершин единичного куба C_α^β, заведомо содержащим две вершины куба — α и β. Обозначим через $\mathcal{S}(C_\alpha^\beta)$

множество симплексов $s_\pi(\alpha)$ для всех перестановок π. Тогда K_1 есть объединение множеств $\mathcal{S}(C_\alpha^\beta)$ для всех $\alpha \in \mathbb{I}^d$. Доказательство того, что K_1 есть триангуляция $\mathbb{R}^d$, может быть найдено в [5].

3. Способ построения симплициального многогранника из куба

Рассмотрим процесс «вытягивания» вершин куба, изображенный на рис. 3, 4. Очевидно, что полученный в результате этого процесса симплициальный многогранник имеет грани, которые могут быть взаимно однозначно описаны с помощью триангуляции K_1. Действительно, каждая из этих граней — это просто симплекс разбиения поверхности куба триангуляцией K_1, одна из вершин которого смещена из своего первоначального положения.

Приводимое ниже описание «вытянутых» вершин куба представляет собой реализацию трехмерной идеи, изображенной на рис. 4, для случая произвольной размерности. Пусть вектором знаков называется вектор, все компоненты которого равны ± 1. Поставим в соответствие каждому d-мерному вектору знаков s «вытянутый» вектор знаков

$$s' = \left(1 + \frac{2}{2{,}5^k}\right)s, \tag{1}$$

где k — количество отрицательных компонент вектора s, и «обнуленный» вектор знаков s^0, в котором отрицательные компоненты вектора s заменены нулевыми. Обозначим через S' множество векторов s' для всех векторов знаков s и рассмотрим многогранник C', являющийся выпуклой оболочкой векторов $s' \in S'$.

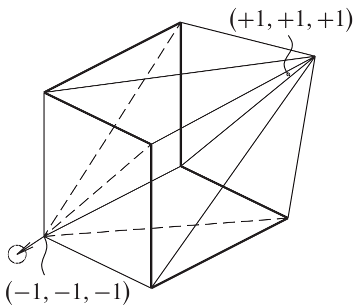

Рис. 3. Смещение вершины $(+1,+1,+1)$ куба C в позицию, симметричную позиции, указанной кружком для противоположной вершины, приводит к «триангуляции» всех граней, которые содержали $(+1,+1,+1)$

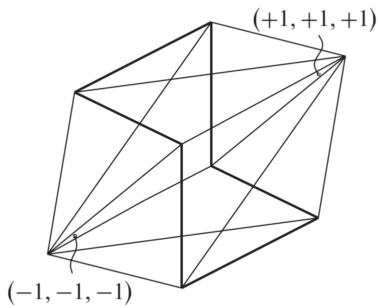

Рис. 4. Смещение двух вершин $(+1,+1,+1)$ и $(-1,-1,-1)$ приводит к симплициальному многограннику, поверхность которого описывается триангуляцией K_1

Лемма 1. *Многогранник C' является симплициальным, при этом вершины $s'_1, \ldots, s'_d$ образуют грань многогранника C' тогда и только тогда, когда соответствующие им вершины $s^0_1, \ldots, s^0_d$ образуют грань симплекса триангуляции K_1, лежащую на поверхности единичного куба C^0 с диагональю от d-мерного вектора, состоящего из нулей, к d-мерному вектору, состоящему из единиц.*

Доказательство. По построению симплексы триангуляции K_1 всегда имеют ребро, идущее от вершины некоторой грани куба C^0 с максимальным числом нулевых компонент к вершине той же грани с минимальным числом нулевых компонент (см. описание триангуляции K_1 во втором параграфе предыдущей главы). Поэтому достаточно доказать, что если вершины s_1, s_2, s_3, s_4 некоторой грани куба C, перечисленные в порядке лексикографического возрастания, являются такими что линейный сегмент $[s_1, s_4]$ пересекается с линейным сегментом $[s_2, s_3]$ (см. рис. 5), то линейный сегмент $[s'_1, s'_4]$, соответствующий сегменту $[s_1, s_4]$ является ребром многогранника C'.

В свою очередь, для этого достаточно доказать, что точка пересечения x_2 линейного сегмента $[s'_1, s'_4]$ с лучом r, выходящим из начала координат O и проходящим через точку пересечения x_0 сегментов $[s_1, s_4]$ и $[s_2, s_3]$ лежит выше точки пересечения x_1 луча r с линейным сегментом $[s'_2, s'_3]$ (см. рис. 5). Оценим расположение точек x_1 и x_2 на луче r.

Пусть $\beta = \frac{2}{2{,}5^{k_4}}$, где k_4 — количество отрицательных компонент вектора s_4. Тогда точка x_2 расположена заведомо выше точки $y_2 = \alpha s_1 + (1-\alpha)s'_4$, также лежащей на луче r (см. рис. 5). Поскольку в точке y_2 по крайней мере одна из компонент вектора s_1 в сумме с соответствующей компонентой вектора s'_4 должна давать 0, то коэффициент α определяется из условия

$$-\alpha + (1+\beta)(1-\alpha) = 0,$$

откуда

$$\alpha = \frac{1+\beta}{2+\beta}.$$

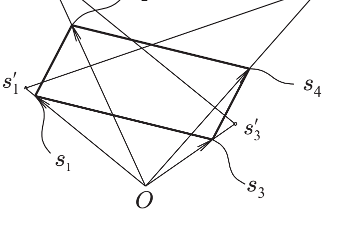

Рис. 5. Расположение вершин s'_1, s'_2, s'_3, s'_4 над гранью куба

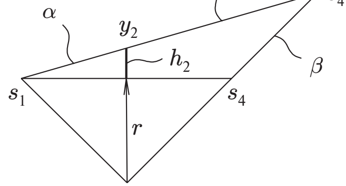

Рис. 6. Расположение точки y_2 на луче r

Таким образом, высота точки y_1 над точкой x_0 равна

$$h_2 = \frac{1+\beta}{2+\beta}\beta\frac{\sqrt{d}}{\sqrt{n}},$$

где n — количество ненулевых компонент каждого из векторов x_0, x_1 и x_2. С другой стороны, поскольку векторы s_2 и s_3 имеют меньше отрицательных компонент, чем вектор s_4, то высота точки x_1 над точкой x_0 не превосходит высоты над точкой x_0 (параллельно лучу r) любого из векторов s', соответствующих векторам s, которые могут быть получены из s_4 путем замены одной из его положительных компонент на отрицательную. Очевидно, что эта высота не превосходит величины

$$h_1 = \frac{\beta}{z}\frac{\sqrt{d}}{\sqrt{n}},$$

где параметр z определяет, насколько вершина с k отрицательными компонентами должна вытягиваться меньше, чем вершина с $k-1$ отрицательной компонентой ($z = 2{,}5$ в нашем случае).

Линейный сегмент $[s'_1, s'_4]$ будет являться ребром многогранника C' при условии $h_2 > h_1$, откуда находим

$$\frac{1+\beta}{2+\beta}\beta\frac{\sqrt{d}}{\sqrt{n}} > \frac{\beta}{z}\frac{\sqrt{d}}{\sqrt{n}}, \quad (1+\beta)z > (2+\beta), \quad z > \frac{2+\beta}{1+\beta} = 1 + \frac{1}{1+\beta}.$$

Очевидно, что при $\beta < 2$ параметр z должен удовлетворять условию $z > 2$, что полностью соответствует уравнению (1). □

Литература

1. *Freudenthal H.* Simplizialzerlegungen von beschränkter flachheit // Annals of Mathematics. 43 (1942). P. 580–582.
2. *Lefschetz S.* Introduction to topology. Princeton University Press, 1949.
3. *Ziegler G. M.* Lectures on polytopes. N. Y.: Springer, 1995.
4. *Матвеев М. Н.* Использование целочисленных меток в алгоритмах поиска неподвижных точек // Динамика неоднородных систем. 10 (2006). P. 118–124.
5. *Тодд М. Дж.* Вычисление неподвижных точек и приложения к экономике. М.: Наука, 1983.