

Появление хаотических решений в модели Вольтерра—Гаузе*

С. В. Сидоров

Аннотация

Рассматривается сценарий перехода к хаосу в модели вида два хищника—жертва. Показано, что переход к хаосу осуществляется через каскады бифуркаций удвоения периода предельных циклов, субгармонический и гомоклинический каскады бифуркаций рождения устойчивых циклов.

1. Введение

Модель Вольтерра—Гаузе описывает сообщество два хищника—жертва и представляет собой систему из трех нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a \left(1 - \frac{\lambda}{a} x \right) x - bx^k y, \\ \dot{y} &= dx^k y - cy - ey^p z, \\ \dot{z} &= (fy^p - g)z\end{aligned}\tag{1}$$

относительно переменных x — популяция жертвы, y и z — популяции соответственно первого и второго хищников, причем, как следует из модели (1), существование второго хищника непосредственно зависит от популяции первого хищника, который является в свою очередь жертвой для второго. Величины $a, b, c, d, e, f, g, \lambda, k$ и p являются параметрами модели.

Модель включает логистическую функцию Ферхюльста [1]

$$\varphi(x) = x \left(1 - \frac{\lambda x}{a} \right),$$

ограничивающую в модели Вольтерра [2] рост популяции x , и функцию Гаузе $q(x) = bx^k$ [3], которая определяет норму потребления для первого хищника (соответственно для второго хищника эта функция зависит от переменной y). Коэффициенты d и f задают темпы роста хищников, а параметры c и g определяют их смертность. Таким образом, модель (1) объединяет модель Вольтерра с теорией Гаузе согласно которой в отсутствие хищников популяции жертв существовать не могут. Относительно

* Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект 04-01-00225а) и программой ОИТВС РАН (проект 1.12).

подобных систем хорошо известно, что сосуществование всех трех видов может происходить как в стационарном, так и в колебательном режиме в отсутствие каких-либо специальных дестабилизирующих факторов [4, 5].

В работе [6] исследована модель Вольтерра—Гаузе для характерных значений параметров $k = p = 1/2$ и показано существование в модели хаотического аттрактора. Целью данной работы является установление механизма перехода к хаотическому режиму в модели Вольтерра—Гаузе.

2. Сценарий перехода к хаосу

Рассмотрим модель (1) при значениях параметров $k = p = 1/2$, приведенную в работе [6] к безразмерному виду

$$\begin{aligned} \xi \dot{x} &= (1 - x)x - \sqrt{xy}, \\ \dot{y} &= \sqrt{xy} - \delta_1 y - \sqrt{y}z, \\ \dot{z} &= \varepsilon(\sqrt{y} - \delta_2)z, \end{aligned} \tag{2}$$

который в отличие от системы (1) содержит всего четыре параметра: ξ , δ_1 , δ_2 и ε .

Неалгебраическая структура функций в правой части систем (1) и (2) не позволяет аналитически определить все неподвижные точки и их типы. Однако это обстоятельство не является препятствием для исследования перехода к хаосу. Как нами установлено [7, 8], ни количество неподвижных точек, ни типы их равновесия не являются определяющими в сценарии перехода к хаосу для нелинейных диссипативных динамических систем, описываемых дифференциальными уравнениями. Появление хаоса в таких системах обусловлено существованием так называемого *сингулярного* предельного цикла — периодического решения, среди показателей Флоке которого имеется пара с одинаковой мнимой частью и с различными вещественными частями. Часто такой цикл рождается в результате бифуркации Андронова—Хопфа. Поэтому обратим внимание на неподвижные точки $O_0(0, 0, 0)$, $O_1(1, 0, 0)$ и $O_2(\delta_1^2, \delta_1(1 - \delta_1^2), 0)$ системы (2), лежащие в плоскости $z = 0$, координаты которых легко определяются аналитически.

Матрица Якоби системы (2)

$$J = \begin{pmatrix} \frac{1}{\xi} \left(1 - 2x - \frac{y}{2\sqrt{x}} \right) & -\frac{\sqrt{x}}{2\xi} & 0 \\ \frac{\sqrt{y}}{2\xi} & \sqrt{x} - \frac{z}{2\sqrt{y}} - \delta_1 & -\sqrt{y} \\ 0 & \frac{\varepsilon z}{2\sqrt{y}} & \varepsilon(\sqrt{y} - \delta_2) \end{pmatrix}$$

в точке $O_0(0, 0, 0)$ имеет собственные значения $\{1/\xi, -\delta_1, -\varepsilon\delta_2\}$, которые свидетельствуют о том, что в этой точке нет условий для рождения цикла. Аналогичная ситуация имеет место и в другой неподвижной точке $O_1(1, 0, 0)$ с собственными значениями якобиана $\{-1/\xi, 1 - \delta_1, -\varepsilon\delta_2\}$.

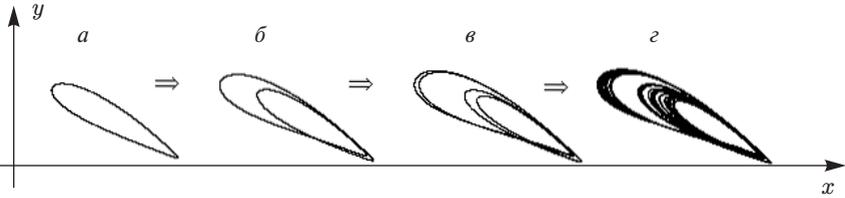


Рис. 1. Проекции на плоскость (x, y) устойчивых циклов каскада Фейгенбаума: а) предельный цикл при значении параметра $\delta_1 = 0,650$; б) цикл удвоенного периода при $\delta_1 = 0,640$; в) цикл учетверенного периода при $\delta_1 = 0,630$; г) хаотический аттрактор Фейгенбаума при $\delta_1 = 0,6256$

В неподвижной точке $O_2(\delta_1^2, \delta_1(1 - \delta_1^2), 0)$ характеристическое уравнение для матрицы Якоби имеет вид

$$\left(\lambda - \varepsilon \left(\sqrt{\delta_1(1 - \delta_1^2)} - \delta_2\right)\right) \left(\lambda^2 - \lambda \frac{1 - 3\delta_1^2}{2\xi} - \frac{\delta_1(1 - \delta_1^2)}{2\xi}\right) = 0,$$

из которого следует, что при следующих условиях

$$1 - 3\delta_1^2 \geq 0, \quad \delta_2 > \sqrt{\delta_1(1 - \delta_1^2)} \quad (3)$$

в системе (2) может иметь место бифуркация Андронова—Хопфа. Более того, если выполнены условия (3), точка O_2 лежит в диссипативной области и предельный цикл, рождающийся при потере устойчивости точки, является устойчивым.

Действительно, численное исследование системы (2) при фиксированных значениях параметров $\xi = 0,866$, $\varepsilon = 1,428$ и $\delta_2 = 0,376$, которые приняты нами согласно работе [6], показало, что при значении параметра $\delta_1 \approx 0,7475$ происходит рождение устойчивого предельного цикла, вид проекции которого в плоскости (x, y) при значении параметра $\delta_1 = 0,650$ изображен на рис. 1 а. Далее на рис. 1 б, в, г показана эволюция этого цикла при уменьшении параметра δ_1 . Так при значении параметра $\delta_1 \approx 0,649$ происходит бифуркация удвоения периода данного цикла, а при значении $\delta_1 = 0,630$ этот предельный цикл имеет учетверенный период (рис 1 в). Каскад бифуркаций удвоения периода завершается при значении параметра $\delta_1 \approx 0,6256$ образованием сингулярного (хаотического) аттрактора Фейгенбаума (рис. 1 г).

За каскадом Фейгенбаума следует субгармонический каскад рождения устойчивых циклов, периоды которых определяются согласно порядку Шарковского [9]. Численно установлено, что при значении бифуркационного параметра $\delta_1 = 0,624$ имеет место цикл периода $6 = 2 \cdot 3$, при значении $\delta_1 = 0,61841$ — цикл периода 7, при значении $\delta_1 = 0,620$ — цикл периода 5 (рис. 2 а), при значении $\delta_1 = 0,6154$ — цикл периода 3 (рис. 2 б), который свидетельствует о том, что хаотический аттрактор, имеющий место в системе (2) при значении параметра $\delta_1 = 0,613$ (рис. 2 в), образовался в результате полного субгармонического каскада бифуркаций

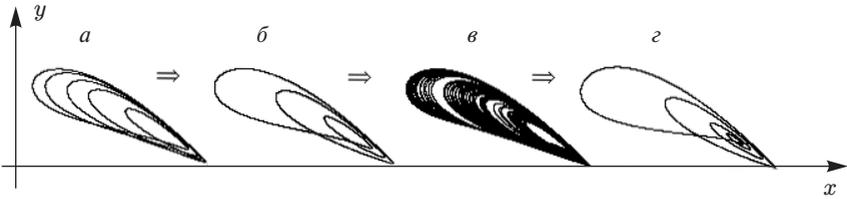


Рис. 2. Проекции на плоскость (x, y) решений системы (2): а) устойчивый цикл субгармонического каскада периода 5 при значении параметра $\delta_1 = 0,620$; б) цикл периода 3 при $\delta_1 = 0,6154$; в) субгармонический аттрактор при $\delta_1 = 0,613$; г) цикл гомоклинического каскада при $\delta_1 = 0,6058$

рождения устойчивых циклов, периоды которых определены порядком Шарковского. При дальнейшем уменьшении значений бифуркационного параметра δ_1 в системе (2) появляются циклы гомоклинического каскада. Один из таких циклов показан на рис. 2 г.

Для того, чтобы установить полный гомоклинический каскад, завершающийся образованием гомоклинической петли особой точки O_2 , необходимо проведение специальных исследований, аналогичных тем, которые были выполнены для системы Лоренца [10]. Однако и приведенные результаты позволяют утверждать, что переход к хаосу в модели Вольтерра—Гаузе осуществляется в результате того же механизма, который имеет место в других нелинейных диссипативных динамических системах, описываемых дифференциальными уравнениями. Началом любого сценария перехода к хаосу является каскад бифуркаций удвоения периода циклов — гармонический каскад Фейгенбаума [7, 8], который сходится к хаотическому аттрактору Фейгенбаума. Более сложная структура сингулярного (хаотического) аттрактора создается субгармоническим каскадом бифуркаций рождения устойчивых циклов, период которых определяется согласно порядку Шарковского. Дальнейшее усложнение хаотических аттракторов, рождающихся в точках накопления значений бифуркационного параметра, идет через гомоклинический каскад бифуркаций рождения устойчивых циклов, сходящихся к гомоклиническому контуру — петле сепаратрисы особой точки типа седло-фокуса [7, 8]. Таким образом, переход к хаосу в модели Вольтерра—Гаузе осуществляется через каскады бифуркаций удвоения периода предельных циклов, субгармонический и гомоклинический каскады бифуркаций рождения устойчивых циклов.

Литература

1. Verhulst P. F. Notice sur la loi que suit la population dans sons accroissement // Corresp. Math. Phys. X. 1838. 113–121.
2. Volterra V. Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi // Mem. Acad. Lincei III. 6. 1926. 31–113.
3. Gause G. F. The Struggle for Existence. Baltimor. Williams and Wilkins, 1935.
4. Базыкин Ф. Д. Математическая биофизика взаимодействующих популяций. М.: Наука, 1985. 165 с.

5. Ризниченко Г. Ю. Математические модели в биофизике и экологии. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2006. 184 с.
6. Ginoux J.-M., Rossetto B., Jamet J.-L. Chaos in a three-dimensional Volterra—Gause model of predator-prey type // Intern. Journ. of Bifurcation and Chaos. 2005. Vol. 15. №. 5. 1689–1708.
7. Магницкий Н. А., Сидоров С. В. Новые методы хаотической динамики. М.: УРСС, 2004. 320 с.
8. Сидоров С. В. Универсальность перехода к хаосу в динамических системах дифференциальных уравнений // Динамика неоднородных систем. Вып. 9. М.: КомКнига/URSS, 2005. С. 51–87.
9. Шарковский А. Н. Сосуществование циклов непрерывного преобразования прямой в себя // Укр. мат. журн. 1964. Т. 26. № 1. С. 61–71.
10. Магницкий Н. А., Сидоров С. В. О нахождении гомоклинических и гетероклинических контуров особых точек нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39. № 11. С. 1511–1520.