НАПРАВЛЕНИЕ I

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ
МАКРОСИСТЕМ

Энтропийные модели демо-экономической динамики

Ю. С. Попков

Институт системного анализа
Российской академии наук (ИСА РАН)

1. Введение

Население — уникальная компонента мироздания, снабженная интеллектом. Будучи инструментом саморазвития, интеллект порождает различные виды человеческой деятельности и совершенствуется (расширяет свои возможности) в процессе их реализации. Иными словами, население, вовлекаемое в какую-либо деятельность, испытывает влияние от нее и изменяет свой статус. Имеет место своеобразный замкнутый контур — население, деятельность, обратная связь к населению — который является источником цивилизационного развития.

Одним из видов деятельности человека является экономическая деятельность. Сама по себе она весьма обширна, вмещает в себя огромное количество отдельных направлений. Здесь мы будем рассматривать экономику как макрообъект, который преобразует «капитал» и «труд» в «товар». Заметим, что одним из экономических ресурсов является «труд», т. е. трудовая деятельность людей в экономической сфере. «Товар», производимый экономикой и потребляемый в той или иной форме населением, изменяет демографическую структуру и психо-физиологические параметры населения, т. е. ее внутреннюю кластеризацию, количественное и статусное оформление кластеров (групп населения). В результате, на новом витке развития иные группы и в ином количестве вовлекаются в экономические процессы и т. д.

Таким образом, можно говорить о существовании системы «население — экономика (PE)», состоящей из подсистем «население (P)» и «экономика (E)», образующих замкнутый контур (рис. 1)[1]. Конечно, система PE погружена в метасистему, которая оказывает влияние на ее состояние через подсистемы P и E. Факт такого влияния отражен качественно на рис. 1 стрелками.

Каждой из подсистем посвящена соответствующая наука. Структурную динамику населения изучает макродемография, а формирование и эволюцию экономических структур — макроэкономика. Причем экономические факторы, влияющие на процессы в подсистеме «население», рассматриваются в макродемографии как внешние, относящиеся к воздействиям от метасистемы (см. рис. 1). Поведение подсистемы «население» изучается при наличии воздействия в том числе экономического характера.

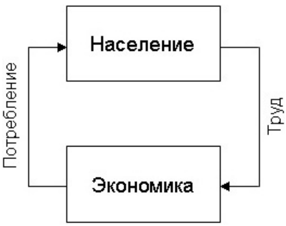

Рис. 1

Аналогичная ситуация имеет место в макроэкономике. Поведение подсистемы «экономика» рассматривается при условии, что подсистема «население» воспроизводит трудовые ресурсы в определенном количестве и поло-возрастной структуре.

Но если традиционный инструментарий демографической и экономической наук позволяет моделировать, анализировать, прогнозировать состояния подсистем P и E, то что может дать рассмотрение системы «население — экономика»? Ответ на этот вопрос дает системный подход и его инструмент — системный анализ.

Каждая из частей PE-системы имеет как собственные (без воздействий со стороны метасистемы), так и возмущенные (при воздействиях со стороны метасистемы) типы поведения (состояния равновесия, их устойчивость, циклы, аттракторы и т. д.). Но когда подсистемы P и E соединены в PE-систему, то последняя приобретает *новые свойства*, *отличные от свойств ее частей*. В особенности, такой «системный эффект» обнаруживается тогда, когда учитывается нелинейный характер связей как внутри каждой

[1] Все аббревиатуры в тексте и на рисунках приняты на основе английских терминов.

из подсистем, так и нелинейности в каналах влияния одной подсистемы на другую. В результате PE-система может иметь иные состояния равновесия и иные неравновесные процессы. В качестве косвенного подтверждения этому можно рассматривать весьма низкую реализуемость демографических и экономических средне- и долгосрочных прогнозов.

Особенность развиваемой и реализованной в инструментальном виде концепции состоит в системном рассмотрении пространственно — временной эволюции популяционных и экономических процессов.

2. Особенности динамического взаимодействия населения и экономики

Изучение тенденций пространственно-временного развития социально-экономической системы оказывается весьма важным, так как касается основных ресурсов современного мира — человеческих, экономических и природных.

Математическая статистика и эконометрика позволяет осуществить первый шаг на пути познания внутренних механизмов социально-экономического развития, а именно, обнаружить связи между отдельными факторами, влияющими на эти процессы, и построить простейшие регрессионные модели. Следующий шаг познания связан с более глубоким погружением в сущность процессов развития, исследованием не только статических связей, но и динамических закономерностей. Методологией этого этапа познания является системный подход, а его инструментом — математическое моделирование. Здесь мы будем опираться на обе эти компоненты, развивая и ориентируя их на процессы в PE-системе.

Классическая демография изучает динамику населения в терминах пространственно-временной эволюции распределения численности по полу и возрасту. На эту характеристику состояния населения оказывают определяющее влияние три процесса — рождаемость, смертность и миграция. Каждый из них характеризуется соответствующими параметрами, имеющими смысл скоростей. В принципе современная статистическая база содержит ретроспективную информацию, по которой эти коэффициенты могут быть вычислены для «прошлого» состояния населения. Возможность их использования для прогнозирования остается неопределенной, так как их значения в «будущем» не известны, и приходиться привлекать экспертные оценки, которые чаще всего субъективны.

Природа ошибок прогнозов при таком подходе более глубокая, чем ошибки экспертов. Дело в том, что развитие населения в будущем меняет экономическую среду, а последняя изменяет те процессы в эволюции населения, которые как-то были отражены в ретроспективных данных, и которые в принципе не могут быть учтены в экспертных знаниях. Существующая обратная связь между демо- и экономическими процессами придает PE-системе новые свойства. Системный подход и математическое моделирование позволяют обнаружить эти новые свойства и существенно повысить достоверность кратко- и среднесрочных прогнозов.

Математическое моделирование, в отличии от методов математической статистики и эконометрики, позволяет не только восстанавливать параметры связей между демографическими и экономическими факторами, но и моделировать механизмы этих связей, в том числе и их динамику. Естественно, математическая модель содержит собственные параметры, но они либо не меняются во времени, либо меняются существенно медленнее моделируемых процессов.

В связи с этим важным концептуальным этапом моделирования является формирование временной иерархии изучаемых процессов. Известно, что изменения населения, происходящие во времени, есть результат взаимодействия биологического воспроизводства и миграции. Статистический анализ реальных ретроспективных данных показывает, что процессы биологического воспроизводства протекают существенно медленнее, чем миграционные процессы. Так например, время релаксации биологических процессов составляет для Европы 10–15 лет, а время релаксации миграционных процессов — 2–3 года [1, 2]. Конечно эти величины различаются по странам, но их соотношение остается стабильным. Это означает, что при интервале прогноза 10–15 лет параметры процесса биологического воспроизводства мало меняются, тогда как параметры миграционного процессы могут измениться существенно.

Следуя системному подходу, мы будем строить модель PE-системы. Поэтому необходимо учесть временную шкалу экономических процессов в сравнении с временными шкалами процессов биологического воспроизводства и миграции. Статистический анализ реальных данных дает усредненное время релаксации экономических процессов порядка 5–7 лет. Однако экономическая подсистема устроена существенно сложнее подсистемы «населения». Поэтому некоторые компоненты подсистемы «экономика» могут иметь существенно меньшее время релаксации (например, цены), тогда как другие могут иметь существенно большие времена релаксации (например, основные средства).

Таким образом, развиваемая концепция демо-экономического моделирования строится на иерархии временных шкал реальных процессов: *slow-scale* — шкала медленных процессов биологического воспроизводства населения; *meso-scale* — шкала среднескоростных процессов экономической динамики; *fast-scale* — шкала быстрых миграционных процессов.

3. Вероятностная технология демографического прогнозирования

Система «население — экономика», как и большинство больших систем, является не вполне определенной, с точки зрения устройства внутренних механизмов ее функционирования и внешних факторов, влияющих на ее динамику. Кроме того она генерирует уникальную траекторию (а не ансамбль траекторий) в пространстве ее состояний, причем по ее состояниям на ретроспективном интервале любой протяженности нельзя надежно предсказывать ее состояния в будущем.

Математическая статистика предлагает вероятностную модель этой ситуации, в которой уникальная траектория (ее дискретный по времени вариант) постулируется как выборка из некой виртуальной совокупности, обладающей определенными свойствами, а именно, стационарностью и нормальностью. В этих предположениях можно строить оценки будущих состояний, оптимальные с точки зрения принятых критериев. Обычно ими являются среднеквадратичные отклонения или отношение правдоподобия. В рамках принятых гипотез о свойствах генеральной совокупности, полученные оценки могут быть снабжены определенным набором вероятностных признаков надежности: дисперсиями, доверительными интервалами и вероятностями, критерием значимости χ^2, и др.

Следует отметить, что сложность системы «население — экономика» и уникальность информации о ее эволюции исключает возможность проверки аксиоматических свойств стационарности и нормальности генеральной совокупности, и следовательно, ставит под сомнение возможность применения этих моделей.

Основная идея предлагаемого подхода состоит в генерировании с помощью модели реального (а не виртуального) ансамбля траекторий, которому в вероятностном смысле принадлежит уникальная траектория РЕ-системы. Эта идея реализуется посредством формирования математической модели РЕ-системы с жесткой (не изменяемой во времени) структурой и случайными параметрами с соответствующими функциями распределения вероятностей. Генерация ансамбля траекторий осуществляется с помощью метода Монте-Карло с использованием стандартных датчиков случайных чисел. Процедура генерации ансамбля траекторий содержит вероятностную демо-экономическую модель (PDEM), источник случайных чисел (SRN), накопитель траекторий модели (DB), вычислитель вероятностных характеристик (CPC). На выходе процедуры мы имеем вероятностные характеристики реального ансамбля траекторий: среднюю траекторию, дисперсионную трубку, динамические доверительные интервалы и др.

Поясним функционирование процесса. Следует отметить одно принципиальное отличие рассматриваемой вероятностной технологии от традиционных методов математической статистики и идентификации. Согласно последним производится оценка по ретроспективным данным средних значений параметров и затем вычислятся соответствующая им траектория на интервале прогноза. В предлагаемой технологии на интервале прогноза вычисляется средняя для ансамбля траектория, которая несет в себе информацию о нелинейном влиянии случайных параметров на траектории системы.

4. Энтропийная мера

Прежде чем перейти к проблемам демо-экономического моделирования, напомним некоторые исторические факты, связанные с понятием энтропии. Термин «энтропия» был впервые введен Р. Клаузиусом в 1865 г. в работе [3] для обозначения меры количества энергии в термодинамической системе как функции температуры и подводимого извне тепла. Он хотел подобрать слово, похожее на немецкое «energie» (английское «energy»), и нашел греческое «$\eta\tau\rho\pi\eta$», которое обозначает преобразование (см. [4]). Этот термин просуществовал как обозначение физического параметра до 1948 г., когда К. Шеннон предложил по совету Д. фон Неймана использовать понятие энтропии при определении количества информации. Важной находкой Шеннона были введенные им понятия неопределенности и информационной энтропии как ее меры. Понятие количества информации тесно связано с понятием энтропии. Приобретение информации сопровождается уменьшением неопределенности. Поэтому количество информации можно измерять количеством исчезнувшей неопределенности, т. е. энтропии.

Вообще говоря, следует заметить, что впервые связь между энтропией и распределением дискретной случайной величины была установлена Л. Больцманом в 1877 г. [5], а идея использования логарифмической меры информации принадлежит Р. Хартли [6].

Следуя [7] рассмотрим W равноправных возможностей. Например, при бросании правильной игральной кости $W = 6$, а при бросании правильной монеты $W = 2$. Следовательно, имеется *априорная* неопределенность, прямо связанная с величиной W: чем больше W, тем больше неопределенность. Мерой ее может служить энтропия

$$H = F(W), \tag{1}$$

где $F(W)$ — возрастающая неотрицательная функция. Перед бросанием кости $H = H_{pr}$.

После того как кость брошена и выяснено выпавшее число, возникает информация I. После этого уже никакой неопределенности нет: апостериорное количество возможностей $W = 1$, и этому значению должна соответствовать энтропия $H_{ps} = F(1) = 0$. Количество пришедшей информации естественно измерять количеством исчезнувшей неопределенности:

$$I = H_{pr} - H_{ps} = H_{pr}. \tag{2}$$

Для определения вида функции $F(W)$ (1) воспользуемся так называемым принципом аддитивности: энтропия нескольких несвязанных подсистем равна сумме энтропий каждой из них. Если в каждой из подсистем может быть реализовано w равноправные возможностей, то после n реализаций этих возможностей их энтропия

$$F(w^n) = F(W) = nF(w). \tag{3}$$

Поскольку $W = w^n$, то $n = (\ln W)/(\ln w)$, и из равенства (3) будем иметь:

$$F(W) = K \ln W, \tag{4}$$

где $K = F(w)/(\ln w)$ — положительная константа, не зависящая от W. Она связана с выбором единиц измерения энтропии и, следовательно, информации. Наиболее распространенные следующие три единицы:

1) при $K = 1$ энтропия будет измеряться в натуральных единицах (натах, natural digit) и энтропия

$$H_{\text{нат}} = \ln W; \tag{5}$$

2) при $(K = 1)/(\ln 2)$ энтропия будет измеряться в двоичных единицах

$$H_{\text{бит}} = \frac{1}{\ln 2} \ln W; \tag{6}$$

3) при $K = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/град (постоянная Больцмана) энтропия

$$H_{\text{физ}} = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \ln W. \tag{7}$$

Из сопоставления этих формул видно, что 1 *нат* больше 1 *бита* в $(1)/(\ln 2) = 1{,}44$ раза.

Здесь использовалось понятие возможностей, без обозначений природы из возникновения. Если интерпретировать возможность как реализацию некоторой случайной величины y, которая принимает одно их W значений с вероятностью $P(y) = 1/W$, $y = 1, \dots, W$, то энтропия (5) примет вид:

$$H_y = -\ln P(y). \tag{8}$$

Здесь существенным является то, что энтропия H является также случайной величиной, связанной со случайной величиной y равенством (8). Она принимает значения $-\ln P(1), \dots, -\ln P(W)$ с вероятностями $P(1), \dots, P(W)$. Часто бывает достаточным пользоваться не всем ансамблем реализаций случайной энтропии, а ее моментами, и, прежде всего, ее первым моментом — средней энтропией:

$$H = -\sum_{y} P(y) \ln P(y). \tag{9}$$

Это есть энтропия, определенная Л. Больцманом в 1877 г. для термодинамической системы и возрожденная К. Шенноном в 1948 г. как мера неопределенности информационного потока. Заметим, что равноправие возможностей или равновероятность реализаций случайной величины являются существенными предположениями в этом определении.

Важным продвижением в расширении возможностей использования энтропийной парадигмы явилось распространение понятия энтропии для неравновероятных реализаций случайной величины. Определение соответствующей энтропии вводилось разными авторами и с использованием разных гипотез, но результат при этом был один, а его интерпретации — различные. Одна из них связана с именами Кульбака и Ляйблера [8], которые ввели энтропию

$$H = -\sum_{y} P(y) \ln \frac{P(y)}{Q(y)} \tag{10}$$

в качестве *«расстояния»* между распределениями вероятности $P(y)$ и $Q(y)$.

Определение энтропии (10) совпадает с выражением, полученным в теории макросистем, но имеющим иной содержательный смысл [9]. Источником теории макросистем является статистическая физика, которая рассматривает системы, состоящие из большого количества Y неразличимых частиц со случайным поведением. Частицы могут оккупировать состояния-ячейки в множестве состояний, состоящем из конечного числа m подмножеств близких состояний с емкостями $G_1, \ldots, G_m$. В отличии от классической статистической физики в теории макросистем случайное поведение частиц на микроуровне может характеризоваться любым априорным распределением вероятностей $a = \{a_1, \ldots, a_m\}$ (аналогом распределения $Q(y)$ в выражении (10). Поскольку частиц много, на макроуровне имеет место эффект усреднения (перемешивания), в результате которого возникает некоторое распределения $N = \{N_1, \ldots, N_m\}$ количества частиц по подмножествам близких состояний, характеризующее макросостояние системы. Поскольку частицы имеет случайный тип поведения, то и макросостояния образуют случайный ансамбль конечного объема. Его свойства характеризуются функцией распределения вероятностей макросостояний или обобщенной информационной энтропией. Если заполняемость подмножеств близких состояний мала $(N_n \ll G_n)$, то соответствующая обобщенная информационная энтропия (Больцмана) имеет вид

$$H_B = -\sum_{n=1}^{m} N_n \ln \frac{N_n}{eG_n a_n}. \tag{11}$$

Нетрудно заметить, что после нормировки переменных в правой части этого выражения, оно становится формально аналогичным (10), но совершенной иным содержательным смыслом: энтропия макросистемы является усредненной характеристикой случайного поведения частиц.

Таким образом, появляется еще одна интерпретация понятия энтропии, а именно, *поведенческая*. При построении демо-экономических моделей она оказывается полезной, так как поведение индивидов является определяющим в процессах пространственно — временной эволюции населения и экономики.

5. Почему энтропия?

Попытаемся прокомментировать, если не ответить полностью на этот вопрос. Важным аспектом демографических и экономических процессов является их пространственная структура. Весьма значимыми компонентами в формировании таких структур являются миграция населения и экономический обмен.

Миграция населения происходит на некоторой территории, разделенной на регионы. Границы территории и определение региона могут быть различными. Например, территория — это Российская Федерация, а регионы — ее субъекты; или территория — Московская область, а регионы — города в ней. Миграция как известно делится на трудовую и стационарную. Первая не предполагает смену места жительства, а вторая, напротив, связана в первую очередь со сменой места жительства, и именно этот тип миграции играет существенную роль в формировании пространственной структуры населения. Мотивационное пространство стационарной миграции весьма обширно, оно содержит различные факторы экономического, культурологического, экологического, религиозного и др. характера. Причем его полнота, с точки зрения включения в него всех факторов, всегда оказывается предметом дискуссий.

Важным обстоятельством в миграционном процессе является мотивация каждого потенциального мигранта. Разумеется она индивидуальна, и одна из ветвей демографической науки как раз изучает индивидуальные миграционные мотивации с целью выявления более или менее общих закономерностей. Многочисленные миграционные акты образуют поток, который в течении определенного интервала времени оказывается стационарным.

Для моделирования этого локально-стационарного миграционного потока продуктивной является гипотеза о случайном поведении потенциальных мигрантов, т. е. случайным считается решение о смене одного региона проживания на другой[2]. Эта гипотеза имеет под собой определенные основания. Одно из них связано с повторяемостью миграционных решений, реализованных при более или менее одинаковых внешних условиях, но в различных регионах и в различные временные периоды. Другими словами, имеет место тенденция к стабилизации частоты возникновения указанных событий.

Однако случайный характер миграционных решений не означает, что они равновероятны по отношению к различным пространственным единицам — регионам. Напротив, поскольку регионы-источники и регионы-стоки для миграционных потоков имеют разный статус, то и индивидуальные миграционные решения, связанные с ними, имеют разные априорные вероятностные характеристики. Многочисленные реализации этих индивидуальных миграционных решений приводят локально-стационарному распределению миграционных потоков, усредненной характеристикой которого является энтропия. Тем самым, энтропия связывает показатели индивидуального поведения, а именно априорные вероятности миграционных решений, с показателями коллективного поведения миграционной системы — распределением миграционных потоков.

Априорные вероятности как количественные характеристики индивидуального миграционного поведения зависят от факторов, имеющих различную природу, но прежде всего, от экономических факторов. Поэтому априорные вероятности в энтропийной концепции играют еще роль параметров, посредством которых осуществляется связь демографических и экономических процессов.

Экономический обмен является одним из основных процессов в пространственно-распределенной экономической системе. Его исторические истоки восходят к тому периоду развития человечества, когда произошло разделение труда как по видам деятельности, так и по их пространственному распределению. Производственный объект в экономической системе использует сырье, энергию и внешние продукты и с помощью живого труда воспроизводит на производственных мощностях и технологиях собственный продукт. Все внешние компоненты производственной деятельности размещены как-то в пространстве, и поэтому их нужно доставить в объект, используя транспортные коммуникации. Здесь картина абсолютно симметрична по отношению к другим производственным объектам в том смысле, что они используют

[2] В частности, гипотеза о случайном характере миграционного процесса используется в работах В. Вайдлиха [10].

продукт данного объекта для своего производства. Следовательно, производитель собственного продукта является потребителем продуктов других производителей. В общей модели экономического обмена производитель и потребитель трактуются расширительно: в эти категории участников входят производители услуг и население.

Рассмотрим простейший однопродуктовый обмен. Без ограничения общности можно считать, что циркулирующий в системе продукт квантован, и его количества — это количества порций. В рыночной экономике пара «производитель-потребитель» образуется случайным образом, но с учетом различных априорных факторов. Это означает, что каждая порция продукта будет «принадлежать» какой-то паре с некоторой априорной вероятностью, которая в определенном смысле регламентирует «индивидуальное поведение» порции продукта. В результате многочисленных событий случайного распределения порций по парам «производитель-потребитель» образуется стационарное распределение количеств продукта по совокупности пар, усредненной характеристикой которого служит энтропия.

6. Структура модели

Энтропийная демо-экономическая модель (EDEM) ориентирована на демографический анализ и прогнозирование развития населения и экономики. Эта цель, как уже отмечалось, достигается путем моделирования системы «население-экономика» (PE-системы).

EDEM состоит из трех блоков: POPULATION, ECONOMY и INTERACTION. Структура модели показана на рис. 2. Блок POPULATION моделирует пространственную динамику поло-возрастной структуры населения, которая есть результат процессов биологического воспроизводства (BR) и миграции (M).

Биологическое воспроизводство населения определяется соотношением процессов рождаемости и смертности. Эти процессы имеют собственную инерцию и весьма сложную природу причинно-следственных связей. Кроме того на эти процессы оказывают значительное влияние государственные программы поддержки или ограничения рождаемости, развития здравоохранения и профилактических мероприятий, пропаганда определенного стиля жизни и др. Здесь будут рассматриваться внешние и внутренние факторы, влияющие на эти процессы, которые удается оценивать количественно в экономических терминах.

Миграция населения связана с его перемещениями в некотором пространстве. Это пространство представляется набором пространственных единиц, и рассматривается два типа миграционных процессов: внутренняя миграция, происходящая внутри рассматриваемого пространства между

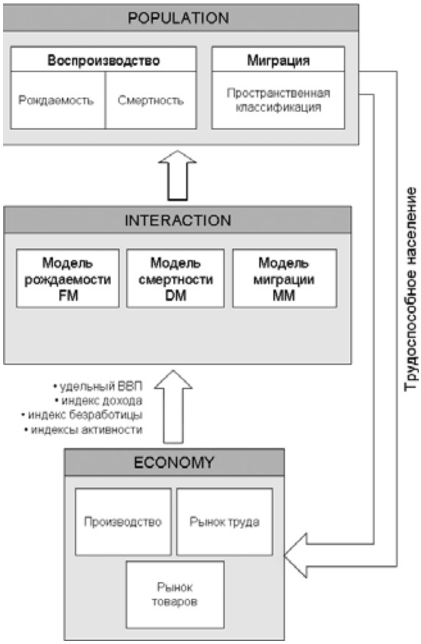

Рис. 2

его пространственными единицами, и внешняя миграция, происходящая между пространственными единицами рассматриваемого пространства и внешней средой, однородной (одна пространственная единица) или неоднородной (совокупность пространственных единиц). Важным вопросом является миграционная мотивация населения. В данной модели предполагается, что она связана с экономическим статусом пространственной единицы и общим системным статусом пространства, на котором происходит миграция. Здесь имеются ввиду неэкономические факторы, такие как, религиозная и национальная нетерпимость, военные конфликты, экстремальные традиции и др.

Блок ECONOMY моделирует пространственную динамику M-секторной экономики. Он включает динамические модели производства (PD) и рынка труда (LM), и модель рынка товаров (CM). Производство описывается в терминах производственных функций, учитывающих технологический уровень производства, характеристик занятости и безработицы, рентабельности, цен, амортизации и обновления производственных мощностей. Рынки товаров и труда, как основные элементы рыночной экономики, являются элементами ценообразования и рентабельного распределения трудовых ресурсов. Блок ECONOMY использует информацию о поло-возрастной структуре трудоспособного населения и преобразует ее в показатели экономического статуса рассматриваемого пространства, которые влияют на параметры блока POPULATION.

Это влияние реализуется через блок INTERACTION. Он состоит из вспомогательных моделей рождаемости (FM), смертности (DM) и миграции (MM). В этих моделях соответствующие наборы экономических факторов преобразуются в параметры рождаемости, смертности и миграционной мобильности блока POPULATION. Факторы экономического статуса генерируются в блоке ECONOMY.

7. Подсистема “POPULATION”

7.1. Классификация населения

Для моделирования и исследования динамики населения будем представлять его совокупностью групп, формируемых по следующим индикаторам:

- пространственная локализация $\mathbb{S}$,
- отраслевая принадлежность $\mathbb{B}$,
- пол $\mathbb{G}$,
- возраст $\mathbb{A}$,
- пространственный статус мигранта (внутренний, внешний) $\mathbb{LSM}$,
- мотивация к миграции $\mathbb{MM}$.

1. Пространственная характеризация группы ориентирована региональный уровень, т. е. каждая группа снабжается региональным индексом n, который изменяется от 1 до N_{int} для внутреннего пространства, и от $N_{int}+1$ до $N_{int}+N_{ext}$ для внешнего пространства системы $\mathbb{S}$. В принципе есть возможность привлечения районной декомпозиции, если имеется соответствующая информационная база.
2. Экономика рассматривается состоящей из M отраслей-секторов. Соответственно в подсистеме “POPULATION” выделяются M групп населения по отраслевому признаку ($\mathbb{B}\rightarrow k=1,\ldots,M$).
3. Для поло-возрастной группировки населения вводятся индексы пола ($\mathbb{G}=M$ для мужчин и $\mathbb{G}=F$ для женщин) и индекс возраста ($\mathbb{A}\rightarrow$ a $=0,\ldots,A$). Возрастные группы формируются с интервалом в 1 год. Группа $a=0$ включает новорожденных в возрасте от нуля до возраста в один год минус один день, группа $a=1$ включает людей в возрасте от одного года до двух лет минус один день, и т. д. Последняя группа $a=A$ включает всех людей в возрасте A лет и выше.

4. Нулевая возрастная группа играет важную роль в общем воспроизводстве населения, и ее пополнение осуществляется женской частью населения, причем не всей, а той, которая находится в интервале $FI = [a_-, a_+]$ фертильных возрастов. Здесь мы принимаем биологический интервал FI, где $a_- = 12$, $a_+ = 45$.
5. Миграционные процессы оказывают значительное влияние на динамику населения. Мы будем различать внутреннюю миграцию ($\mathbb{LSM} = In$) и внешнюю миграцию ($\mathbb{LSM} = Ex$). Важной характеристикой миграции является тип ее мотивации. Если внутренняя миграция обычно более однородна по типу мотивации, то внешняя существенно неоднородна. Мы будем выделять два типа миграционной мотивации и соответственно две группы мигрантов по данному признаку:
   - «нормальные», т. е. те, мотивация которых в основном связана с экономическими факторами ($\mathbb{MM} = NR$);
   - «прочие», т. е. те, мотивация которых не связана с экономическими факторами ($\mathbb{MM} = DF$).

7.2. Координаты состояния

Процесс временной эволюции населения на пространстве $\mathbb{S}$ описывается в терминах характеристик групп населения, формируемых по указанным в предыдущем параграфе признакам. Будем различать следующие *группы состояния*:

$$\mathbb{GSS} = \{\mathbb{S}, \mathbb{B}, \mathbb{G}, \mathbb{A}\}. \tag{12}$$

Группы состояния характеризуются численностью (объемом) в момент времени t. Следуя правилу (12), обозначим $K_k(n, M, a, t)$, $K_k(n, F, a, t)$ — численности групп мужского и женского населения в отрасли k, возраста a, локализованного в регионе n в момент времени t. Тогда состояние мужской и женской части населения характеризуется соответствующими распределениями по возрасту:

- для мужской части населения

$$K_k^M(n, t) = \{K_k(n, M, 0, t), \dots, K_k(n, M, A, t)\}; \tag{13}$$

- для женской части

$$\begin{aligned} K_k^F(n, t) = \{&K_k(n, F, 0, t), \dots, K_k(n, F, a_-, t), \dots, \\ &K_k(n, F, a_+, t), \dots, K_k(n, F, A, t)\}. \end{aligned} \tag{14}$$

Здесь специально выделен интервал фертильности $FI = [a_-, a_+]$.

Таким образом, состояние населения отрасли k в пространстве $\mathbb{S}$ в момент времени t характеризуется вектором

$$K_k(n,t) = \begin{pmatrix} K_k^M(n,t) \\ K_k^F(n,t) \end{pmatrix}, \tag{15}$$

$$n = 1,\ldots,N_{int}; \quad t = 0,1,2,\ldots; \tag{16}$$

$$k = 1,\ldots,M. \tag{17}$$

Рассмотрим теперь группы состояния для внешнего пространства. В описание этих групп не входит признак $\mathbb{LSM}$, так как для всех членов группы $\mathbb{LSM} = \boldsymbol{Ex}$. По сравнению с группами состояния для системного пространства, в рассматриваемые группы входит признак $\mathbb{MM}$, равный $\boldsymbol{NR}$ (экономическая мотивация) или $\boldsymbol{DF}$ (неэкономическая мотивация).

Тогда состояние мужской и женской части населения с учетом отраслевого признака, локализованного в регионе n внешнего пространства, характеризуется соответствующими распределениями:

- для мужской части населения

$$E_k^M(n,\mathbb{MM},t) = \{E_k(n,M,0,\mathbb{MM},t),\ldots,E_k(n,M,A,\mathbb{MM},t)\}; \tag{18}$$

- для женской части

$$E_k^F(n,\mathbb{MM},t) = \{E_k(n,F,0,\mathbb{MM},t),\ldots,E_k(n,F,A,\mathbb{MM},t)\}, \tag{19}$$

где $\mathbb{MM} = \boldsymbol{NR}$ или $\mathbb{MM} = \boldsymbol{DF}$.

Таким образом, состояние населения в пространстве метасистемы $\mathbb{E}$ в момент времени t характеризуется вектором

$$\begin{gathered} E_k(n,\mathbb{MM},t) = \begin{pmatrix} E_k^M(n,\mathbb{MM},t) \\ E_k^F(n,\mathbb{MM},t) \end{pmatrix}, \\ n = N_{int}+1,\ldots,N; \quad N = N_{int}+N_{ext}; \quad t = 0,1,2,\ldots; \\ \mathbb{MM} = \boldsymbol{NR},\boldsymbol{DF}. \end{gathered} \tag{20}$$

7.3. Воспроизводство населения

Под биологическим воспроизводством понимается процесс, состоящий из последовательно происходящих во времени этапов рождения, старения и смерти.

Первый этап этого процесса — деторождение — реализуется женской частью населения, причем не всей, а только теми возрастными группами, которые принадлежит интервалу фертильности $\boldsymbol{FI}$. Предполагается, что численность новорожденных *пропорциональна* численности женщин в соответствующей возрастной группе. Коэффициент пропорциональности будем называть *индексом рождаемости* $b(n,a,t)$. Его величина есть количество новорожденных на одну женщину, отнесенное к одному году. Здесь возраст $a \in FI$.

В последнем этапе биологического воспроизводства участвуют мужская и женская части населения. При этом так же, как и для первого этапа, здесь предполагается, что количество умерших *пропорционально* численности соответствующей возрастной группы. Коэффициент пропорциональности $d^M(n,a,t)$ и $d^F(n,a,t)$ — *индекс смертности* для мужчин и женщин — есть удельное количество умерших в течении одного года.

Рассмотрим этап старения. Поскольку шаг дискретного времени равен шагу возрастной шкалы, то процесс старения есть так называемая «передвижка возрастов», т. е. за время $h = 1$ год население возрастной группы a перейдет в возрастную группу $a + 1$, за исключением умерших в группе a в течении года.

Эти этапы процесса воспроизводства можно описать с помощью блочной матрицы передвижки для соответствующего региона и отрасли:

$$G_k(n,\ t) \ = \begin{pmatrix} G_k^{M,M}(n,\ t) & G_k^{M,F}(n,\ t) \\ 0 & G_k^{F,F}(n,\ t) \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Все блоки этой матрицы имеют размер $(A+1) \times (A+1)$. Матрица $G_k^{M,M}(n,t)$ характеризует передвижку возрастных групп мужского населения, вызванную старением и смертностью:

$$G_k^{M,M}(n,t) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 - d_k^M(n,0,t) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 - d_k^M(n,A-1,t) & 0 \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Матрица $G_k^{M,F}(n,t)$ характеризует вклад женской части населения в пополнение мужской части населения:

$$G_k^{M,F}(n,t) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \zeta b_k(n,a_-,t) & \cdots & \zeta b_k(n,a_+,t) & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Матрица $G_k^{F,F}(n,t)$ характеризует деторождение, передвижку возрастов и смертность в женской части населения:

$$G_k^{F,F}(n,t) =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \zeta_1 b_k(n,a_-,t) & \cdots & \zeta_1 b_k(n,a_+,t) & \cdots & 0 \\ 1-d_k^F(n,0,t) & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1-d_k^F(n,a_{A-1}) & 0 \end{pmatrix}. \tag{24}$$

В эти матрицы входит параметр ζ и $\zeta_1 = 1-\zeta$, который характеризует долю мальчиков и девочек среди новорожденных. Обычно предполагается, что $\zeta = 0{,}5$.

7.4. Миграция

Миграционные потоки и сальдо миграции. Миграционная компонента эволюции населения описывается в терминах потоков (количество мигрантов в год) с учетом их пространственного статуса $\mathbb{LSM}$ и миграционной мотивации $\mathbb{MM}$.

Обозначим $x_k(i,n,\mathbb{G},a,\mathbb{LSM},\mathbb{MM},t)$ — поток мигрантов k-й отрасли из региона i и регион n, пола $\mathbb{G}$, возраста a, пространственного статуса $\mathbb{LSM}$, с мотивацией $\mathbb{MM}$ в момент времени t.

Рассмотрим миграционные потоки в системном пространстве $\mathbb{S}$, т. е. $i,n = 1,\ldots,N_{int},N_{int}+1,\ldots,N_{ext}$. В этом случае $\mathbb{LSM} = In$ для миграции во внутренней части системного пространства и $\mathbb{LSM} = Ex$ для внешней его части. Внутренняя миграция, как правило, мотивирована экономическим факторами, тогда как во внешней иммиграции присутствуют как экономические, так и неэкономические причины. Кроме того, предполагается, что эмиграция из внутренней во внешнюю части системного пространства отсутствует и отраслевая структура внешней иммиграции отсутствует.

Согласно сделанным обозначениям сальдо внутренней миграции с экономической мотивацией для региона n внутренней части системного пространства в момент времени t имеет вид:

$$S_k(n,\mathbb{G},a,In,NR,t) =$$
$$= \sum_{i=1}^{N_{int}} x_k(i,n,\mathbb{G},a,In,NR,t) - \sum_{i=1}^{N_{int}} x_k(n,i,\mathbb{G},a,In,NR,t). \tag{25}$$

Аналогичное выражение для иммиграции в регион n системного пространства из внешнего пространства можно представить в следующем виде:

$$M(n, \mathbb{G}, a, Ex, \mathbb{MM}, t) = \sum_{i=N_{int}+1}^{N_{int}+N_{ext}} x(i, n, \mathbb{G}, a, Ex, \mathbb{MM}, t). \qquad (26)$$

Суммарное сальдо миграции для региона n внутренней части системного пространства имеет вид:

$$\begin{aligned} S_k(n, \mathbb{G}, a, t) = S_k(n, \mathbb{G}, a, In, NR, t) + \varrho_k M(n, \mathbb{G}, a, Ex, NR, t) + \\ + \widetilde{\varrho}_k M(n, \mathbb{G}, a, Ex, DF, t), \end{aligned} \qquad (27)$$

где ϱ_k, $\widetilde{\varrho}_k$ — коэффициенты, характеризующие доли соответствующих групп мигрантов, попадающих в k-ую отрасль.

Образуем вектора

$$\begin{aligned} S_k^M(n, t) &= \{S_k(n, M, 0, t), \dots, S_k(n, M, A, t)\}, \\ S_k^F(n, t) &= \{S_k(n, F, 0, t), \dots, S_k(n, F, A, t)\}, \end{aligned} \qquad (28)$$

которые характеризуют распределение суммарного сальдо миграции k-отрасли, мужской и женской частей населения по возрасту, в регионе n внутренней части системного пространства $\mathbb{S}$, в момент времени t.

Таким образом состояние миграционного процесса в k-й отрасли, для внутренней части системного пространства $\mathbb{S}$ в момент времени t характеризуется вектором:

$$S_k(n, t) = \begin{pmatrix} S_k^M(n, t) \\ S_k^F(n, t) \end{pmatrix} \quad n = 1, \dots, N_{int}. \qquad (29)$$

7.5. Энтропийная модель миграционных потоков

Сальдо миграции для соответствующего региона, как баланс между въездом и выездом, выражается через миграционные потоки, которые не входят в состав координат состояния подсистемы “POPULATION”. Координатами состояния для каждого региона данной подсистемы являются численности группы население, сформированной по полу, возрасту и стандарту воспроизводства. Тем самым, необходимо установить связь между миграционными потоками $x_k(n, i, \mathbf{G}, t)$ и компонентами векторов координат состояния $K_k(1, t), \dots, K_k(N_{int}, t)$ (15). В аргументе потока присутствует атрибута $\mathbf{G} = \{\mathbb{G}, a, \mathbb{LSM}, \mathbb{MM}\}$, $(a \in \mathbb{A})$, характеризующая соответствующую группу населения.

В основе большинства существующих методов моделирования лежат определенные гипотезы о том, *как* формируется миграционный поток.

Исключение, пожалуй, составляют методы классической демографии, использующие формальные подходы математической статистики, а именно, регрессию. Иными словами, постулируется какой-либо вид связи, чаще всего линейный, с неизвестными параметрами, которые оцениваются по ретроспективным данным. Тем самым восстанавливается только статистическая связь между потоками и численностью и, к тому же, по прошлым событиям. При этом механизм формирования миграционного потока остается неизвестным, что, в сочетании с использованием ретроспективных данных, существенно ограничивает возможности применения регрессионных зависимостей для целей прогнозирования.

Поскольку нас интересует динамика системы «население-экономика», то необходимо как-то моделировать механизмы формирования миграционных потоков, привлекая дополнительные гипотезы.

Наиболее распространенная из них — *стохастическая*. Предполагается, что потенциальный мигрант, являющийся резидентом региона i, выбирает регион въезда n случайным образом, не зависимо от других потенциальных мигрантов. При этом имеется в виду, что «выбор» — случайный, но не «чисто случайный». Он регулируется априорными сведениями об общем характере процесса выбора, о мотивации мигранта, о состоянии метасистемы. Агрегированным индикатором этих сведений является априорная вероятность $P_k(i, n, \mathbf{G}, t)$, которая зависит от k-й отраслевой группы, регионов выезда i и въезда n, пола, а также от показателей их состояния $K_k(i, t)$ и $K_k(n, t)$ и экономических факторов.

Будем предполагать, что отраслевая группировка экономики и населения агрегирована настолько, что межгрупповая миграция отсутствует.

Распределение миграционных потоков внутри k-й отрасли характеризуется соответствующей матрицей, размерность которой равна $N \times N$, где $N = N_{int} + N_{ext}$. Представим ее в виде четырех блоков:

- распределение миграционных потоков во внутренней части системного пространства $\mathbb{S}$

$$X_k^{int}(\mathbb{G}, t) = [x_k(i, n, \mathbb{G}, t) | i,\ n = 1, \dots, N_{int}]. \tag{30}$$

- распределение эмиграционных потоков из внутренней части системного $\mathbb{S}$ во внешнее пространство

$$X_k^{int,ext}(\mathbb{G}, t) = [x_k(i, n, \mathbb{G}, t) | i = 1, \dots, N_{int};\ n = N_{int} + 1, \dots, N]. \tag{31}$$

- распределение эмиграционных потоков из внешнего части во внутреннюю системного пространства $\mathbb{S}$

$$X_k^{ext,int}(\mathbb{G}, t) = [x_k(i, n, \mathbb{G}, t) | i = N_{int} + 1, \dots, N; n = 1, \dots, N_{int}]. \tag{32}$$

- распределение миграционных потоков во внешнем части системного пространства

$$X_k^{ext}(\mathbb{G}, t) = [x_k(i, n, \mathbb{G}, t)|i,\ n = N_{int} + 1, \dots, N]. \tag{33}$$

В рамках данной модели предполагается, что эмиграция из системного во внешнее пространство отсутствует, т. е. $X_k^{int,ext} = 0,\ k = 1, \dots, M$. Миграционные потоки во внешнем пространстве находятся за пределами данной модели.

Поэтому миграционные потоки, влияющие на пространственно-временную эволюцию населения, характеризуются следующей блочной матрицей:

$$X_k(\mathbb{G}, t) = \begin{pmatrix} X_k^{int}(\mathbb{G}, t) \\ X_k^{ext,int}(\mathbb{G}, t) \end{pmatrix}. \tag{34}$$

Заметим, что выражение (34) для каждой k-й группы определяет семейство из 9 матриц, характеризующих распределение миграционных потоков для следующих групп $\mathbb{G}$ населения:

$$\begin{gathered} \{M, a, In, NR\}\{M, a, Ex, NR\}\{M, a, Ex, DF\}, \\ \{F, a, In, NR\}\{F, a, Ex, NR\}\{F, a, Ex, DF\}. \end{gathered} \tag{35}$$

В соответствии с гипотезой о случайной природе миграционных потоков, их распределение $X_k(\mathbb{G}, t)$ так же случайно. Для него может быть выписана соответствующая энтропия [11]:

$$H(X_k(\mathbb{G}), K_k(t), t) = -\sum_{i,n} x_k(i, n, \mathbb{G}, t) \ln \frac{x_k(i, n, \mathbb{G}, t)}{eP_k(n, i, \mathbb{G}, t)}, \tag{36}$$

где $e = 2{,}73$.

В данной модели миграция рассматривается как процесс, сопровождаемый расходованием некоторых ресурсов. Поэтому в качестве априорной присутствует информация о запасах этих ресурсов и о расходовании их на реализацию миграционного процесса. В самой общей ситуации запас каждого вида ресурса зависит от численности групп населения по всему системному пространству $\mathbb{S}$, т. е. блочным вектором $K_k(t) = \{K_k(1, t), \dots, K_k(N, t)\}$, где $N = N_{int} + N_{ext}$. Следовательно, запасы $Q_k^s(t) = Q_k^s(K_k(t), t),\ \ s = 1, \dots, r$.

Расход ресурсов определяется потоком; однако, параметры его связи с потоком могут зависеть от распределения $K_k(t)$. Для характеризации процесса расходования ресурсов введем функции потребления

$$\Phi_k(X(\mathbb{G}, t), K(t), t) = \left\{\Phi_k^1(X_k(\mathbb{G}, t), K_k(t), t), \dots, \Phi_k^r(X_k(\mathbb{G}, t), K_k(t), t)\right\}.$$

Заметим, что запасы и функции потребления могут изменяться с течением времени в силу каких-то внешних причин.

Между запасами и функциями потребления существуют очевидные балансовые соотношения:

$$\Phi_k^s(X_k(\mathbb{G}, t), K_k(t), t) \leqslant Q_k^s(K(t), t), \quad s = 1, \dots, r. \tag{37}$$

Эта система неравенств выделяет некоторое множество в пространстве $\mathbb{R}_+^{N^2}$, которое будем называть *ресурсным множеством*

$$\mathcal{D}_k(K_k(t), \mathbb{G}, t) = \big\{x_k(i, n, \mathbb{G}, t) : \Phi_k^s(X(\mathbb{G}, t), K_k(t), t) \leqslant Q_k^s(K(t), t),$$
$$x_k(i, n, \mathbb{G}, t) \geqslant 0, \quad s = 1, \dots, r; \quad i, n = 1, \dots, N\big\}. \tag{38}$$

Предполагается, что реализуемое локально-стационарное распределение миграционных потоков соответствует максимуму энтропии H (36) на множестве $\mathcal{D}_k$ (7.5), т. е.

$$X_k^*(\mathbb{G}, K_k(t), t) = \arg\ \max\big(H(X_k(\mathbb{G}), K_k(t), t) | X_k(\mathbb{G}, t) \in \mathcal{D}_k(K_k(t), t)\big). \tag{39}$$

Из этого выражения следует, что энтропийно-оптимальное распределение миграционных потоков зависит от распределения $K_k(t)$ численностей групп *по всему системному пространству* $\mathbb{S}$ и экономических факторов через априорные вероятности $P_k(i, n)$.

Существенным является формирование распределения энтропийно-оптимальных миграционных потоков по возрасту мигрантов. Если предположить, что мигранты не сильно искажают возрастное распределение в регионе въезда, то пронормировав это распределение и умножив его на соответствующий миграционный поток, получим его распределение по возрасту. Если такое предположение неверное, и мигранты существенно изменяют возрастное распределение в регионе въезда, то формирование возрастных распределений миграционных потоков представляет отдельную и непростую задачу.

7.6. Основное уравнение динамики населения

Пространственно-временная динамика населения представляет собой весьма сложный процесс. Для формирования математической модели этого процесса необходимо сделать некоторые предположения о его свойствах.

- Уровень агрегации отраслевых групп таков, что переходы между ними отсутствуют.
- Состояние процесса эволюции населения в момент времени t полностью определяет его состояние в момент времени $t+h$, где $h > \varepsilon \geqslant 0$, т. е. имеет место *марковское свойство*.

- Процесс эволюции населения имеет две компоненты — биологическую (воспроизводство) $R_k(n,t)$ и механическую (миграция) $S_k(n,t)$. Обе компоненты зависят от распределения численности групп населения, т. е. $R_k(n,t) = R_k(n, K_k(1,t), \dots, K_k(N,t))$ и $S_k(n,t) = S_k(n, K_k(1,t), \dots, K_k(N,t))$. Тогда марковское свойство процесса эволюции население моделируется следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{dK_k(n,t)}{dt} = \mathcal{L}_k\big[R_k(n, K(t)), S_k(n, K(t))\big], \quad n = 1, \dots, N, \tag{40}$$

где $\mathcal{L}_k$ — вектор-функция, характеризующая темп изменения численности в отраслевой группе k. Обычно предполагается, что эта функция — линейна по переменным R_k и S_k. Тогда система (40) принимает вид

$$\frac{dK_k(n,t)}{dt} = R_k(n, K_k(t)) + S_k(n, K_k(t)), \quad n = 1, \dots, N. \tag{41}$$

- Вектор $K_k(t)$, характеризующий состояние населения, должен иметь неотрицательные координаты, т. е. для $K(0) > 0$, $K(t) \geqslant 0$, $t > 0$.

Отсюда следует, что для всех $n = 1, \dots, N$ должны выполняться следующие условия:

$$\begin{aligned} R_k\big(n, K_k(1,t), \dots, K_k(n-1,t), 0, K_k(n+1,t), \dots, K_k(N,t)\big) = 0,\\ S_k\big(n, K_k(1,t), \dots, K_k(n-1,t), 0, K_k(n+1,t), \dots, K_k(N,t)\big) = 0. \end{aligned} \tag{42}$$

Одна из возможных классов функций R_k и S_k имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} R_k(n, K_k) = f_k(n, K_k(n,t))\widetilde{R}_k(n, K_k),\\ S_k(n, K_k) = \psi_k(n, K_k(n,t))\widetilde{S}_k(n, K_k), \end{aligned} \tag{43}$$

где $f_k(n,0) = \psi_k(n,0) = 0$ и $\widetilde{R}_k(n, K_k) \neq \pm\infty$, $\widetilde{S}_k(n, K_k) \neq \pm\infty$. Простейшими в этом классе являются функции

$$f_k(n, K_k(n,t)) = F_k^n K_k(n,t), \quad \psi_k(n, K_k(n,t)) = \Psi_k^n K_k(n,t), \tag{44}$$

где F_k^n и Ψ_k^n — диагональные матрицы размером $(2A \times 2A)$.

Введем вектор

$$K_k^{-1}(n,t) = \big\{K_k^{-1}(1,t), \dots, K_k^{-1}(N,t)\big\}.$$

Тогда уравнения (41) можно представить в виде:

$$\begin{gathered} K_k^{-1}(n,t) \otimes \frac{dK_k(n,t)}{dt} = F_k^n \widetilde{R}_k(n, K_k(t)) + \Psi_k^n \widetilde{S}_k(n, K_k(t)),\\ n = 1, \dots, N. \end{gathered} \tag{45}$$

В левой части уравнений этой системы присутствуют компоненты вектора $K(n,t)$ следующего вида

$$K_k^{-1}(n,a,\mathbb{G},t)\frac{dK_k(n,a,\mathbb{G},t)}{dt}=\frac{d\ln K_k(n,a,\mathbb{G},t)}{dt}. \qquad (46)$$

Эти выражения характеризуют относительную скорость изменения численности соответствующих групп населения или абсолютную скорость изменения логарифма численности. Пока численность не велика, а точнее, ее отклонение от начального значения, абсолютная скорость изменения логарифма численности и абсолютная скорость изменения численности сопоставимы. Но как только отклонение начинает увеличиваться различие между этими двумя показателями растет.

Поэтому традиционные модели динамики населения можно использовать только при малых отклонениях от начальных состояний. Возможно этим объясняются существенные ошибки прогнозирования на больших временных горизонтах.

Итак, *энтропийная модель динамики населения* описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{gathered}
K_k^{-1}(n,t)\otimes\frac{dK_k(n,t)}{dt}=F_k^n\widetilde{R}_k\big(n,K_k(t)\big)+\Psi_k^n\widetilde{S}_k\big(n,K_k(t)\big),\\
n=1,\dots,N,\\
S_k\big(n,K_k(t)\big)=S_k\big(n,X_k^*(K_k(t),t)\big),\\
X_k^*\big(K_k(t),t\big)=\arg\ \max\big(H(X_k(t),K_k(t),t)|X_k(t)\in\mathcal{D}_k(K_k(t),t)\big),\\
\mathcal{D}_k\big(K_k(t),t\big)=\Big\{x_k(i,n,t):\Phi_k^s\big(X_k(t),K_k(t),t\big)\leqslant Q_k^s\big(K_k(t),t\big),\\
x_k(i,n,t)\geqslant 0,\ s=1,\dots,r;\ i,n=1,\dots,N;\ k=1,\dots,M\Big\}.
\end{gathered} \qquad (47)$$

Из этих уравнений видно, что данная модель состоит из двух блоков: нелинейного дифференциального уравнения (47) и энтропийного оператора (47), который описывается параметрической задачей математического программирования. Правая часть дифференциального уравнения (47) и допустимое множество в (47) содержат функции достаточно общего вида.

Здесь будет рассматриваться версия общей модели, в которой правая часть дифференциального уравнения (47) содержит линейные по переменной K_k функции и допустимое множество в (47) задано системой линейных равенств. Для того чтобы выделить такую версию модели среди прочих, будем называть ее *энтропийная модель динамики населения с линейным воспроизводством*. Подставляя переменные, введенные в п. 6.3, 6.4, получим:

$$K_k^{-1}(n,t)\otimes\frac{dK_k(n,t)}{dt}=G_k(n,t)K_k(n,t)+S_k(n,K_k(t)),$$
$$n=1,\ldots,N, \qquad (48)$$
$$S_k(n,K_k(t))=S_k(n,u_k^*(K_k(t),t)),$$

$$u_k^*(K_k(t),t)=\arg\ \max\Big(H(u_k(t),K_k(t),t)|u_k(t)\in\mathcal{D}_k(K_k(t),t)\Big),$$
$$\mathcal{D}_k(K_k(t),t)=\Big\{u_k(m,t):\sum_m t_{sm}u_k(m,t)=Q_k^s(K_k(t),t),\ u_k(mt)\geqslant 0,$$
$$t_{sm}\geqslant 0,\ s=1,\ldots,r;\ m=1,\ldots,N^2;\ k=1,\ldots,M\Big\}. \qquad (49)$$

В этих уравнениях матрица миграционных потоков X развернута в вектор u.

Следует заметить, что в данной модели предполагается независимость отраслевых групп населения, т. е. отсутствие переходов между ними. Это предположение не принципиальное, а исключительно техническое. Если его снять, то в правой части первого уравнения в (47) появится еще один член, характеризующий поток межгрупповых переходов.

8. Подсистема “ECONOMY”

Исследованию феноменологии экономических процессов и их моделированию посвящено огромное количество работ. Обзор их и анализ не является задачей данной работы. Здесь мы будем использовать довольно простое представление механизма экономической деятельности. Его ядром является производство, где вспомогательные продукты и живой труд с использованием средств производства преобразуются в новый продукт. Вспомогательные продукты и носители живого труда поступают в производственный процесс в результате функционирования соответствующих рынков — труда и товаров. Особенностью данного механизма экономической деятельности является его пространственная распределенность и взаимодействие пространственно распределенных единиц через обмен ресурсами (продуктами).

8.1. Производство

Рассматривается экономика, состоящая из M отраслей, размещенных в N_{int} регионах внутренней части системного пространства. Каждая

k-ая отрасль в n-м регионе состоит из производственных единиц, с определенными технологическими уровнями. Здесь мы будем использовать феноменологию отрасли, предложенную А. А. Петровым и И. Г. Поспеловым [12]. Производственной единицей называется экономический объект, выпускающий единицу продукта, используя определенную технологию. Ее уровень определяется количеством живого труда (количеством работающих $\lambda_k(n,t)$), необходимого для производства единицы продукта. Отрасль характеризуется распределением $m_k(n,\lambda_k(n,t),t)$ количества производственных единиц данной отрасли k в регионе n по технологическим уровням $\lambda_k(n,t) \in [\lambda_{k,min}(n,t), \lambda_{k,\max}(n,t)]$. Это распределение в общем случае может меняться во времени t.

Под производственной мощностью отрасли понимается общее количество производственных единиц, которое определяется через распределение $m_k(n,\lambda_k(n,t),t)$ следующим выражением:

$$M_k(n,t) = \int\limits_{\lambda_{k,min}(n,t)}^{\lambda_{k,max}(n,t)} m_k(n,\lambda,t)\,d\lambda. \tag{50}$$

Введем функцию технологической структуры отрасли в виде:

$$\psi_k(n,\lambda_k(n,t),t) = \frac{m_k(n,\lambda_k(n,t),t)}{M_k(n,t)}. \tag{51}$$

В рыночной экономической системе функционируют только те производственные единицы, которые рентабельны. Граница рентабельности определяется равенством доходов и расходов. В простейшем представлении это условие в расчете на единицу продукции имеет вид:

$$p_k(n,t) - \sum_{i\neq k}^{M} a_{ik}p_i(n,t) - p_k^T \sum_{i=1}^{M} f_k^*(i,n,t)d(i,n) - s_k(n,t)\lambda_k(n,t) = 0,$$
$$k = 1,\ldots,M. \tag{52}$$

Первое слагаемого есть цена $p_k(n,t)$ единицы продукции в отрасли k, второе слагаемое — производственные затраты (a_ik — технологические коэффициенты), третье слагаемое — транспортные расходы (p_k^T — цена транспортной работы ($f_k^*(i,n)$ — поток товаров в k-й отрасли из региона i в регион n, $d(i,n)$ — расстояние между регионами) и, наконец, четвертое слагаемое — непроизводственные затраты ($s_k(n,t)$ — заработная плата работающего). Отсюда уровень рентабельности, т. е. количество работающих, выпускающих единицу продукции на границе рентабельности, определяется следующим равенством:

$$\lambda_k^*(n,t) = \frac{p_k(n,t) - \sum\limits_{i\neq k}^{M} a_{ik}p_i(n,t) - p_k^T \sum\limits_{i=1}^{M} f_k^*(i,n,t)d(i,n)}{s_k(n,t)}. \tag{53}$$

Используя выражения для функции технологической структуры и производственной мощности и учитывая уровень рентабельности, определим выпуск отрасли k в виде:

$$Y_k(n,t) = M_k(n,t) \int\limits_{\lambda_{k,min}(n,t)}^{\lambda_k^*(n,t)} \psi_k(n,\lambda,t)\,d\lambda, \tag{54}$$

и потребное количество работников — в виде:

$$R_k^E(n,t) = M_k(n,t) \int\limits_{\lambda_{k,min}(n,t)}^{\lambda_k^*(n,t)} \lambda\psi_k(n,\lambda,t)\,d\lambda. \tag{55}$$

Важной характеристикой уровня экономической деятельности является индекс дохода:

$$\omega_k(n,t) = \frac{s_k(n,t)R_k^E(n,t)}{p_k(n,t)Z_k(n,t)}, \tag{56}$$

где $Z_k(n,t)$ — общая численность населения k-й отраслевой группы в регионе n:

$$Z_k(n,t) = \sum_{a\in A_w} \Big[K_k(n,M,a,t) + K_k(n,M,a,t)\Big]. \tag{57}$$

8.2. Рынок труда

Рассматривается трудовой рынок, который формирует структуры занятости, причем в каждом регионе складываются собственные структуры занятости. Они характеризуются функциями плотности распределения занятых либо по возрасту $\widetilde{a}$ (возрастная структура занятости, ВСЗ — $\chi_k(n,\widetilde{a},\widetilde{t})$), либо по когортам $\widetilde{c}$ (когортная структура занятости, КСЗ — $w_k(n,\widetilde{c},\widetilde{t})$), либо распределением занятых когорт $k_k(n,\widetilde{c},\widetilde{t})$. Здесь, как и прежде, предполагается, что рынок труда носит отраслевой характер.

Здесь в качестве когортного признака принята дата рождения. Поэтому когорта $\widetilde{c}$, возраст $\widetilde{a}$ и календарное время $\widetilde{t}$ связаны следующим соотношением:

$$\widetilde{c} = \widetilde{t} - \widetilde{a}. \tag{58}$$

Наличие такой связи позволяет использовать для изучения рынка труда одну из характеристик структуры занятости, а именно КСЗ-функцию $w_k(n, \widetilde{c}, \widetilde{t})$.

Для моделирования динамики функции плотности распределения занятых введем понятие ее относительной скорости изменения:

$$\gamma_k(n, \widetilde{c}, \widetilde{t}) = \frac{1}{w_k(n, \widetilde{c}, \widetilde{t})} \frac{dw_k(n, \widetilde{c}, \widetilde{t})}{d\widetilde{t}}. \tag{59}$$

Эволюция состояния трудового рынка во времени происходит под влиянием социально-экономической системы [13]. Последняя в данном случае является источником ресурсов — трудовых и экономических (рабочих мест). Первые характеризуются предложением рабочей силы, а вторые — потребностью в ней. Внутренний механизм трудового рынка — это конкуренция за рабочие места. Количественное описание этого процесса удобно строить в терминах конкурентноспособности: собственной, когда речь идет об индивидах, оккупирующих рабочие места и стремящиеся их сохранить (keep), и сравнительной, для новых участников рынка труда, стремящихся вытолкнуть (push) первых с рабочих мест. Взаимодействие ресурсных и (keep-push)-факторов будем характеризовать в терминах функции $\gamma_k(n, \widetilde{c}, \widetilde{t})$ (59).

Влияние конкуренции, трудовых и экономических ресурсов будет описываться в терминах полезности [14], причем каждая когорта, как участник рынка труда, характеризуется своим уровнем полезности. Одной из компонент полезности является размер когорты, оккупирующей рабочие мести. Для моделирования соответствующего распределения, с учетом когортной структуры предложения и общего числа рабочих мест, будем использовать макросистемный подход [11].

Рассмотрим население, имеющее возраст $\widetilde{a}$ из интервала трудоспособности (возрастного окна) $\widetilde{A}_w = [\widetilde{a}_0, \widetilde{a}_1]$, $(a \in \widetilde{A}_w)$. Динамику рынка труда будем рассматривать на конечном интервале времени $\widetilde{T} = [\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1]$, где $\widetilde{t}_1 = \widetilde{t}_0 + \widetilde{a}_0$. Последнее не сужает область применения модели, но позволяет представить основные принципы построения и структуру, не отягощая изложение техническими деталями.

В начале временного интервала $\widetilde{t}_0$, старшая когорта (возраст $\widetilde{a}_1$) имеет согласно (58) дату рождения, равную

$$\widetilde{c}_0 = \widetilde{t}_0 - \widetilde{a}_1. \tag{60}$$

Младшая когорта, возраст которой в начале временного интервала равен $\widetilde{a} = \widetilde{a}_0$, и которая входит в возрастное окно $\widetilde{A}_w$ в конце временного интервала $\widetilde{t}_1$, имеет дату рождения:

$$\widetilde{c}_1 = \widetilde{t}_0. \tag{61}$$

Таким образом, множество интересующих нас когорт $\widetilde{K} = [\widetilde{c}_0, \widetilde{c}_1]$. Параллельно введем стандартизованные переменные:

$$\begin{aligned} a &= \widetilde{a} - \widetilde{a}_0, \quad a \in A_w = [0, a^*], \\ t &= \widetilde{t} - \widetilde{t}_0, \qquad t \in T = [0, \widetilde{a}_0], \\ c &= \widetilde{c} - \widetilde{c}_0, \qquad c \in K = [0, \widetilde{a}_1], \end{aligned} \tag{62}$$

где

$$a^* = \widetilde{a}_1 - \widetilde{a}_0. \tag{63}$$

Следует отметить, что в каждый момент времени t только часть когорт c из множества K (62) принадлежат возрастному окну A_w. Все такие когорты образуют подмножество C_t, которое имеет вид:

$$C_t = [t, t + a^*] \in K, \quad t \in T. \tag{64}$$

Для описания состояния рынка труда в стандартизованных переменных будем использовать введенные выше три функции плотности: КСЗ — $w_k(n, c, t)$ ($c \in C_t$ и $t \in T$); ВСЗ — $\chi_k(n, a, t)$ ($a \in A_w$ и $t \in T$); РРК — $k_k(n, c, t)$ ($c \in K$ и $t \in T$). Между этими характеристиками рынка труда существует взаимнооднозначное соответствие:

$$w_k(n, c, t) = \chi_k(n, t - c, t), \qquad c \in C_t, \quad t \in T; \tag{65}$$

$$\chi_k(n, a, t) = w_k(n, t - a, t), \quad a \in A_w, \quad t \in T; \tag{66}$$

$$k_k(n, c, t) = \begin{cases} w_k(n, c, t), & \text{для} \quad c \in [0, \widetilde{a}_0], \qquad t \in [0, c]; \\ 0, & \text{для} \quad c \in [0, \widetilde{a}_0], \qquad t \in [c + 1, \widetilde{a}_0]; \\ w_k(n, c, t), & \text{для} \quad c \in [\widetilde{a}_0 + 1, a^*], \quad t \in [0, \widetilde{a}_0]; \\ 0, & \text{для} \quad c \in [a^* + 1, \widetilde{a}_1], \quad t \in [0, c - (a^* + 1)]; \\ w_k(n, c, t), & \text{для} \quad c \in [a^* + 1, \widetilde{a}_1], \quad t \in [c - a^*, \widetilde{a}_0]. \end{cases} \tag{67}$$

Далее в основном будет использоваться КСЗ-функция. Для моделирования ее изменения во времени будем использовать введенную выше относительную скорость $\gamma_k(n, c, t)$ (59). Тогда получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dw_k(n, c, t)}{dt} = w_k(n, c, t)\gamma_k(n, c, t), \tag{68}$$

где $t \in T$, и c фиксированная когорта из подмножества C_t.

Поскольку вся необходимая для исследования рынка труда информация привязана к дискретной временной шкале, целесообразно перейти к разностной аппроксимации уравнений (68). Используя схему Эйлера с постоянным шагом равным одному году, получим:

$$w_k(n, c, t+1) = w_k(n, c, t)[1 + \gamma_k(n, c, t)], c \in C_t, \ t \in T_1, \tag{69}$$

где C_t определяется равенством (64) и

$$T_1 = T \setminus \widetilde{a}_0 = [0, \widetilde{a}_0 - 1]. \tag{70}$$

Начальное распределение $w_k(n, c, 0)$ задается следующими условиями:

$$\begin{gathered} w_k(n, c, 0) = w_k^0(n, c), \quad 0 < w_k^0(n, c) < 1, \quad c \in C_0, \\ \sum_{c \in C_0} w_k^0(n, c) = 1. \end{gathered} \tag{71}$$

Из уравнений (69) видно, что подмножество C_t работающих когорт меняется во времени t. Старшие когорты покидают рынок труда в интервале $(t, t+1)$, а молодые когорты становятся участниками рынка.

Поэтому граничные условия $w_k^B(n, t+1)$ для уравнений (69) можно представить в виде:

$$\begin{gathered} w_k(n, t + a^* + 1, t+1) = w_k^B(n, t+1), \\ 0 < w_k^B(n, t+1) < 1, \ t \in T_1. \end{gathered} \tag{72}$$

Уравнения (69) должны быть дополнены условиями нормировки и положительности. В результате получим:

$$\widehat{w}_k(n, c, t+1) = \begin{cases} w_k(n, c, t)[1 + \gamma_k(n, c, t)], \ c \in C_t, \text{ если } \widehat{w}_k(n, c, t+1) \geqslant 0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0, \text{ если } \widehat{w}_k(n, c, t+1) < 0, \end{cases} \tag{73}$$

$$w_k(n, c, t+1) = \frac{\widehat{w}_k(n, c, t+1)}{N(t+1)}, \quad c \in (C_t \setminus t), \tag{74}$$

где

$$N(t+1) = \sum_{c \in (C_t \setminus t)} \frac{\widehat{w}_k(n, c, t+1)}{1 - w_k^B(n, t+1)}.$$

В этих уравнениях условие $c \in (C_t \setminus t)$ позволяет исключать на каждом шаге старшие когорты, которые покидают рынок труда, и вовлекать молодые когорты.

Из уравнений (73) видно, что динамика рынка труда определяется функцией $\gamma_k(n, c, t)$ (59), которая входит в правую часть уравнений (73). Рассмотрим, как она зависит от основных процессов, происходящих на рынке труда, а именно, от конкуренции между когортами, предложением и потребностью в рабочей силе.

В соответствии с данной феноменологией рассмотрим три компоненты функции $\gamma_k(n, c, t)$:

- $\rho_k(n, c, t)$ — собственная конкурентноспособность когорты c в регионе n;
- $\kappa_k(n, c, t)$ — сравнительная конкурентноспособность когорты c по отношению к другим когортам $l \neq c$ из региона n и из всех других регионов $i \neq n$;
- $\sigma_k(n, c, t)$ — взаимодействие региональных спроса и предложения рабочей силы.

Тогда в линейном приближении функцию $\gamma_k(n, c, t)$ можно представить в следующей форме:

$$\gamma_k(n, c, t) = \rho_k(n, c, t) + \kappa_k(n, c, t) + \sigma_k(n, c, t), \tag{75}$$

При определении компонент этой формулы воспользуемся методикой, изложенной в [13]. Получим:

$$\rho_k(n, c, t) = -\rho_k(n) \exp\{-\zeta_k(n)c\} w_k(n, c, t), \tag{76}$$

$$\begin{aligned}\kappa_k(n, c, t) = \sum_{l \in C_t,\, l \neq c} \Bigg[\theta_{(n)} \exp\{-\alpha_k(n)|c - l|\} \left(\frac{x_k^*(n, c, t)}{x_k^*(n, l, t)} \right) w_k(n, l, t) + \\ + \sum_{i \neq n} \theta_{(i)} \exp\{-\alpha_k(i)|c - l|\} \left(\frac{x_k^*(n, c, t)}{x_k^*(i, l, t)} \right) w_k(i, l, t) \Bigg],\end{aligned} \tag{77}$$

$$\sigma_k(n, c, t) = \sum_{i=1}^{N_{int}} g_{ni} \sigma_k(i, c, t), \tag{78}$$

$$\begin{gathered}\sigma_k(i, c, t) = \beta_k(i) \frac{R_k^E(i, t)}{S_k(i, t)} \frac{S_k(i, c, t)}{S_k(i, t)}, \\ g_{ni} = \frac{\frac{S(n,t)}{S(i,t)}}{\sum\limits_{n,i} \frac{S(n,t)}{S(i,t)}}.\end{gathered} \tag{79}$$

В этих выражениях $x_k^*(n, c, t)$ — энтропийно-оптимальное распределение занятых когорт:

$$x_k^*(n, c, t) = \frac{w_k(n, c, t) S_k(n, c, t)}{w_k(n, c, t) + z_k^*(n, t)[1 - w_k(n, c, t)]}. \tag{80}$$

Экспоненциальный множитель Лагранжа $z_k^*(n,t)$ есть решение следующего уравнения:

$$\psi_k(n,z,t) = \frac{1}{R_k^E(n,t)} \sum_{c \in C_t} \frac{w_k(n,c,t) S_k(n,c,t)}{w_k(n,c,t) + z_k^*(n,t)[1 - w_k(n,c,t)]} = 1. \quad (81)$$

В этих выражениях $\rho_k(n)$, $\zeta_k(n)$, $\alpha_k(n)$, $\beta_k(n)$, $\theta_k(n)$ есть параметры масштаба и $S_k(n,c,t)$, $S_k(n,t)$ — предложение рабочей сила, распределенное по когортам и полное соответственно.

8.3. Рынок товаров (обмен товарами)

Здесь предполагается, что каждая отрасль производит уникальные товары и обмен осуществляется внутри отрасли, т. е. товарами типа k. Процесс обмена относится к классу «быстрых», что позволяет его рассматривать как последовательность локально-стационарных состояний. Такие состояния характеризуются матрицей F_k^* потоков товаров $f_k^*(i,n,t)$ между регионами системного пространства. Без ограничения общности можно считать, что товар состоит из порций; следовательно его количество есть количество порций.

Важным является предположение о стохастической природе формирования потока $f(i,n,t)$. Это означает, что каждая порция товара случайно, независимо от других порций и с априорной вероятностью $\nu_k(i,n,t)$ передается из региона i в регион n. Априорные вероятности нормированы по регионам потребления:

$$\sum_{n=1}^{N_{int}} \nu_k(i,n,t) = 1, \quad k = 1, \ldots, M. \quad (82)$$

Максимальный объем производимых товаров равен производственной мощности $M_k(n,t)$. Тогда локально-стационарное распределение товарных потоков определяется следующей задачей максимизации энтропии:

$$H_k(F) = -\sum_{i,n=1}^{N_{int}} f_k(i,n,t) \ln \frac{f_k(i,n,t)}{\nu_k(i,n,t) M_k(i,t)} \Rightarrow \max, \quad (83)$$

при балансных ограничениях:

$$\sum_{n=1}^{N_{int}} f_k(i,n,t) = Y_k(i), \quad i = 1, \ldots, N_{int} \quad (84)$$

и ограничениях на транспортные издержки:

$$p_k^T \sum_{n=1}^{N_{int}} f_k(i,n,t)d(i,n) = c^T \sum_{n=1}^{N_{int}} f_k(i,n,t)p_k(i,n,t), \quad i = 1, \dots, N_{int}, \tag{85}$$

где $d(i,n)$ — расстояние между регионами i и n, c^T — доля транспортных расходов в общем доходе. Заметим, что решение этой задачи, т. е. матрица F^* потоков зависит от выпуска отрасли $Y_k(n,t)$ (8.1), матрицы априорных вероятностей $\mathcal{N}_k(t)$, транспортной цены p_k^T, цены товара $p_k(n,t)$ и доли транспортных расходов c^T. Поэтому $F^*\big(Y_k(n,t), \mathcal{N}_k(t), p_k^T, p_k(t), c^T\big)$ есть оператор, а именно *энтропийный оператор* [15].

Рассмотрим проблему определения априорных вероятностей. Следуя [16], представим $\nu_k(i,n,t)$ в виде произведения двух компонент: $\Gamma_k(i,n)$ — зависимость априорной вероятности от расстояния между регионами i, n и $\Theta_k(i,n,t)$ — сравнительная полезность регионов i, n. Для описания первой компоненты обычно используется экспоненциальная зависимость

$$\Gamma_k(i,n) = \exp\{-ld(i,n)\}, \tag{86}$$

где l — параметр.

Важным фактором, влияющим на сравнительную полезность регионов, является так называемая «транспортная» часть прибыли

$$\Pi_k(i,n,t) = p_k(n,t) - p_k^T d(i,n). \tag{87}$$

В качестве сравнительной полезности принимается неотрицательная функция «транспортной» прибыли, например, экспоненциальная:

$$\Theta_k(i,n,t) = \exp\{\Pi_k(i,n,t)\}. \tag{88}$$

Тогда априорные вероятности можно представить в виде:

$$\nu_k(i,n,t) = A_k(i,t)\Gamma_k(i,n)\Theta_k(i,n,t), \tag{89}$$

где

$$A_k(i,t) = \frac{1}{\sum\limits_{n=1}^{N_{int}} \Gamma_k(i,n)\Theta_k(i,n,t)}.$$

9. Подсистема “INTERACTION”

Важным блоком рассматриваемых моделей является блок, описывающий взаимодействие популяционных и экономических процессов. Население «предлагает» свою трудоспособную часть для осуществления экономической деятельности, а экономика, реализуя эту деятельность, влияет на воспроизводство населения и его миграционное поведение. Блок «INTERACTION» содержит модули, описывающие влияние состояния экономической подсистемы на параметры процесса эволюции населения.

9.1. Экономические факторы, влияющие на эволюцию населения

Процессы эволюции населения имеют весьма сложную структуру, реализуются под влиянием факторов и событий различной природы. Причем некоторые из них могут быть измеряемыми или неизмеряемыми, а о существовании иных мы можем даже не подозревать. В региональной науке существует точка зрения, а точнее гипотеза, что основное влияние на эволюцию населения оказывает состояние экономики. В данной работе мы будем придерживаться этой гипотезы, хотя она не бесспорна. Но не следует думать, что, приняв ее, однозначно будет определен список соответствующих экономических факторов. Вопрос о списке — также дискуссионный. Нами были выбраны факторы, часто используемые в демо-экономических исследованиях.

В этом списке на первом месте находиться индекс дохода $\omega_k(n,t)$ (56). Предполагается, что источником дохода является заработная плата, которая выплачивается за наемный труд. Следующим важным фактором является доля ВВП на душу населения

$$\vartheta_k(n,t) = \frac{Y_k(n,t)p_k(n,t)}{Z_k(n,t)}. \tag{90}$$

Обозначения, используемые в этой формуле, представлены в п. 7.1. Оба показателя характеризуют потенциальную экономическую привлекательность регионов $n = 1, \ldots, N_{int}$.

Возможность реализовать ее в значительной степени зависит от состояния рынка труда. В п. 7.2 были указаны характеристики рынка труда в терминах когортного (когорты по дате рождения) или возрастного распределения занятых.

Рынок труда формирует поло-возрастную структуру занятости, характеризуемую функциями ВСЗ $\chi_k^M(n,a,t), \chi_k^F(n,a,t)$, где трудоспособные возрасты $a \in [a^-, a^+]$. Функции $\chi_k^M(n,a,t), \chi_k^F(n,a,t)$ нормированы:

$$\int\limits_{a^+}^{a^-} \left[\chi_k^M(n,a,t) + \chi_k^F(n,a,t)\right] da = 1. \tag{91}$$

Таблица 1

Экономические факторы

Название	Обозначение	Номер формулы
Индекс дохода	$\omega_k(n,t)$	(56)
Относит. ВВП	$\vartheta_k(n,t)$	(90)
Активность рынка	$\alpha_k(n,\mathbb{G},t)$	(93)
Индекс безработицы	$r_k^{UE}(n,t)$	(94)

С помощью функций ВСЗ можно разделить общую потребность в рабочей силе на мужскую и женскую части:

$$\begin{aligned} R_k^{EM}(n,a,t) &= R_k^E(n,t)\chi_k^M(n,a,t), \\ R_k^{EF}(n,a,t) &= R_k^E(n,t)\chi_k^F(n,a,t). \end{aligned} \tag{92}$$

Эти компоненты занятости позволяют ввести такие характеристики экономической деятельности, как активность «молодых» мужчин и женщин в производстве. Понятие «молодые» обозначается возрастным интервалом $[\widetilde{a}_0,\widetilde{a}_1]$, где $\widetilde{a}_0 > a^-$, $\widetilde{a}_1 < a^+$. Обычно $\widetilde{a}_0 = 25$, $\widetilde{a}_1 = 35$. Количественная оценка активности производится величинами

$$\begin{aligned} \alpha_k^M(n,t) &= \frac{1}{R_k^E(n,t)}\sum_{a=\widetilde{a}_0}^{\widetilde{a}_1} R_k^{EM}(n,a,t), \\ \alpha_k^F(n,t) &= \frac{1}{R_k^E(n,t)}\sum_{a=\widetilde{a}_0}^{\widetilde{a}_1} R_k^{EF}(n,a,t). \end{aligned} \tag{93}$$

Важным показателем состояния рынка труда является индекс безработицы:

$$r_k^{UE}(n,t) = \frac{R_k^{UE}(n,t)}{S(n,t)}, \tag{94}$$

где $R_k^{UE}(n,t)$ — количество безработных в отрасли k, $S(n,t)$ — общее предложение рабочей силы.

Перечисленные факторы сведены в табл. 1. Они будут рассматриваться в качестве влияющих на эволюцию населения. Но при этом не обязательно все будут учитываться при построении моделей влияния на те или иные параметры подсистемы “POPULATION”.

9.2. Воспроизводство населения

Процесс воспроизводства населения складывается из процессов рождаемости и смертности. Каждый из них испытывает определенное, естественно, косвенное влияние экономических факторов. Теоретические, модельные и эмпирические исследования этих процессов показывают, что более чувствительным (количественно и по времени релаксации) к ним является процесс рождаемости. Показатели смертности населения также меняются под влиянием изменяющихся экономических условий, но эти изменения проявляются на существенно больших интервалах времени.

Рождаемость. Рассмотрим вначале методику моделирования связи между распределением по возрасту индекса рождаемости $b_k(n, a, t)$, $a \in FI$ для отраслевой группы k и экономическими факторами перечисленными в п. 8.1. Напомним, что индекс рождаемости определяется количеством новорожденных детей на одну женщину в регионе n, возраста a из интервала фертильности $FI = [a_-, a_+]$ в момент времени t. Эта величина положительная и принимает теоретически значения в интервале $[0, 15]$. Реальные ее значения для западного типа воспроизводства 0,8–2,3. Здесь следует иметь ввиду, что мировая статистика оперирует не возрастными распределениями индекса рождаемости, а средним индексом рождаемости (total fertility rate)

$$b_k(n, t) = (\Delta FI)^{-1} \sum_{a \in FI} b_k(n, a, t), \tag{95}$$

где $\Delta FI = a_+ - a_-$.

Поэтому приходиться применять двухэтапную процедуру: в начале моделировать зависимость среднего индекса рождаемости от экономических факторов, а затем как-то, используя дополнительные предположения, «размазать» его по возрастам.

Рассмотрим первый этап этой процедуры. Для выбора структуры модели используется довольно распространенный прием, в рамках которого рассматривается относительная скорость изменения во времени среднего индекса рождаемости и предполагается, что она зависит от указанных в п. 8.1 экономических факторов. т. е.

$$\frac{1}{b_k(n, t)} \frac{db_k(n, t)}{dt} = \beta_k\big(b_k(n, t), \omega_k(n, t), \vartheta_k(n, t), \alpha_k(n, F, t), r_k^{UE}(n, t)\big). \tag{96}$$

Здесь β_k — некоторая функция, описывающая влияние экономических факторов. Естественно начать с линейной функции:

$$\beta_k = A_k^0 b_k(n, t) + A_k^1 \omega_k(n, t) + A_k^2 \vartheta_k(n, t) + A_k^3 \alpha_k(n, F, t) + A_k^4 r_k^{UE}(n, t). \tag{97}$$

Объединяя последние два выражения, получим дифференциальное уравнение, описывающее эволюцию среднего индекса рождаемости:

$$\frac{db_k(n,t)}{dt} = b_k(n,t)\big(A_k^0 b(n,t) + A_k^1 \omega_k(n,t) + \\ + A_k^2 \vartheta_k(n,t) + A_k^3 \alpha_k(n,F,t) + A_k^4 r_k^{UE}(n,t)\big). \tag{98}$$

Это уравнение имеет неотрицательные решения при положительных начальных условиях, и тем самым отражает важное свойство среднего индекса рождаемости. Коэффициент A_k^0 характеризует инерционные свойства индекса, изменения которого происходят не сразу после изменения экономических факторов. Коэффициенты $A_k^1, \ldots, A_k^4$ характеризуют вес соответствующих экономических факторов. Все коэффициенты в правой части этого уравнения определяются стандартными методами идентификации. Поскольку они одинаковые для всех моделей, общую их идею рассмотрим отдельно.

Теперь перейдем ко второму этапу процедуры, а именно, к моделированию связи между экономическими параметрами и *распределением* индекса рождаемости по возрастам для отраслевой группы k. По определению

$$b_k(n,a,t) = \frac{C_k(n,a,t)}{K_k(n,F,a,t)}, \tag{99}$$

где $C_k(n,a,t)$ — количество новорожденных детей у женщин возраста a в регионе n в момент времени t, $K_k(n,F,a,t)$ — количество женщин в k-й отраслевой группе населения в возрасте a, в регионе n в момент времени t.

Распределение $b(n,a,t)$ должно согласно (95) удовлетворять следующему условию:

$$(\Delta FI)^{-1} \sum_{a \in FI} \frac{C_k(n,a,t)}{K_k(n,F,a,t)} = b_k(n,t). \tag{100}$$

В этом равенстве предполагается, что средний индекс рождаемости $b_k(n,t)$ и количество женщин $K_k(n,F,a,t)$ известны и требуется найти подходящее распределение новорожденных детей по возрасту матерей. Ясно, что распределение $C_k(n,a,t)$, удовлетворяющее этому условию, не единственное. Поэтому необходимо привлечь дополнительные предположения. Мы будем пользоваться гипотезой о случайном распределении новорожденных детей по возрастам матерей, причем с некоторой априорной вероятностью $\nu_k(a)$. Эта гипотеза позволяет привлечь известную комбинаторную схему, лежащую в основе статистики Больцмана [11], и выписать энтропию соответствующего распределения:

$$H_k(C_k) = -\sum_{a\in FI} C_k(n,a,t)\ln\frac{C_k(n,a,t)}{e\nu_k(a)}. \qquad (101)$$

Распределение $C_k(n,a,t)$ должно удовлетворять некоторым ограничениям. Одно из них приведено выше (см. (100)). Другое связано с общим количеством новорожденных детей $K_k(n,0,t)$:

$$\sum_{a\in FI} C_k(n,a,t) = K_k(n,0,t) = K_k(n,M,0,t) + K_k(n,F,0,t). \qquad (102)$$

Будем предполагать, что реализуемое (единственное) распределение новорожденных детей по возрастам матерей соответствует максимуму энтропии (101) при ограничениях (100), (102). Используя метод множителей Лагранжа решение этой задачи можно представить в следующем виде:

$$C_k^*(n,a,t) = \frac{K_k(n,0,t)\nu_k(a)z^{\rho_k(n,F,a,t)_k}}{\sum\limits_{a\in FI}\nu_k(a)z^{\rho_k(n,F,a,t)_k}}, \qquad (103)$$

где экспоненциальный множитель Лагранжа z_k определяется следующим уравнением

$$\frac{K_k(n,0,t)}{b_k(n,t)\Delta(FI)}\frac{\sum\limits_{a\in FI}\rho_k(n,F,a,t)\nu_k(a)z^{\rho_k(n,F,a,t)_k}}{\sum\limits_{a\in FI}\nu_k(a)z^{\rho(n,F,a,t)_k}} = 1 \qquad (104)$$

и $\rho_k(n,a,t) = [K_k(n,F,a,t)]^{-1}$. Численное решение этого уравнения может быть получено с помощью, например, мультипликативных алгоритмов [11].

В предлагаемой модели, восстанавливающей распределение индекса рождаемости по возрастам, присутствует функция распределения $\nu_k(a)$ априорных вероятностей рождения ребенка у женщин из возрастного интервала фертильности FI. Для описания формы этой функции удобно использовать нормальное распределение, определенное на интервале FI:

$$\nu_k(a) = \frac{N_k}{\sigma_k\sqrt(2\pi)}\exp\left\{-\frac{(a-\widehat{a}_k)^2}{2\sigma_k^2}\right\}, \quad a_- \leqslant a \leqslant a_+, \qquad (105)$$

где нормировочная константа

$$N_k = \left(\frac{1}{\sigma_k\sqrt(2\pi)}\int\limits_{a_-}^{a_+}\exp\left\{-\frac{(a-\widehat{a}_k)^2}{2\sigma_k^2}\right\}da\right)^{-1}. \qquad (106)$$

Это распределение определяется двумя параметрами $\widehat{a}_k, \sigma_k$. Изменяя их, можно имитировать такие явления как раннее (15–23 года) и позднее деторождение (35–45 лет). Подходящие их значения определяются по ретроспективным данным с использованием стандартных методов идентификации.

Смертность. Модель влияния экономических факторов на индексы смертности строится аналогично модели влияния экономических факторов на рождаемость. Поэтому мы выпишем основные соотношения с минимальными комментариями. Средние индексы смертности для мужской и женской части населения находятся в довольно устойчивом по времени соотношении, т. е.

$$d_k(n, F, t) = (1{,}15 - 1{,}23) d_k(n, M, t). \tag{107}$$

Поэтому будем рассматривать средний индекс смертности для мужчин:

$$d_k(n, M, t) = \frac{1}{90} \sum_{a=1}^{90} d_k(n, M, a, t). \tag{108}$$

Зависимость среднего индекса смертности от экономических факторов представляется в виде:

$$d_k(n, M, t) = D_k^0 + D_k^1 \omega_k(n, t) + D_k^2 \vartheta_k(n, t) + D_k^3 r_k^{UE}(n, t). \tag{109}$$

Распределение среднего индекса смертности по возрастам производится с помощью энтропийной модели следующего вида:

$$\begin{gathered} H_k(D_k) = -\sum_{a \in A} D_k(n, M, a, t) \ln \frac{D_k(n, M, a, t)}{\mu_k(M, a)} \Rightarrow \max, \\ \sum_{a \in A} D_k(n, M, a, t) = d_k(n, M, t) K_k(n, M, t). \end{gathered} \tag{110}$$

Здесь $\mu_k(M, a)$ — априорные вероятности для мужчин умереть в возрасте a, $K_k(n, M, t)$ — численность мужчин в регионе n в момент времени t.

Миграция. Энтропийная модель миграции (36) содержит в качестве параметров априорные вероятности $P_k(i, n)$ выбора потенциальными мигрантами пары регионов i, n. Априорные вероятности $P_k(i, n)$ зависят (в рамках принятых гипотез) от экономических факторов, причем эта зависимость должна отражать сравнительную ценность упомянутых регионов. для формирования такой зависимости используется концепция сравнительной полезности, основанная на понятии функции полезности региона по соответствующему фактору.

Обозначим $u_h(g_h)$ — функцию полезности фактора g_k. Выберем в качестве функции полезности логарифмическую функцию:

$$u_h(g_h) = \eta_h \ln(g_h), \tag{111}$$

где η_h — параметр. Введем в качестве функции сравнительной полезности двух пространственных единиц функцию следующего вида:

$$u_h(g_h^i, g_h^n) = \exp\left\{u_h(g_h^n) - u_h(g_h^i)\right\} = \left(\frac{g_h^n}{g_h^i}\right)^{\eta_h}. \tag{112}$$

Если имеется L факторов, то общая функция сравнительной полезности имеет вид:

$$U(i,n) = b_0 + \sum_{h=1}^{L} b_h u_h\left(g_h^i, g_h^n\right), \tag{113}$$

где b_h — параметры, и априорные вероятности

$$P(i,n) = WU(i,n), \tag{114}$$

где W — нормировочная константа. В данном случае

$$P_k(i,n) = W\left[b_k^0 + b_k^1\left(\frac{\omega_k(n,t)}{\omega_k(i,t)}\right)^{\eta_\omega} + b_k^2\left(\frac{\vartheta_k(n,t)}{\vartheta_k(i,t)}\right)^{\eta_\vartheta} + \right.$$
$$\left. + b_k^3\left(\frac{\alpha_k(n,t)}{\alpha_k(i,t)}\right)^{\eta_\alpha} + b_k^4\left(\frac{r_k^{UE}(n,t)}{r_k^{UE}(i,t)}\right)^{\eta_{UE}}\right]. \tag{115}$$

10. Заключение

Использование энтропии для моделирования некоторых процессов демо-экономической динамики оказывается полезным, так как компоненты этих процессов имеют существенно различные времена релаксации. В этой ситуации «быстрые» компоненты в шкале «медленного» времени представляются последовательностью локально-стационарных состояний. В процессах демо-экономической динамики такими «быстрыми» являются процессы миграции населения. Достаточно распространенным является представление миграции как стохастического распределительного процесса. Локально-стационарное состояние такого процесса может быть представлено как состояние максимизирующее энтропию (энтропию специального вида). С точки зрения системных позиций рассматриваемые модели относятся к классу динамических систем с энтропийным оператором, некоторые результаты исследования которых представлены в [15].

Важным вопросом при построении математической модели является ее адекватность реальному объекту. Адекватность модели зависит как от принятых принципиальных гипотез о механизмах функционирования объекта, так и от значений параметров модели. Часто прямая информация об их величинах отсутствует, и их значения восстанавливаются по косвенной информации с помощью методов статистического оценивания и идентификации. Поскольку исходной для этого информации бывает недостаточно или она не вполне достоверна, то определенные по ней значения параметров модели также недостоверны, и следовательно, результаты моделирования также недостоверны. Эти замечания в полной мере относятся к рассматриваемой энтропийной демо-экономической модели.

Система «население — экономика» (PE-система), как и большинство больших систем, является не вполне определенной, с точки зрения устройства внутренних механизмов ее функционирования и внешних факторов, влияющих на ее динамику. Кроме того она генерирует уникальную траекторию (а не ансамбль траекторий) в пространстве ее состояний, причем по ее состояниям на ретроспективном интервале любой протяженности нельзя надежно предсказывать ее состояния в будущем.

Для исследования и моделирования таких систем может быть использован так называемый *метод погружения* [17, 18]. Напомним, что его смысл состоит в построение простых вспомогательных систем, мажорирующих и минорирующих поведение изучаемой системы.

Отталкиваясь от этой идеи, можно определить подходящую стохастическую систему таким образом, чтобы уникальная траектория неопределенной PE-системы содержалась в ансамбле траекторий стохастической системы в каком-либо вероятностном смысле (с вероятностью 1, по вероятности, в средне-квадратичном и т. д.).

Реализация такого подхода может быть основана на концепции модели с жесткой структурой, неизменяющейся во времени, но со случайными параметрами, имеющими соответствующие законы распределения. С помощью такой модели генерируется ансамбль траекторий, который содержит (в вероятностном смысле) траекторию PE-системы. Таким образом, в отличии от традиционных подходов в математическом моделировании демографических и экономических процессов, мы будем формировать *вероятностную модель замкнутой системы «население-экономика»*.

Литература

1. *Long L. H.* On measuring of geographical mobility // Journal of American Statistical Association. 1970. V. 65. P. 1195–1203.
2. *Long L. H.*, *Boertlein C. G.* The geographical mobility of Americans: in international comparison // US Bureua of the Census. Ser. P-26. 1976. № 64. US Department of Commerce, Washington DC.

3. *Clausius R.* Uber Verschiedene fur die Anwendung Bequeme Formen der Hauptgleichungen der Mechanischen Warmetheorie // Annalen der Physik und Chemie. 1895. V. 125. P. 353–400.
4. *Baierlein R.* How Entropy Got Its Name // American Journal of Physics. 1992. V. 60. P. 1151.
5. *Boltzmann L.* On the link between the srcond beginningof mechanical calory theory and probability theory in theorems of thermal equilibbrium // Избранные труды. Сер.: Классики науки. М.: Наука, 1984. С. 190–236.
6. *Hartley R. V. L.* Передача информации. 1928 // Теория информации и ее приложения / Пер. с англ.; Под ред. А. А. Харкевича. М.: Наука, 1959.
7. *Стратонович Р. Л.* Теория информации. М.: Наука, 1975.
8. *Kullback S.*, *Leibler R.* On information and sufficiency // Ann. Math. Statist. 1951. V. 22. № 1. P. 79–86.
9. *Попков Ю. С.* Математические модели стационарных состояний макросистем // Автоматика и телемеханика. 1984. № 6. С. 129–137.
10. *Weidlich W.* Sociodynamics. Harwood Academic Publisher. 2000.
11. *Попков Ю. С.* Теория макросистем и ее применения. М.: УРСС, 1999.
12. *Петров А. А.*, *Поспелов И. Г.* Системный анализ развивающейся экономики // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1979. № 2. С. 18–27; № 3. С. 28–38. № 4. С. 11–23, № 5. С. 13–24.
13. *Виссен Л.*, *Попков А. Ю.*, *Попков Ю. С.* Модели рынка труда с энтропийным оператором (конкуренция когорт) // Экономика и математические методы. 2004. Т. 40. № 2. С. 99–112.
14. *Нейман Д. фон*, *Моргенштерн П.* Теория игр и экономическое поведение. М.: Наука, 1970.
15. *Попков Ю. С.* Основы теории динамических систем с энтропийным оператором и ее приложения // АиТ. 2006. № 6. С. 75–105.
16. *Popkov Y. S.*, *Shvetzov V. I.*, *Weidlich W.* Settlement formation models with entropy operator // The Annals of Regional Sciences, Springer-Verlag. 1998. V. 32. P. 267–294.
17. *Матросов В. М.*, *Анапольский Л. Ю.*, *Васильев С. Н.* Метод сравнения в математической теории систем. Новосибирск: Наука, 1980.
18. *Гурман В. И.* Принцип расширения в задачах управления. М.: Наука; Физматлит, 1997.