

Описание областей постоянства сигнатуры аффинных матричных функций*

Б. Т. Поляк, П. С. Щербаков

*Институт системного анализа
Российской академии наук (ИСА РАН)*

В развитие теории линейных матричных неравенств предлагается метод определения всех областей в пространстве параметров, внутри которых аффинное семейство симметричных матриц имеет фиксированное количество собственных значений одного знака. Подход основан на идеях D -разбиения и особенно эффективен в задачах с малым числом параметров. Рассматриваются обобщения метода и его модификации на задачи с неопределенностью.

1. Введение и постановка задачи

В работе рассматривается следующая задача. Найти области в пространстве параметров $x \in \mathbb{R}^\ell$, внутри которых матрица

$$A(x) \doteq A_0 + \sum_{i=1}^{\ell} x_i A_i, \quad A_i \in \mathbb{S}^{n \times n}, \quad (1)$$

имеет фиксированное число отрицательных собственных значений; здесь $\mathbb{S}^{n \times n}$ означает пространство вещественных симметричных $n \times n$ матриц.

Частный случай такой задачи — отыскание точки x , в которой линейная комбинация симметричных матриц отрицательно определена, — это хорошо известная задача допустимости линейного матричного неравенства (ЛМН; в англоязычной литературе общепринята аббревиатура LMI) $A(x) \leq 0$. Пер-

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 05–01–00114 и 05–08–01177, а также Комплексной программы 22 Президиума РАН «Процессы управления».

вое применение ЛМН в теории управления принадлежит А. М. Ляпунову: им было установлено, что устойчивость системы $\dot{x} = Ax$ эквивалентна разрешимости ЛМН $A^T P + PA < 0$, $P > 0$, где матрица P определяет квадратичную функцию Ляпунова $V(x) = x^T P x$. Сам термин «матричные неравенства» был введен в обиход В. А. Якубовичем [1] в 1962 г. применительно к задачам абсолютной устойчивости; впоследствии этот аппарат был развит им в ряде других работ (например, см. [2–4]). Роль В. А. Якубовича в создании теории ЛМН общепризнана; так, в [6] говорится: «Справедливо будет сказать, что Якубович является отцом этого направления, а дедушкой — Ляпунов».

Со временем линейные матричные неравенства оказались весьма общим и плодотворным аппаратом исследования задач оптимизации, теории управления и теории систем. Так, в [6] было показано, что многие классические и новые проблемы в указанных областях могут быть сформулированы в терминах линейных матричных неравенств и эффективно решены с помощью методов выпуклого программирования.

Важным шагом в развитии теории послужило простое соображение о том, что линейные матричные неравенства могут быть записаны в виде задач выпуклой оптимизации [7], после чего для решения остается применить к ним тот или иной численный метод. Первые систематические исследования численных реализаций алгоритмов ЛМН также были проведены Е. С. Пятницким и соавторами; в частности, ими был предложен специальный вариант метода эллипсоидов.

Начиная с середины 80-х гг. стали появляться работы А. С. Немировского и Ю. В. Нестерова, в которых были разработаны эффективные процедуры выпуклой оптимизации, в основе которых лежат методы внутренней точки [8]. При этом была доказана невысокая вычислительная сложность предлагаемых процедур. Эти методы и их модификации стали с успехом применяться к решению различных задач ЛМН, и со временем в теории систем сформировался стандарт, согласно которому задача считается решенной, если она сведена к формату линейных матричных неравенств. К середине 90-х гг. теория и методы линейных матричных неравенств выделились в самостоятельную дисциплину. Что касается использования аппарата ЛМН в управлении, то следует отметить книгу [9] (единственную на русском языке), в которой приводятся последние результаты по применению линейных матричных неравенств для синтеза законов управления.

К настоящему времени эта область развита очень полно также и в прикладном аспекте: имеются мощные пакеты решателей и удобные интерфейсы; среди наиболее популярных следует отметить *LMILab*, *SeDuMi*, *Yalmip* (например, см. [10]). В то же время, как теоретические обоснова-

ния, так и сами численные процедуры решения не лишены ограничений. Так, теория линейных матричных неравенств не предполагает описания всего допустимого множества и тем более других областей постоянства сигнатуры; задачи с неопределенностями в модели также не всегда поддаются эффективному решению.

Прежде всего в данной работе ставится цель не только описать *целиком* допустимое множество $\{x \in \mathbb{R}^\ell : A(x) \leq 0\}$, но и характеризовать *все* области в пространстве параметров, внутри которых матрица $A(x)$ имеет постоянную сигнатуру. Эта цель достигается с помощью техники, известной как D -разбиение [11], исходно разработанной для исследования устойчивости скалярных систем, и ее модификации на случай симметричных матриц. При этом для малого числа параметров, $\ell = 2$, области легко изображаются графически на плоскости. Полное описание допустимого множества позволяет по-новому ставить и решать задачи полуопределенного программирования, а определение других областей с фиксированным числом отрицательных собственных значений очень важно для проверки условий применимости обобщенной S -процедуры (см. [12, с. 312]). Кроме того, появляется возможность сравнительно легко решать матричные неравенства при наличии неопределенности в матричных коэффициентах. Помимо других возможных приложений предлагаемый подход представляет общетеоретический интерес.

Отметим, что техника D -разбиения впервые была использована в матричном варианте в [13] применительно к устойчивости аффинной комбинации вещественных матриц общего вида; в этой задаче методами D -разбиения полностью удастся исследовать лишь случай одного вещественного или комплексного параметра.

2. Построение областей D -разбиения

2.1. Скалярный случай

Прежде всего рассмотрим случай одного параметра, $\ell = 1$ в (1):

$$A(x) = A + xB, \quad A, B \in \mathbb{S}^{n \times n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Требуется определить отрезки постоянства сигнатуры матрицы $A(x)$ на оси параметра x :

$$D_m = \{x \in \mathbb{R} : A(x) \text{ имеет ровно } m \text{ отрицательных собственных значений}\}.$$

Основные идеи предлагаемого подхода видны на этом простейшем скалярном случае.

Пусть при некотором вещественном x^0 симметричная матрица $A(x) = A + x^0 B$ невырождена и имеет m отрицательных и $n - m$ положительных собственных значений. Изменение количества собственных значений одного знака при изменении x возможно лишь при переходе одного (или нескольких) из них через нуль, т. е. если $\det(A + xB) = 0$ при некотором $x \in \mathbb{R}$. Это означает, что найдется такой ненулевой вектор e , что $(A + xB)e = 0$, т. е. $Ae = -xB e$; иначе говоря, x является обобщенным собственным значением пары матриц A и $-B$, а e — соответствующий ему обобщенный собственный вектор. Таким образом, процедура отыскания границ (точек) D -разбиения в скалярном случае сводится к нахождению всех вещественных обобщенных собственных значений: $\mathbf{eig}(A, -B) \in \mathbb{R}$.

Видно, что максимальное число областей (отрезков на оси x) равно $n + 1$, ибо уравнение $\det(A + xB) = 0$ имеет не более n вещественных решений. С другой стороны, решений может не существовать вовсе; в этом случае D -разбиение состоит из одной области: матрица $A + xB$ имеет постоянное количество отрицательных собственных значений при всех x .

В общем случае несимметричных матриц изменение числа устойчивых собственных значений происходит при пересечении ими мнимой оси, в результате чего появляется дополнительный параметр — частота. Поэтому возможности графического изображения областей D -разбиения ограничиваются случаем одного свободного вещественного или комплексного параметра (см. [13]), а двухпараметрические семейства удается исследовать лишь для некоторых специальных типов матриц.

Область устойчивости D_n . Особый интерес представляет описание области устойчивости D_n семейства; иногда будем называть ее *допустимой областью* D_{feas} . Справедлива следующая лемма.

Лемма. Пусть $A, B \in \mathbb{S}^{n \times n}$ и B невырождена. Пусть $\lambda_i, e_i, i = 1, \dots, n$, — обобщенные собственные значения и соответствующие им обобщенные собственные векторы пары матриц $(A, -B)$. Тогда

1. Если среди λ_i есть комплексные, то D_n пусто.
2. Если все λ_i вещественные, то обозначим

$$\underline{x} = \begin{cases} l \max_{i \in I_-} \lambda_i, I_- \doteq \{i : (B e_i, e_i) < 0\} \neq \emptyset; \\ -\infty, I_- = \emptyset; \end{cases}$$

и

$$\bar{x} = \begin{cases} \min_{i \in I_+} \lambda_i, I_+ \doteq \{i : (B e_i, e_i) > 0\} \neq \emptyset; \\ +\infty, I_+ = \emptyset. \end{cases}$$

Тогда

$$D_n = \begin{cases} (\underline{x}, \bar{x}), & \text{если } \underline{x} < \bar{x}; \\ \emptyset, & \text{если } \underline{x} \geq \bar{x}. \end{cases}$$

Если известно, что $A < 0$, то приведенные формулы принимают вид

$$\underline{x} = \begin{cases} \max_{\lambda_i < 0} \lambda_i, \\ -\infty, & \text{если все } \lambda_i > 0; \end{cases} \quad (2)$$

и

$$\bar{x} = \begin{cases} \min_{\lambda_i > 0} \lambda_i, \\ +\infty, & \text{если все } \lambda_i < 0. \end{cases} \quad (3)$$

2.2. Два параметра

Перейдем к задаче с двумя параметрами:

$$A(x) = A_0 + x_1 A_1 + x_2 A_2, \quad A_i \in \mathbb{S}^{n \times n}, \quad i = 0, 1, 2.$$

Пусть одна из матриц A_1, A_2 , например A_2 , невырождена. Зафиксируем x_1 и обозначим $A = \bar{A}(x_1) \doteq A_0 + x_1 A_1$ и $B \doteq A_2$. Тогда находимся в условиях предыдущего раздела, и критические значения параметра x_2 при данном x_1 находятся как вещественные обобщенные собственные значения $x_2(x_1) = \mathbf{eig}(\bar{A}(x_1), -B)$. Варьируя x_1 , получаем границы областей D -разбиения. При каждом значении x_1 уравнение $\det(\bar{A}(x_1) + x_2 B) = 0$ имеет не более n вещественных корней, поэтому граница D -разбиения состоит не более чем из n ветвей.

Особенно просто задача анализируется для случая диагональных матриц. Имеем

$$\begin{aligned} A_0 &= \text{diag}(a_1, \dots, a_n), & A_1 &= \text{diag}(b_1, \dots, b_n), \\ A_2 &= \text{diag}(c_1, \dots, c_n), & A(x) &= \text{diag}(d_1, \dots, d_n), \end{aligned}$$

где $d_i = a_i + x_1 b_i + x_2 c_i$. Поэтому границы областей задаются n прямыми $a_i + x_1 b_i + x_2 c_i = 0$. Если область D_n непуста, то она — выпуклый многоугольник (возможно, неограниченный), задаваемый системой неравенств $a_i + x_1 b_i + x_2 c_i \leq 0$, $i = 1, \dots, n$. Как известно, n прямых общего положения разбивают плоскость на $n(n+1)/2 + 1$ областей, т. е. в этом случае общее число областей D -разбиения равно этой величине. Число областей D_{n-1} не превосходит n (это области, соседние с ребрами n -угольника D_n).

В общем случае можно отдельно строить область устойчивости

$$D_n = \{x \in \mathbb{R}^2 : A(x) < 0\}$$

(она выпукла). Для каждого x_1 находим отрезок $(\underline{x}_2(x_1), \bar{x}_2(x_1))$ в соответствии с леммой 2.1 (он может быть пустым при некоторых или всех значениях x_1); при варьировании x_1 концы отрезка описывают границу области устойчивости.

Заметим, что D_n заведомо не ограничена, если одна из A_i , $i = 1, \dots, \ell$, знакоопределена.

Способы разметки областей D -разбиения. Разметку можно проводить стандартным образом: построив области D_m на плоскости, выбираем по точке в каждой из них и вычисляем собственные значения соответствующей матрицы.

Пересечения границ D -разбиения соответствуют кратным нулевым собственным значениям матрицы $A(x)$. Пусть x^* — точка двукратного пересечения: $\lambda_1(x^*) = \lambda_2(x^*) = 0$, и пусть остальные $n - 2$ собственных значения отрицательны. Тогда область D_n непуста (это одна из четырех смежных областей).

2.3. Общий случай. Граничный оракул

При $\ell > 2$ графическое изображение областей D -разбиения сложно ($\ell = 3$) или невозможно ($\ell > 3$), однако их можно описывать следующим образом. Рассмотрим точку $x \in \mathbb{R}^\ell$ и направление $y \in \mathbb{R}^\ell$. При $\lambda \in \mathbb{R}$ имеем

$$A(x + \lambda y) = A_0 + \sum_{i=1}^{\ell} x_i A_i + \lambda \sum_{i=1}^{\ell} y_i A_i,$$

и, обозначая

$$A \doteq A_0 + \sum_{i=1}^{\ell} x_i A_i, \quad B \doteq \sum_{i=1}^{\ell} y_i A_i,$$

оказываемся в ситуации с одним параметром $A(\lambda) = A + \lambda B$. Поэтому определение точек границ в выбранном направлении y сводится к нахождению вещественных обобщенных собственных значений λ_i пары матриц $(A, -B)$. Генерируя векторы направлений равномерно на единичной ℓ -мерной сфере в виде $y = \eta/|\eta|$, где η имеет стандартное ℓ -мерное гауссовское распределение, получаем точки $x + \lambda_i y$ границ D -разбиения. Описанная процедура может быть названа *граничным оракулом* по аналогии с оракулом принадлежности (membership oracle) и оракулом отделимости (separation oracle), используемыми в современной теории выпуклой оптимизации. Для любых $x, y \in \mathbb{R}^\ell$ граничный оракул находит точки пересечения луча $x + \lambda y$ с границами неявно заданных множеств D_m или указывает на отсутствие пересечений.

Такой граничный оракул особенно эффективен при характеристике области устойчивости D_n , которая выпукла. Пусть при некотором $x \in \mathbb{R}^\ell$ матрица $A(x)$ (1) отрицательно определена, $x \in D_n$, и y — некоторое направление; тогда критические значения $\underline{\lambda}$, $\bar{\lambda}$, при которых сохраняется знакоопределенность матрицы $A(x + \lambda y)$, находятся по формулам (2), (3). Этот подход удобно использовать для генерирования равномерных распределений на D_n (ср. [14]) и конструирования новых методов полуопределенного программирования. Кроме того, он может быть использован для приближенного отыскания центра тяжести области устойчивости. Этой тематике будет посвящена специальная работа авторов.

3. Примеры

Во-первых, покажем на примерах, что даже для простейших маломерных семейств D -разбиение может быть устроено сложно, а разнообразие типов границ велико. Рассматриваем задачи с двумя параметрами; области D_m при этом наглядно изображаются на плоскости (x_1, x_2) . Обозначим для удобства

$$A \doteq A_0, \quad B \doteq A_1, \quad C \doteq A_2, \quad D(x) \doteq A + x_1 B + x_2 C.$$

В простейших ситуациях уравнения границы нетрудно получить аналитически, решая уравнение $\det D(x) = 0$; там, где это затруднительно, приведем примеры использования техники из подразделов 2.1 и 2.2.

Матрицы 2×2 . Этот простейший случай легко анализируется аналитически, поскольку границы областей задаются квадратным уравнением относительно переменных x_1, x_2 ; в то же время он иллюстрирует многообразие возможных типов областей D -разбиения.

1. *Границы — прямые.* Все типы таких границ можно получить, если матрицы A, B и C диагональные. Граница может состоять из одной или двух прямых, которые определяют две, три или четыре области. Например, при

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

имеем $D(x) = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}$, т. е. границами D -разбиения являются координатные оси $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$. Четыре получающихся области показаны на рис. 1, а; здесь и всюду ниже соответствующие числа на рисунках отвечают количеству отрицательных собственных значений, а граница области устойчивости отмечена жирными линиями.

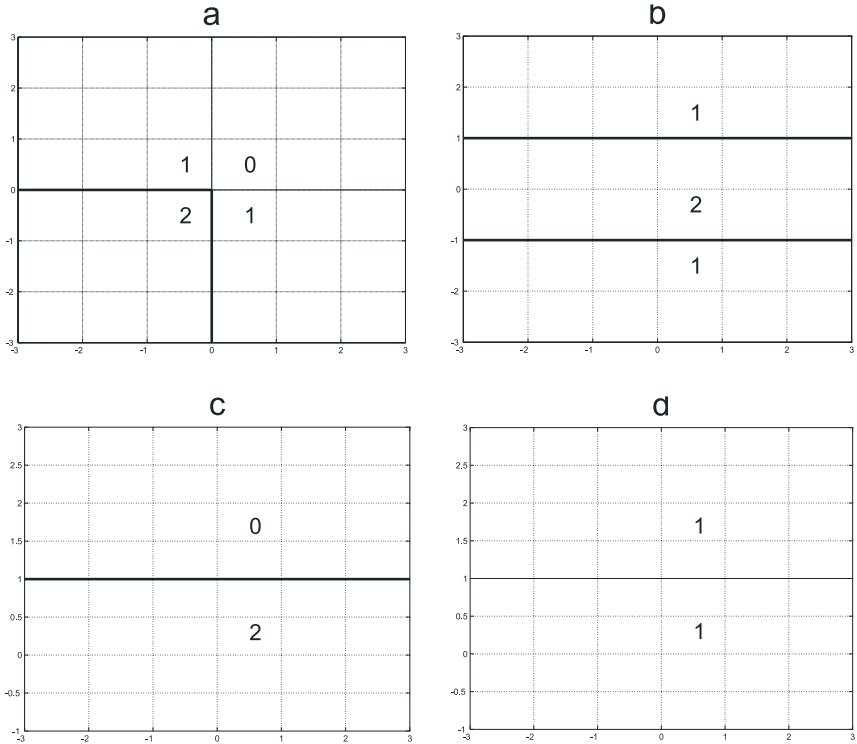


Рис. 1. Примеры D -разбиения для 2×2 матриц

При

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

имеем $D(x) = \begin{pmatrix} -x_2 - 1 & 0 \\ 0 & x_2 - 1 \end{pmatrix}$, и граница состоит из двух параллельных прямых $x_2 = \pm 1$, которые дают три области, в том числе область устойчивости — неограниченную (выпуклую) полосу $\{-1 < x_2 < 1\}$ (рис. 1 б). При $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ границы те же, но область устойчивости отсутствует. Поменяв местами B и C , получаем вертикальную полосу $\{-1 < x_1 < 1\}$; можно сказать, что в этом случае уравнение $\det D(x) = 0$ имеет решение лишь при двух значениях x_1 .

При

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

имеем одну прямую $x_2 = 1$, и областью устойчивости является вся полуплоскость $\{x_2 < 1\}$ (рис. 1,с).

Интересен случай

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

здесь границей также является одна прямая $x_2 = 1$, но при ее пересечении происходит перемена знаков для обоих собственных значений: одного с $+$ на $-$, а другого с $-$ на $+$, так что D -разбиение состоит из двух областей D_1 , разделенных «двукратной» границей (рис. 1,d).

Если обратиться к семействам вида

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

то границы задаются уравнением

$$b_1 b_2 x_1^2 - c^2 x_2^2 + x_1(a_1 b_2 + a_2 b_1) + a_1 a_2 = 0, \quad (5)$$

и при различных комбинациях входящих величин получаем следующие возможности.

2. *Границы отсутствуют.* Уравнение (5) может не иметь вещественных решений; например, при $b_1 = b_2 = 0$, $c \neq 0$, $a_1 a_2 < 0$ имеем $x_2^2 = a_1 a_2 / c^2 < 0$, т. е. D -разбиение состоит из одной области D_1 .

3. *Граница состоит из одной точки.* При $a_1 = a_2 = 0$, $b_1 b_2 = -d^2 < 0$, $c \neq 0$ уравнение имеет вид $d^2 x_1^2 + c^2 x_2^2 = 0$ с единственным решением $x_1 = x_2 = 0$. Другая возможность: $a_1/b_1 = a_2/b_2$. Например, при

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = -A, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

уравнение (5) приобретает вид $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 + 1 = 0$, и граница D -разбиения также состоит из одной точки (1; 0).

4. *Граница — замкнутая кривая;* соответственно, одна из областей D -разбиения ограничена (иначе говоря, уравнение $\det D(x) = 0$ может быть разрешимо лишь для x_1 из некоторого интервала). Это возможно при $b_1 b_2 < 0$, $a_1 a_2 > 0$, $a_1 b_2 + a_2 b_1 = 0$, т. е. граница — эллипс с центром в нуле. В частности, если $b_1 b_2 = -c^2$, то получаем окружность; например,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

дают границу

$$x_1^2 + x_2^2 = 1.$$

5. *Незамкнутые кривые второго порядка.* При $b_1 b_2 > 0$, $a_1 b_2 + a_2 b_1 = 0$, $a_1 a_2 \neq 0$ получаем две ветви гиперболы вида $d^2 x_1^2 - c^2 x_2^2 = a$ (при $a > 0$ уравнение $\det D(x) = 0$ не имеет решений при x_1 из некоторого интервала). Гипербола вида $x_1 x_2 = 1$ получается при

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Граница имеет вид параболы $x_1 = ax_2^2 + b$ в случае когда $a_1 b_2 + a_2 b_1 = 0$ и либо $b_1 = 0$, либо $b_2 = 0$ (уравнение $\det D(x) = 0$ разрешимо для x_1 на полуоси).

Наконец, возможна ситуация, обратная случаю 2:

6. *Каждая точка плоскости – граничная.* Если $\det A = 0$, а $B = \beta A$, $C = \gamma A$ с произвольными β, γ , то

$$\det D(x) = (1 + \beta x_1 + \gamma x_2)^2 \det A = 0$$

для всех x_1, x_2 (это верно и для $\ell > 2$ параметров).

Вообще, все возможные типы и расположения кривых, определяющих границы для 2×2 матриц, можно получить, анализируя коэффициенты уравнения $\det(A + x_1 B + x_2 C) = 0$, которое в общем случае имеет вид

$$s_{11} x_1^2 + s_{22} x_2^2 + s_{12} x_1 x_2 + s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_0 = 0, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} s_{11} &= |B|, & s_{22} &= |C|, & s_{12} &= |B + C| - |B| - |C|, \\ s_1 &= |A + B| - |A| - |B|, & s_2 &= |A + C| - |A| - |C|, & s_0 &= |A| \end{aligned} \quad (7)$$

($|\cdot|$ означает $\det(\cdot)$). Так, по формулам (6)–(7) нетрудно получить границы в виде круга, эллипса, гипербол, параболы общего положения.

Некоторые специальные случаи, $n > 2$. Для матриц более высоких размерностей и для большего числа параметров столь подробный анализ, как выше, сложен, однако в некоторых специальных случаях описание областей также можно получить аналитически.

В качестве одного такого простого примера рассмотрим матрицы размера $2m \times 2m$, имеющие вид

$$\begin{aligned} A &= -I; \\ B &= \text{diag}(b_1, \dots, b_m, -b_m, \dots, -b_1); \\ C &= \overline{\text{diag}}(c_1, \dots, c_m, c_m, \dots, c_1), \end{aligned} \quad (8)$$

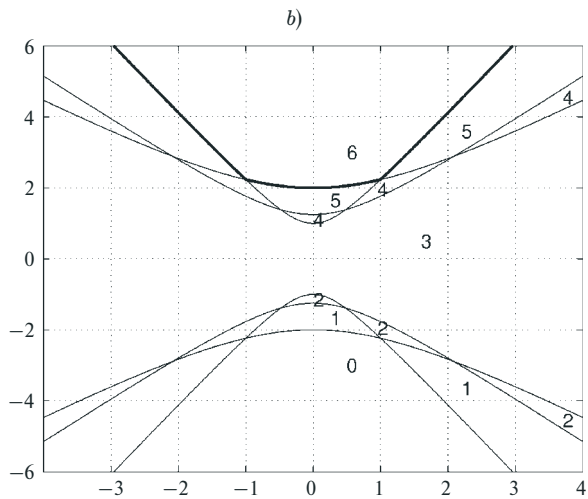
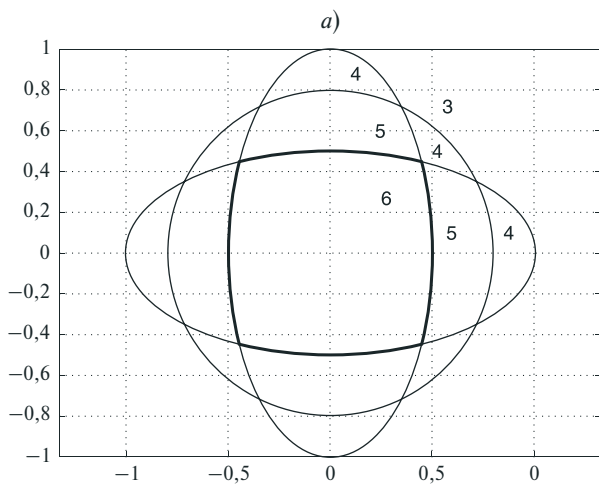


Рис. 2. D -разбиение для семейств (8) и (9)
 с $b_1 = 1$; $b_2 = 1,25$; $b_3 = 2$; $c_1 = 2$; $c_2 = 1,25$; $c_3 = 1$

где $\overline{\text{diag}}$ обозначает антидиагональную матрицу. Нетрудно вычислить определитель

$$\det(A + x_1 B + x_2 C) = (x_1^2 b_1^2 + x_2^2 c_1^2 - 1) \cdot \dots \cdot (x_1^2 b_m^2 + x_2^2 c_m^2 - 1),$$

так что границы D -разбиения — это $m = n/2$ эллипсов $x_1^2 b_i^2 + x_2^2 c_i^2 = 1$ (они разбивают плоскость на $n(n-2)/2 + 2$ областей). На рис. 2 а приведен пример D -разбиения для 6×6 матриц такого вида.

Если в (8) поменять местами A и C :

$$\begin{aligned} A &= \overline{\text{diag}}(c_1, \dots, c_m, c_m, \dots, c_1); \\ B &= \text{diag}(b_1, \dots, b_m, -b_m, \dots, -b_1); \\ C &= -I, \end{aligned} \tag{9}$$

то для определителя получаем

$$\det(A + x_1 B + x_2 C) = (x_1^2 b_1^2 - x_2^2 + c_1^2) \cdot \dots \cdot (x_1^2 b_m^2 - x_2^2 + c_m^2).$$

Границы D -разбиения задаются семейством из m пар гипербол вида $x_1^2 b_i^2 - x_2^2 + c_i^2 = 0$, при этом общее число областей не превосходит $n^2/2 + 1$. Для значений b_i, c_i из предыдущего примера соответствующие области изображены на рис. 2 б.

В общем случае при $\ell > 2$ прямая визуализация областей невозможна, но в некоторых отдельных ситуациях их можно характеризовать явно. Простейшая из них — когда матрицы $A_i \in \mathbb{S}^{n \times n}$ коммутируют. Тогда они одновременно диагонализируемы, и области $D_m \subset \mathbb{R}^\ell$ являются многогранными множествами, задаваемыми пересечениями n гиперплоскостей вида $a_i^0 + v_i^T x = 0$, где $a_i^0 = (A_0)_{ii}$, а вектор v составлен из (i, i) -х элементов матриц A_1, \dots, A_ℓ (здесь матрицы уже приведены к диагональному виду).

Эволюция областей при возмущении коэффициентов. Интересно посмотреть, как изменяются области D_m при внесении возмущений в матрицы. Аналитическое решение задачи громоздко, в то время как техника, предложенная в подразделах 2.1 и 2.2 проста и наглядна; проиллюстрируем ее на примерах 3×3 матриц.

Рассмотрим семейство $D(x) = A + \Delta + x_1 B + x_2 C$,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $\Delta \in \mathbb{S}^{3 \times 3}$ — фиксированное симметричное возмущение. В невозмущенной задаче ($\Delta = 0$) границы D -разбиения задаются тремя прямыми на рис. 3 а.

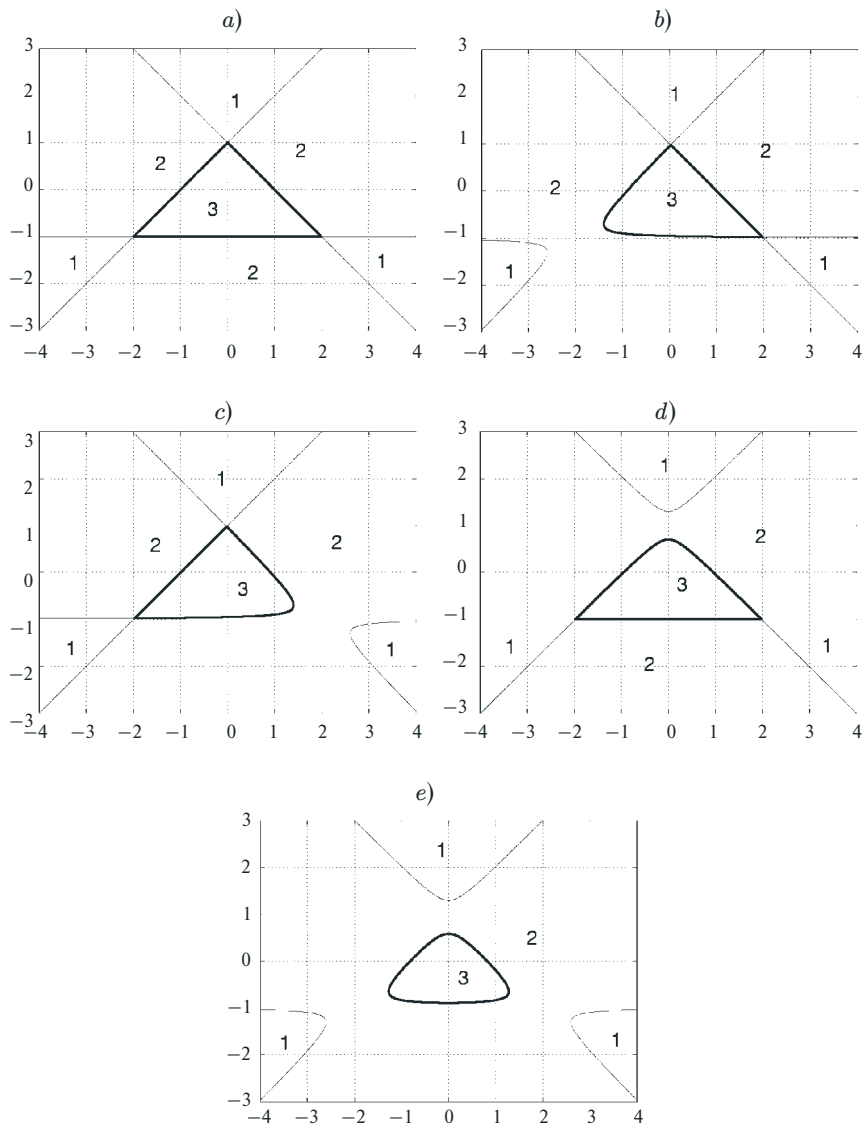


Рис. 3. D -разбиения при различных возмущениях в матрице A

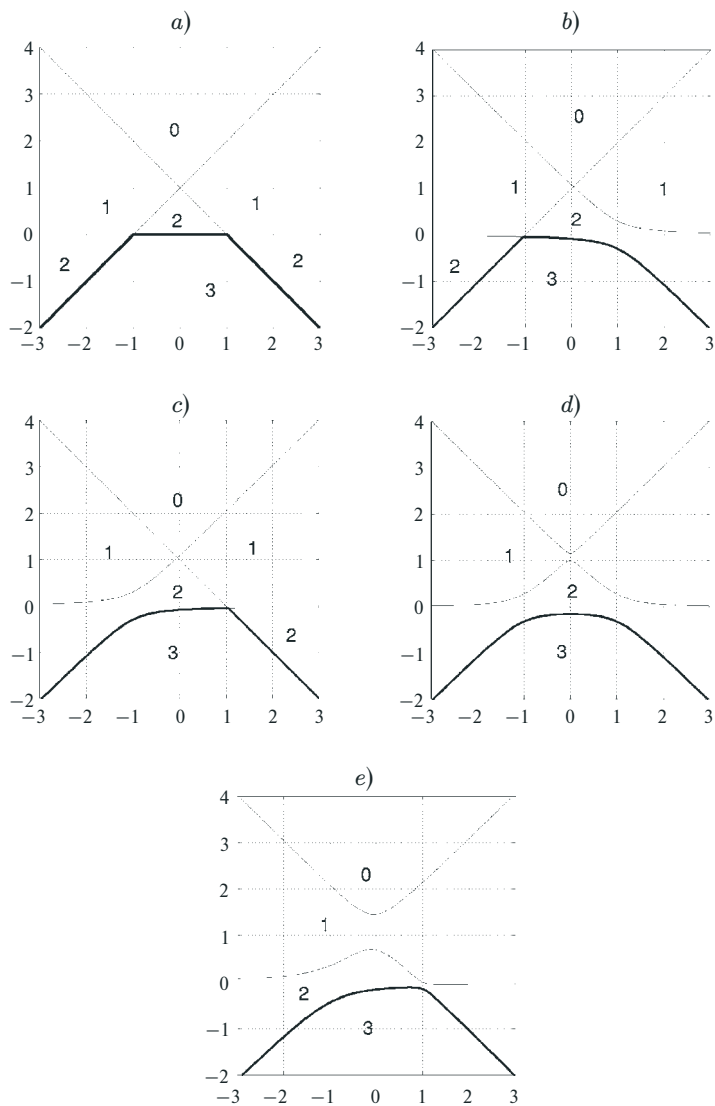


Рис. 4. D -разбиения для семейства (10) при различных возмущениях в A :
 а) $\Delta = 0$; б) $\Delta = \Delta_2$; в) $\Delta = \Delta_3$; д) $\Delta = \Delta_2 + \Delta_3$; е) $\Delta = \Delta_1 + \Delta_3$; везде $\varepsilon = 0,3$

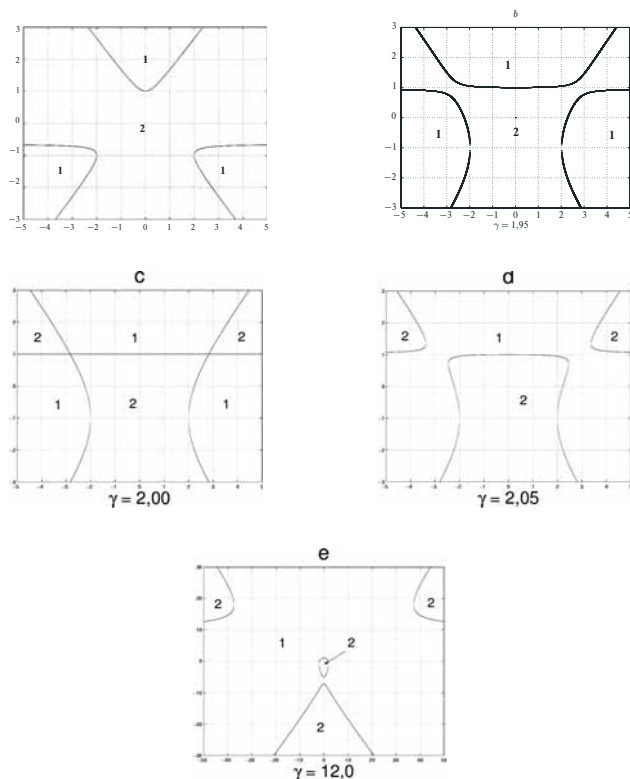


Рис. 5. Эволюция границ D -разбиения с ростом возмущения

При внесении возмущения картина меняется. На рис. 3 b – $3 e$ показаны границы D -разбиения при добавлении к матрице A «элементарных» возмущений

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & 0 \end{pmatrix},$$

с $\varepsilon = 0,3$ и их суммы соответственно.

Для семейства с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

при отсутствии возмущения границы также образованы тремя пересекающимися прямыми (рис. 4 а). Однако внесение таких же возмущений дает совсем иной эффект, см. рис. 4 б–4 е.

Проиллюстрируем еще, как области D -разбиения эволюционируют с ростом возмущения. Для матриц из первого примера возьмем в качестве возмущающей

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

и построим D -разбиение для семейства $A + \gamma\Delta + x_1B + x_2C$ при увеличивающемся γ . При малых $\gamma \lesssim 0,3$ границы имеют вид, близкий к изображенному на рис. 3 е, причем область устойчивости сжимается с увеличением γ . Дальнейший рост возмущения приводит к существенным изменениям геометрии областей. На рис. 5 а–5 е приведены результаты D -разбиения, когда γ принимает значения 0,35; 1,95; 2,0; 2,05; 12,0.

4. Робастность

Одно из важных обобщений предложенного подхода — возможность его модификации на ситуации с неопределенностью. В литературе имеется несколько различных постановок задач ЛМН и предположений о неопределенности (например, см. [6, 15, 16]); здесь рассмотрим случай, когда неопределенность ограничена в спектральной норме.

Пусть

$$A_i(\Delta_i) = A_i + \Delta_i, \quad A_i, \Delta_i \in \mathbb{S}^{n \times n}, \quad \|\Delta_i\| \leq \varepsilon_i, \quad i = 0, \dots, \ell, \quad (11)$$

где $\|\cdot\|$ — *спектральная* норма, а $\varepsilon_i \geq 0$ — заданные числа. Подчеркнем, что рассматриваются только симметричные возмущения Δ_i , чтобы сохранить структуру ЛМН. Приходим к следующей неопределенной линейной функции:

$$A(x, \Delta) = A_0(\Delta_0) + \sum_{i=1}^{\ell} x_i A_i(\Delta_i), \quad (12)$$

$$\Delta \in \mathcal{D} \doteq \{ \{ \Delta_i = \Delta_i^T \}_0^{\ell} : \|\Delta_i\| \leq \varepsilon_i \}.$$

Области D_m робастного D -разбиения теперь определяются следующим образом:

$$D_m^{rob} = \{ x \in \mathbb{R}^{\ell} : A(x, \Delta) \text{ имеет ровно } m \text{ отрицательных} \\ \text{собственных значений } \forall \Delta \in \mathcal{D} \}; \quad (13)$$

в частности, робастно допустимая область:

$$D_n^{rob} = D_{feas}^{rob} = \{x \in \mathbb{R}^\ell : A(x, \Delta) \leq 0 \quad \forall \Delta \in \mathcal{D}\}.$$

Задача заключается в описании границ областей робастного D -разбиения; эти границы теперь определяются как те значения параметров x , при которых матрица $A(x, \Delta)$ оказывается вырожденной при некотором $\Delta \in \mathcal{D}$. В отличие от задачи без возмущений границы робастного D -разбиения размываются в «полосы», внутри которых матрица $A(x, \Delta)$ может иметь различное число отрицательных собственных значений в зависимости от того или иного допустимого значения Δ .

4.1. Один параметр

Как и при анализе задачи без неопределенности, обратимся к однопараметрическим семействам и рассмотрим простейший случай, когда неопределенность присутствует лишь в матрице A :

$$A(x, \Delta) = (A + \Delta) + xB; \quad \Delta \in \mathcal{D} \doteq \{\Delta \in \mathbb{S}^{n \times n} : \|\Delta\| \leq \varepsilon\}.$$

Границы областей (отрезков) робастного D -разбиения определяются из условия вырожденности матрицы $A + xB + \Delta$ при некотором $\Delta \in \mathcal{D}$, т. е. задача заключается в определении радиуса невырожденности матрицы $A + xB$. Основным инструментом здесь служит следующая лемма, на которой основаны все дальнейшие построения.

Лемма. Для невырожденной матрицы $M \in \mathbb{S}^{n \times n}$ симметрический радиус невырожденности

$$\rho(M) \doteq \inf \{\|P\| : P \in \mathbb{S}^{n \times n}, M + P \text{ вырождена}\}$$

равен

$$\rho(M) = \frac{1}{\|M^{-1}\|} = \min_i |\lambda_i(M)|.$$

При этом критическое значение P равно $P = -\lambda e e^T$, где λ — минимальное по абсолютной величине собственное значение M , а e — отвечающий ему собственный вектор.

Лемма 4.1 представляет собой аналог теоремы 3 из [17] (см. также [18]) в симметричном случае; если не оставаться в классе симметричных матриц, то радиус невырожденности дается общей формулой теоремы 3 из [17]. Отметим, что лемма в явном виде указывает минимальное по норме возмущение, при котором матрица M вырождается, — это симметричная матрица $P = -\lambda e e^T$ ранга 1.

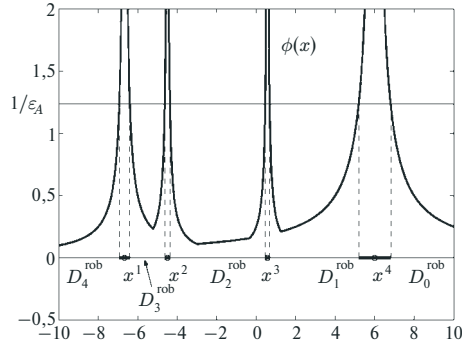


Рис. 6. Робастное D -разбиение по одному параметру с неопределенностью в A

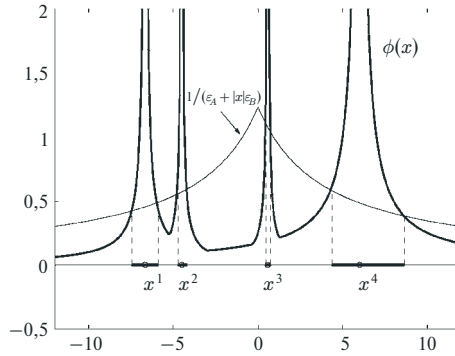


Рис. 7. Робастное D -разбиение по одному параметру с неопределенностью в A и B

В соответствии с леммой матрица $(A + xB) + \Delta$ с возмущениями $\|\Delta\| \leq \varepsilon$ остается робастно невырожденной при значениях x , удовлетворяющих

$$\|(A + xB)^{-1}\| < \frac{1}{\varepsilon}, \tag{14}$$

поэтому, составляя функцию

$$\varphi(x) \doteq \|(A + xB)^{-1}\|,$$

находим численно отрезки робастной невырожденности $\{x : \varphi(x) < 1/\varepsilon\}$.

Пример. Рассмотрим $A(x, \Delta) = A + \Delta_A + xB$ с $A = \text{diag}(-4 \ -6 \ 20 \ 27)$, $B = \text{diag}(7 \ 1 \ 3 \ 6)$ и $\|\Delta_A\| \leq \varepsilon = 0,03\|A\|$. На рис. 6 границы робастного

D -разбиения показаны жирными отрезками, в которые размываются точки $x^i = \mathbf{eig}_i(A, -B)$ — критические значения параметра для невозмущенной задачи. Эти отрезки разделяют области робастности D_i^{rob} , внутри которых матрица $A + xB + \Delta_A$ имеет постоянное число отрицательных собственных значений при всех допустимых возмущениях $\|\Delta_A\| \leq \varepsilon$.

Аналогично анализируется и более общая задача, в которой неопределенность присутствует в обеих матрицах:

$$A(x, \Delta) = (A + \Delta_A) + x(B + \Delta_B); \quad \|\Delta_A\| \leq \varepsilon_A; \quad \|\Delta_B\| \leq \varepsilon_B. \quad (15)$$

Представим $A(x, \Delta) = (A + xB) + (\Delta_A + x\Delta_B)$. Для возмущения $\Delta_A + x\Delta_B$ матрицы $A + xB$ имеем оценку $\|\Delta_A + x\Delta_B\| \leq \varepsilon_A + |x|\varepsilon_B$, причем она точна (равенство достижимо), поскольку Δ_A и Δ_B выбираются независимо. Введем функцию $\varphi(x) = \|(A + xB)^{-1}\|$. В соответствии с леммой 4.1 отрезки робастной невырожденности, или, иными словами, области D_m^{rob} определяются условием

$$\varphi(x) < \frac{1}{\varepsilon_A + |x|\varepsilon_B}.$$

Пример. Рассмотрим те же матрицы, что и в предыдущем примере, но добавим в матрицу B неопределенность (того же уровня): $\|\Delta_B\| \leq \varepsilon_B = 0,03\|B\|$. Описанные выше построения представлены на рис. 7; из-за наличия дополнительной неопределенности отрезки робастности сужаются (границы становятся шире).

4.2. Два параметра

Перейдем к двухпараметрическим семействам, слегка изменяя обозначения:

$$A(x, \Delta) = (A_0 + \Delta_0) + x_1(A_1 + \Delta_1) + x_2(A_2 + \Delta_2); \quad \|\Delta_i\| \leq \varepsilon_i, \quad i = 0, 1, 2.$$

Зафиксируем x_1 и обозначим $A = A_0 + x_1 A_1$ и $B = A_2$, а также $\varepsilon_A = \varepsilon_0 + |x_1|\varepsilon_1$ и $\varepsilon_B = \varepsilon_2$. Оказываемся в ситуации задачи (15): для определения границ составляем функции $\varphi(x_2) = \|(A + x_2 B)^{-1}\|$ и $\varepsilon(x_2) = 1/(\varepsilon_A + |x_2|\varepsilon_B)$ и проверяем условие $\varphi(x_2) < \varepsilon(x_2)$, которое определяет отрезки робастности по x_2 при данном значении x_1 . При варьировании x_1 эти отрезки заполняют двумерные области робастного D -разбиения. С другой стороны, те значения x_2 , при которых условие $\varphi(x_2) < \varepsilon(x_2)$ нарушено, отвечают отсутствию робастности; при варьировании x_1 эти отрезки нарушения замечают двумерные области — границы робастного D -разбиения.

Отметим еще, что так же, как и в ситуации без возмущений, можно строить область D_n^{rob} отдельно от остальных D_m^{rob} , объединяя результаты лемм 2.1 и 4.1.

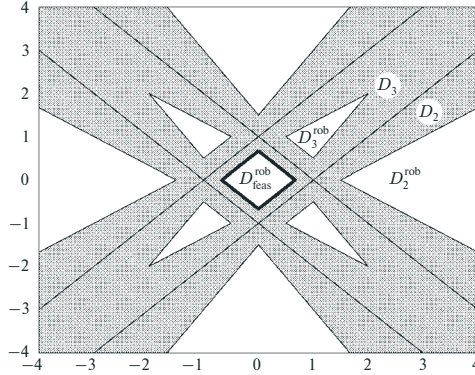


Рис. 8. Робастное D -разбиение по двум параметрам

Пример. Для двухпараметрического семейства из $S^{4 \times 4}$ с матрицами $A_0 = -I$, $A_1 = \text{diag}(-1 \ 1 \ 1 \ -1)$ и $A_2 = \text{diag}(1 \ -1 \ 1 \ -1)$ границы D -разбиения при отсутствии неопределенности представлены двумя парами параллельных прямых на рис. 8. При внесении неопределенности границы размываются в полосы, и области D_m сужаются. В рассматриваемой задаче при возмущениях одинакового относительного уровня $\|\Delta_i\| \leq \varepsilon_i = 0,2\|A_i\|$, $i = 0, 1, 2$, границы робастного D -разбиения показаны серым цветом, а незакрашенные острова являются областями робастности.

4.3. Общий случай. Робастный граничный оракул

Обратимся теперь к общему случаю описания границ областей D_m^{rob} (4) для семейства (11)–(12) при $\ell > 2$. Поступим так же, как и в подразделе 2.3: будем искать точки пересечения одномерного луча с границами робастного D -разбиения. Для простоты ограничимся описанием границы области робастной устойчивости.

Дальнейшие выкладки по существу являются лишь небольшим обобщением рассуждений подраздела 4.1. Действительно, пусть $x \in D_{feas}^{rob}$ — робастно допустимая точка и пусть $y \in \mathbb{R}^\ell$ — некоторое направление. Рассмотрим прямую $x + \lambda y$ и найдем $\underline{\lambda}^{rob}$ и $\bar{\lambda}^{rob}$ — минимальное и максимальное значения λ , при которых отрицательная неопределенность матрицы $A(x + \lambda y, \Delta)$ гарантирована при всех $\Delta \in \mathcal{D}$. Имеем

$$A(x + \lambda y, \Delta) = \widehat{A}(\lambda) + \Delta(\lambda),$$

где обозначено

$$\widehat{A}(\lambda) = A_0 + \sum_{i=1}^{\ell} (x_i + \lambda y_i) A_i, \quad \Delta(\lambda) = \Delta_0 + \sum_{i=1}^{\ell} (x_i + \lambda y_i) \Delta_i,$$

и согласно лемме 4.1 матрица $\widehat{A}(\lambda) + \Delta(\lambda)$ остается невырожденной (следовательно, отрицательно определенной) при всех $\Delta \in \mathcal{D}$, удовлетворяющих

$$\|(\widehat{A}(\lambda))^{-1}\| < \frac{1}{\|\Delta(\lambda)\|}.$$

Поскольку возмущения независимо пробегают свои области неопределенности, оценка

$$\|\Delta(\lambda)\| \leq \|\Delta_0\| + \sum_{i=1}^{\ell} |x_i + \lambda y_i| \|\Delta_i\| = \varepsilon_0 + \sum_{i=1}^{\ell} |x_i + \lambda y_i| \varepsilon_i$$

точна. Поэтому, составляя две скалярные функции

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) &= \left\| \left(A_0 + \sum_{i=1}^{\ell} (x_i + \lambda y_i) A_i \right)^{-1} \right\|, \\ \varepsilon(\lambda) &= \frac{1}{\varepsilon_0 + \sum_{i=1}^{\ell} |x_i + \lambda y_i| \varepsilon_i}, \end{aligned} \quad (16)$$

отрезок $[\underline{\lambda}^{rob}, \bar{\lambda}^{rob}]$ робастной отрицательной определенности семейства $A(x + \lambda y, \Delta)$ определяем численно как $\{\lambda : \varphi(\lambda) \leq \varepsilon(\lambda)\}$.

Ясно, что справедливо включение $[\underline{\lambda}^{rob}, \bar{\lambda}^{rob}] \subset [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]$, где $\underline{\lambda}, \bar{\lambda}$ — критические значения параметра λ при отсутствии неопределенности (минимальное и максимальное значения λ , сохраняющие отрицательную определенность матрицы $A(x + \lambda y, 0)$). Тем самым, проверку $\varphi(\lambda) \leq \varepsilon(\lambda)$ следует осуществлять лишь на отрезке $[\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]$. Таким образом, приходим к следующему робастному граничному орakuлу.

Лемма. Пусть $A(x, 0) < 0$. Для любого $y \in \mathbb{R}^{\ell}$ максимальное и минимальное значения λ , сохраняющие отрицательную определенность матрицы $A(x + \lambda y, \Delta)$ при всех допустимых возмущениях Δ , даются двумя решениями уравнения $\varphi(\lambda) = \varepsilon(\lambda)$ (4.3) на отрезке $[\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]$ (2)–(3).

Аналогично, чтобы решить более простую задачу проверки $x \in D_{feas}^{rob}$ для некоторого $x \in \mathbb{R}^{\ell}$, достаточно рассмотреть невозмущенную матрицу в точке x

$$A(x, 0) = A_0 + \sum_{i=1}^{\ell} x_i A_i,$$

и проверить выполнение неравенства

$$\varepsilon_0 + \sum_{i=1}^{\ell} |x_i| \varepsilon_i < \frac{1}{\|(A(x, 0))^{-1}\|}.$$

5. Заключение

В работе предложена техника построения областей в пространстве параметров, внутри которых аффинное семейство симметричных матриц имеет фиксированное число собственных значений одного знака; приводится обобщение на случай наличия неопределенности в матричных коэффициентах. Для малого числа параметров результаты наглядно иллюстрируются на плоскости или прямой. Для общего случая $\ell > 2$ параметров предложен граничный оракул, с помощью которого удастся просто и эффективно характеризовать допустимую область, в том числе и в робастной постановке.

Среди возможных применений полученных результатов — эллипсоидальное оценивание состояний динамических систем, квадратичная оптимизация, отыскание центра тяжести выпуклых множеств и другие. Перспективным направлением развития предложенной техники является ее применение к решению задач полуопределенного программирования, особенно в робастной постановке, для которой в настоящее время отсутствуют удовлетворительные численные методы.

Доказательство Леммы 2.1. По существу этот результат имеется в [19] (см. утверждение 3.1); для полноты изложения приведем кратко идею доказательства. Пусть все λ_i вещественны и различны, тогда $(Be_i, e_j) = 0$ для $i \neq j$, так что всякий $v \in \mathbb{R}^n$ можно представить в виде $v = \sum_i \alpha_i e_i$ с некоторыми $\alpha_i \in \mathbb{R}$. Нетрудно получить выражение

$$((A + xB)v, v) = \sum_i \alpha_i^2 (Be_i, e_i)(x - \lambda_i),$$

поэтому функция $f(x) = \sum_i \alpha_i^2 (Be_i, e_i)(x - \lambda_i)$ отрицательна при всех α_i лишь для значений x , удовлетворяющих

$$\max_{i:(Be_i, e_i) < 0} \lambda_i < x < \min_{i:(Be_i, e_i) > 0} \lambda_i. \quad \square$$

Доказательство Леммы 4.1. Пусть M невырождена, λ_i — ее собственные значения, и λ — то из них, на котором достигается $\min_i |\lambda_i|$; имеем $\rho(M) = |\lambda|$. Тогда для любой матрицы с $\|P\|_2 < \rho(M)$ и любого $\|x\|_2 = 1$ справедливо

$$\begin{aligned} |((M + P)x, x)| &= |(Mx, x) + (Px, x)| \geq \\ &\geq |(Mx, x)| - |(Px, x)| \geq \min_i |\lambda_i| - \|P\|_2 > 0, \end{aligned}$$

т. е. $M + P$ невырождена.

С другой стороны, рассмотрим $P = -\lambda ee^T$, где e , $\|e\|_2 = 1$, — собственный вектор M , отвечающий собственному значению λ : $Me = \lambda e$. Тогда получаем $\|P\|_2 = |\lambda|$ и $(M + P)e = \lambda e - \lambda ee^T e = 0$. \square

Литература

1. Якубович В. А. Решение некоторых матричных неравенств, встречающихся в теории автоматического регулирования // ДАН СССР. 1962. Т. 143. № 6. С. 1304–1307.
2. Якубович В. А. Метод матричных неравенств в теории устойчивости нелинейных регулируемых систем. I // АиТ. 1964. № 7. С. 1017–1029.
3. Якубович В. А. Метод матричных неравенств в теории устойчивости нелинейных регулируемых систем. II // АиТ. 1965. № 4. С. 577–590.
4. Якубович В. А. Метод матричных неравенств в теории устойчивости нелинейных регулируемых систем. III // АиТ. 1965. № 5. С. 753–763.
5. Чурилов А. Н. Линейные матричные неравенства и численные методы теории систем // АиТ. 2006. № 10.
6. Boyd S. P., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V. Linear matrix inequalities in system and control theory. Philadelphia: SIAM, 1994.
7. Pyatnitskii E. S., Skorodinskii V. I. Numerical methods of Lyapunov matrix construction and their application to the absolute stability problem // Syst. Control Lett. 1982. V. 2. No. 2. P. 130–135.
8. Nesterov Yu., Nemirovskii A. Interior-point polynomial algorithms in convex programming. Philadelphia: SIAM, 1994.
9. Баландин Д. В., Козан М. М. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Наука, 2006.
10. Чурилов А. Н., Гессен А. В. Исследование линейных матричных неравенств (путеводитель по программным пакетам). Изд-во С.-Петербург. ун-та, 2004.
11. Неймарк Ю. И. Устойчивость линеаризованных систем. Л.: ЛКВВИА, 1949.
12. Ben-Tal A., Nemirovski A. Lectures on modern convex optimization: analysis, algorithms and engineering applications. Philadelphia: SIAM, 2001.
13. Gryazina E. N., Polyak B. T. Stability regions in the parameter space: D -decomposition revisited // Automatica. 2006. V. 42. P. 13–26.
14. Calafiore G. Random walks for probabilistic robustness // Proc. 43rd Conf. Decision Control, Bahamas. Dec. 2004. P. 5316–5321.
15. El Ghaoui L., Oustry F., Lebret, H. Robust solutions to uncertain semidefinite programs // SIAM J. Optim. 1998. V. 9. № 1. P. 33–52.
16. Ben-Tal A., Nemirovski A. On tractable approximations of uncertain linear matrix inequalities affected by interval uncertainty // SIAM J. Optim. 2002. V. 12. № 3. P. 811–833.
17. Polyak B. T. Robust linear algebra and robust aperiodicity // A. Rantzer, C. I. Byrnes (eds.) Directions in Mathematical Systems Theory and Optimization. Springer, 2003. P. 249–260.
18. Kahan W. Numerical linear algebra // Canadian Math. Bull. 1966. V. 9. P. 757–801.
19. Polyak B. T. Convexity of quadratic transformations and its use in control and optimization // J. Optim. Theory Appl. 1998. V. 99. № 3. P. 553–583.