РАЗДЕЛ III
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И АЛГОРИТМЫ

Расширения конечных метрик и задача о размещении оборудования*

А. В. Карзанов

В работе дается обзор структурных и алгоритмических результатов автора, касающихся расширений конечных метрических пространств. Одна из основных рассматриваемых проблем допускает интерпретацию в виде известного варианта задачи размещения, имеющего разнообразные приложения.

1. Введение

Задачи размещения отличаются разнообразием постановок и их исследование составляет одно из направлений в дискретной оптимизации (некоторое представление о проблематике дает обзор [18]). Одна из таких задач формулируется следующим образом. Имеются два конечных множества V и T. Для пар $\{x, y\}$ элементов в V заданы величины $c(x, y) \geqslant 0$, и для пар $\{s, t\}$ элементов в T заданы расстояния $d(s, t)$ (удовлетворяющие неравенствам треугольника). Кроме того, для некоторого подмножества $V_0 \subset V$ задано отображение $\gamma_0 : V_0 \to T$. Задача заключается в том, чтобы расширить γ_0 до отображения γ всего множества V в множество T, минимизируя величину

$$f(\gamma) := \sum_{x,\, y \in V} c(x, y) d(\gamma(x), \gamma(y)).$$

Эта задача, известная как вариант задачи о размещении оборудования со взаимными связями, имеет содержательные интерпретации и приложения. Например, в случае, когда c принимает значения 0,1, можно понимать под элементами в V единицы оборудования (электрические устройства, компьютеры и т. п.), а под T — множество мест, где они

* Поддержано грантом 047.011.2004.017 от РФФИ и NWO.

могут быть размещены; при этом допускается, чтобы в одном месте располагалось сколько угодно единиц оборудования. Если $c(x,y)=1$, то устройства x и y должны быть связаны между собой. Подмножество V_0 состоит из устройств, которые уже были размещены ранее (в соответствии с отображением γ_0). Тогда $f(\gamma)$ выражает общую длину соединений при размещении остальных устройств, определяемым γ.

В другой интерпретации (для произвольных $c \geqslant 0$) множества T, V_0 и $V - V_0$ понимаются, соответственно, как множества городов, уже существующих заводов и проектируемых заводов (опять-таки в каждом городе может располагаться много заводов). Число $c(x,y)$ выражает меру взаимодействия заводов x и y, например, объем поставляемой друг другу продукции. Тогда $f(\gamma)$ отражает суммарные транспортные издержки, если проектируемые заводы x будут построены в местах $\gamma(x)$. Можно указать и иные разумные интерпретации.

Данная задача может быть переформулирована в терминах расширений конечных метрических пространств, и настоящая работа представляет собой обзор недавних структурных и алгоритмических результатов автора в этой области. Центральное место будет занимать т. н. задача о минимальном 0-расширении метрики (сокращенно, ЗМНР), эквивалентная указанной выше задаче размещения. Ее определение дается в разделе 2. ЗМНР обобщает классические задачи о минимальном двухполюсном и минимальном многополюсном разрезе в неориентированной сети, и в зависимости от заданной метрики d ее сложностной статус колеблется от эффективной (полиномиальной) разрешимости до труднорешаемости (NP-трудности). Подчеркнем, что мы рассматриваем только методы точного решения задачи.

В разделе 3 излагаются теоремы, дающие полное описание класса метрик, для которых ЗМНР становится эквивалентной ее ослабленной версии — соответствующей задаче линейного программирования, и таким образом, может быть решена в полиномиальное время. Этот класс метрик, называемых минимизируемыми метриками, оказывается весьма широким. Достаточные условия на метрику, при которых ЗМНР становится NP-трудной, описываются в разделе 4. Существуют неминимизируемые метрики, для которых тем не менее ЗМНР имеет эффективное решение; представительный класс таких метрик указан в разделе 5. Заключительный раздел 6 выходит за рамки данной задачи и посвящен обзору результатов об одном обобщении минимизируемых метрик, т. н. примитивно-конечных метриках.

Алгоритмические результаты получены как следствие изучения комбинаторных, полиэдральных и топологических свойств метрик, их расширений и жестких оболочек, на что, главным образом, и был направлен данный цикл работ.

2. Задача о минимальном 0-расширении метрики

Вначале уточним базовую терминологию. Полуметрикой на множестве X называется неотрицательная вещественная функция $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющая

(i) $d(x,x) = 0$,

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$ (симметрия),

(iii) $d(x,y) + d(y,z) \geqslant d(x,z)$ (неравенство треугольника)

для всех $x, y, z \in X$. Значение $d(x,y)$ называется расстоянием между элементами (точками) x и y. Учитывая (i) и (ii), d фактически определяется на множестве $\binom{X}{2}$ неупорядоченных пар различных элементов в X и может отождествляться с соответствующим вектором евклидова пространства $\mathbb{R}^{\binom{X}{2}}$ (координаты которого индексируются элементами в $\binom{X}{2}$). Неупорядоченную пару $\{x,y\}$ будем для краткости обозначать xy (или yx), и будем писать $d(xy)$ вместо $d(x,y)$. Если $d(xy) > 0$ при всех $x \neq y$, то d называется метрикой. Говорят, что пара (X,d) образует (полу)метрическое пространство, и (полу)метрику d называют конечной, если множество X конечное.

Важный пример метрики дает функция d^H расстояний между вершинами связного неориентированного графа $H = (X,E)$, или графовая метрика; здесь $d^H(xy)$ равно минимуму длин (т. е. числа ребер) путей в H, соединяющих вершины $x, y \in X$.

Далее мы рассматриваем метрику d на конечном множестве T, элементы которого будут называться полюсами.

Определение. Полуметрика m на множестве $V \supseteq T$ называется расширением d на множество V, если $m(st) = d(st)$ для всех $s, t \in T$. Если к тому же для каждой точки $x \in V$ существует полюс $s \in T$ такой, что $m(xs) = 0$, то m называется 0-расширением d.

Множество всех 0-расширений метрики d на множество V обозначим $\mathrm{Ext}^0(d,V)$. Задача о минимальном 0-расширении состоит в следующем:

(ЗМНР) Для метрики d на T, конечного множества $V \supseteq T$ и неотрицательной целочисленной функции $c : \binom{V}{2} \to \mathbb{Z}_+$ найти 0-расширение $m \in \mathrm{Ext}^0(d,V)$, минимизирующее скалярное произведение

$$c \cdot m = \sum \left(c(e)m(e) : e \in \binom{V}{2} \right).$$

Замечание 1. Каждое $m \in \mathrm{Ext}^0(d,V)$ взаимнооднозначно соответствует: (i) разбиению $\{X_s : s \in T\}$ множества V, где каждое подмножество X_s содержит ровно один полюс, а именно, s (такое разбиение называется T-разбиением);

(ii) отображению $\gamma : V \to T$, тождественному на T. Здесь каждое X_s совпадает с $\gamma^{-1}(s)$ и определяется как $\{x \in V : m(xs) = 0\}$; мы называем X_s 0-множеством для m. Очевидно, $m(xy) = d(st)$ для любых $x \in X_s$ и $y \in X_t$. Следовательно, ЗМНР эквивалентна задаче нахождения отображения γ, минимизирующего

$$\sum \left(c(xy)d(\gamma(x)\gamma(y)) : xy \in \binom{V}{2} \right),$$

или нахождения T-разбиения $\{X_s : s \in T\}$, минимизирующего сумму величин $c_{st}d(st)$ по всем $st \in \binom{T}{2}$, где

$$c_{st} := \sum \big(c(xy) : x \in X_s,\ y \in X_t\big).$$

Из этого замечания следует, что указанная во Введении задача о размещении оборудования сводится к ЗМНР (фактически эти задачи эквивалентны). Действительно, отображение γ_0 можно считать инъективным (так как задача по-существу не изменяется при склеивании различных элементов $x, y \in V_0$ с $\gamma_0(x) = \gamma_0(y)$ в один элемент $\widetilde{x}$, для которого полагается $c(\widetilde{x}z) := c(xz) + c(yz)$ для всех $z \in V - \{x, y\}$). Более того, можно считать γ_0 биекцией (так как задача не изменяется, если для каждого $s \in T$, не принадлежащего $\gamma_0(V_0)$, добавить новый элемент x к V_0 и положить $\gamma_0(x) := s$ и $c(xy) := 0$ для всех $y \in V$). Таким образом, можно отождествить T с V_0, и мы получаем задачу нахождения отображения $\gamma : V \to T$, тождественного на T и минимизирующего

$$\sum_{xy \in \binom{V}{2}} c(xy)d(\gamma(x)\gamma(y)).$$

В общем случае задача ЗМНР является NP-трудной [9], и нас интересует алгоритмическая сложность этой задачи в зависимости от метрики d. Обозначим ЗМНР(d) задачу с фиксированной метрикой d и произвольными V, c. Укажем несколько примеров d, для которых алгоритмическая сложность ЗМНР(d) была известна ранее.

Пример 1. Известная задача о минимальном многополюсном разрезе в неориентированном графе $G = (V, E)$ с неотрицательными весами $c(e)$ ребер $e \in E$ и множеством полюсов $T \subseteq V$ состоит в нахождении подмножества ребер $E' \subseteq E$ с минимальным суммарным весом $\sum(c(e) : e \in E')$, при удалении которых все полюса окажутся в разных компонентах связности. Иначе говоря, надо найти T-разбиение множества V с минимальной суммой весов ребер, соединяющих разные подмножества в разбиении. Граф G можно считать полным, т. е. $E = \binom{V}{2}$ (иначе добавим недостающие ребра с нулевыми весами). Данная задача — это не что иное, как ЗМНР(d) с метрикой d, устанавливающей расстояния $d(st) = 1$ для всех различных полюсов $s, t \in T$, т. е. с метрикой d^{K_r} полного графа K_r с $r = |T|$ вершинами. При $|T| = 2$ мы получаем классическую задачу о минимальном разрезе, эффективно решаемую многими методами. Однако уже при $|T| = 3$ задача становится сильно NP-трудной; этот нетривиальный результат был получен в [5].

Пример 2. ЗМНР(d^H) эффективно решается для любого дерева H [9, 17].

Пример 3. ЗМНР(d^H) эффективно решается, если H — полный двудольный граф $K_{2,r}$ с вершинными долями размера 2 и r [10].

(Мы пользуемся стандартными понятиями теории сложности, см. [8]. Под временной оценкой (временем, сложностью) алгоритма понимается верхняя оценка числа стандартных операций в наихудшем случае. Вход рассматриваемой задачи может состоять из структурных данных (описание множества, графа и т. п.) и числовых данных (например, весов ребер, расстояний), предполагаемых целочисленными. Неформально говоря, решающий задачу алгоритм называют сильнополиномиальным, если число используемых операций оценивается сверху полиномом от количества исходных данных. Задачу называют сильно NP-трудной, если она оказывается NP-трудной уже для случая, когда размер каждого числового данного ограничен константой.)

Указанные примеры показывают, что алгоритмическая сложность задачи существенно зависит от вида метрики d. Излагаемые ниже результаты определяют сложностной статус задачи, в терминах эффективной (полиномиальной) разрешимости или труднорешаемости (NP-трудности), для широких классов метрик. Заметим, что ЗМНР по-существу не изменяется, если метрика d умножается на скаляр $\lambda > 0$; поэтому мы можем рассматривать заданные метрики с точностью до подобия.

3. Линейная релаксация ЗМНР и минимизируемые метрики

Естественным ослаблением ЗМНР является задача о минимальном расширении:

(ЗМР) Для заданных T, d, V, c (определенных выше) минимизировать $c \cdot m$ среди всех расширений метрики d на множество V.

Множество всех расширений метрики d на множество V обозначим $\mathrm{Ext}(d, V)$. Обозначим $\tau(d, V, c)$ и $\tau^*(d, V, c)$ минимумы целевой функции $c \cdot m$ в задачах ЗМНР и ЗМР, соответственно. Поскольку каждое 0-расширение является расширением, эти минимумы связаны неравенством $\tau^*(d, V, c) \leqslant \tau(d, V, c)$.

Определение. Метрика d на T называется минимизируемой, если для любых $V \supseteq T$ и $c : \binom{V}{2} \to \mathbb{Z}_+$ ЗМР имеет оптимальное решение, являющееся 0-расширением, т. е. выполняется равенство

$$\tau^*(d, V, c) = \tau(d, V, c). \tag{1}$$

Это понятие было введено в [15], и его полезность объясняет следующее

Утверждение 3.1. *Для минимизируемой метрики d ЗМНР разрешима в сильнополиномиальное время.*

Действительно, для произвольных d, V, c ЗМР записывается как задача линейного программирования: минимизировать $c{\cdot}m$ при условиях

$$m(xy) + m(yz) - m(xz) \geqslant 0$$

для всех $x, y, z \in V$ и

$$m(st) = d(st)$$

для всех $s, t \in T$. Матрица ограничений в этой задаче имеет $O(|V|^3)$ строк и $O(|V|^2)$ столбцов и имеет коэффициенты $0, \pm 1$. Следовательно, число битов в двоичной записи матрицы ограничено полиномом от $|V|$, и мы можем применить к ЗМР сильнополиномиальную версию [19] метода эллипсоидов [20]. Таким образом, если метрика d минимизируемая, то значение $\tau(d, V', c') = \tau^*(d, V', c')$ для произвольных V', c' определяется в сильнополиномиальное время. Оптимальное 0-расширение m для заданных d, V, c строится путем последовательного отождествления точек в $V - T$ с полюсами и вычисления чисел $\tau(d, V', c')$ для не более, чем $|V - T||T|$ пар (V', c').

Итак, для минимизируемых метрик d ЗМНР становится «такой же легкой» как и ЗМР. Простейшей минимизируемой метрикой является метрика на двух точках (так как задача о минимальном разрезе, возникающая в этом случае, является задачей целочисленного линейного программирования с вполне унимодулярной матрицей). Другой пример — это метрика графа $K_{2,r}$, что следует из результатов в [10]. В [15] указана простая операция, позволяющая строить минимизируемые графовые метрики из уже известных.

Утверждение 3.2. *Пусть графы H_1, H_2 имеют ровно одну общую вершину. Если метрики d^{H_1} и d^{H_2} минимизируемые, то метрика графа $H_1 \cup H_2$ — тоже минимизируемая.*

Применяя последовательность таких операций объединения к графу K_2, можно построить любое дерево, поэтому метрика d^H всякого дерева H — минимизируемая.

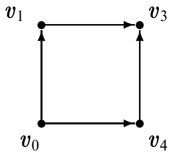
Возникает естественный вопрос: как велико множество минимизируемых метрик (рассматриваемых с точностью до подобия)? Это множество оказывается весьма широким, более того, его удается полностью описать. Здесь ключевым результатом является описание минимизируемых графовых метрик.

3.1. Минимизируемые метрики графов

Эти метрики характеризуются в следующей теореме.

Теорема 3.1 [11]. *Метрика d^H связного графа $H = (T, U)$ минимизируемая тогда и только тогда, когда граф H двудольный, ориентируемый и не содержит изометрических k-циклов при $k \geqslant 6$.*

Напомним, что граф называется двудольным, если все его циклы имеют четную длину. k-цикл — это (простой) цикл C_k на k вершинах. Объясним другие используемые понятия. Подграф или цикл $H' = (T', U')$ графа H называется изометрическим, если $d^{H'}(st) = d^H(st)$ для всех $s, t \in T'$ (для произвольного подграфа H' справедливо только $d^{H'}(st) \geqslant d^H(st)$). Граф H называется ориентируемым, если его ребра можно ориентировать так, что противоположные ребра любого 4-цикла $(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_4, v_4 = v_0)$ ориентированы в разные стороны вдоль цикла, т. е. для $i = 1, 2$ ребро e_i ориентировано как (v_{i-1}, v_i) тогда и только тогда, когда e_{i+2} ориентировано как (v_{i+2}, v_{i+1}).



Графы H в теореме 3.1 были названы в [11] рамочными, поскольку характерным примером такого графа служит прямоугольная часть двумерной решетки — граф $\Gamma_{p,q}$, вершины которого соответствуют векторам (i, j), $i = 1, \ldots, p$, $j = 1, \ldots, q$, а ребра — парам $\{(i, j), (i', j')\}$, удовлетворяющим $|i - i'| + |j - j'| = 1$. Примеры графов с минимизируемыми

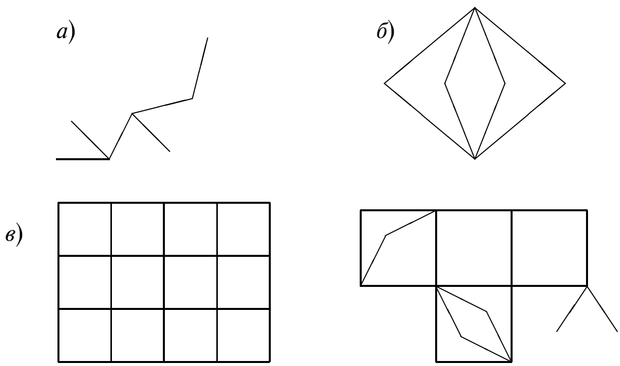


Рис. 1. Примеры рамочных графов: *а*) дерево *б*) $K_{2,4}$, *в*) $\Gamma_{5,3}$

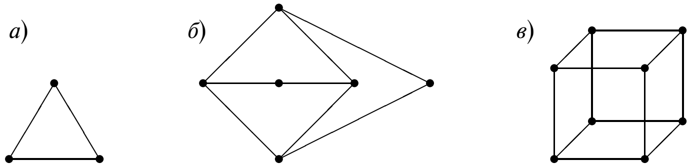


Рис. 2. Примеры нерамочных графов: *а*) недвудольный граф, *б*) неориентируемый граф, *в*) граф с изометрическим 6-циклом

метриками изображены на рис. 1, а с неминимизируемыми метриками — на рис. 2.

Доказательство теоремы 3.1 весьма трудоемкое. Поясним два момента доказательства, они понадобятся нам в последующем изложении.

1. Прежде всего свойство минимизируемости метрики (не обязательно графовой) переформулируется в полиэдральных терминах. Множество расширений $\mathrm{Ext}(d, V)$ любой метрики d образует (неограниченный) многогранник в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{\binom{V}{2}}$, описываемый указанными выше линейными ограничениями. Вершины доминанта

$$D(d, V) := \mathrm{Ext}(d, V) + \mathbb{R}_+^{\binom{V}{2}}$$

этого многогранника называются экстремальными расширениями d на V. В частности, каждое 0-расширение для d является экстремальным. Из линейного программирования следует, что для каждой вершины m в $D(d, V)$ найдется вектор $c \in \mathbb{R}_+^{\binom{V}{2}}$ такой, что $c \cdot m < c \cdot m'$ для любого другого расширения $m' \in \mathrm{Ext}(d, V)$, и обратно, для любого $c \in \mathbb{R}_+^{\binom{V}{2}}$ минимум $c \cdot m$ достигается на некоторой вершине в $D(d, V)$. Следовательно,

(2) метрика d минимизируемая тогда и только тогда, когда для любого $V \supseteq T$ каждое экстремальное расширение d на V является 0-расширением.

Тем самым, чтобы установить неминимизируемость той или иной метрики, достаточно найти ее экстремальное расширение, не являющееся 0-расширением. Для проверки экстремальности расширения применяется легко доказываемый критерий:

(3) $m \in \mathrm{Ext}(d, V)$ экстремальное тогда и только тогда, когда m однозначно определяется множеством своих T-геодезических — последовательностей $(v_0, \ldots, v_k)$ точек в V, для которых $v_0, v_k \in T$ и

$$\sum_{i=1}^{k} m(v_{i-1}v_i) = m(v_0v_k).$$

Доказательство необходимости условий в теореме 3.1 дается посредством прямых комбинаторных конструкций экстремальных расширений, которые не являются 0-расширениями, в случаях, когда граф H недвудольный или неориентируемый или содержит изометрический 6-цикл.

2. Доказательство достаточности в теореме 3.1 существенно опирается на установленные в [11] структурные свойства жесткой оболочки метрики d^H рамочного графа H. Объясним это понятие.

Расширение (V, m) метрического пространства (T, d) называется жестким, если не существует другого расширения (V, m') для d, такого что $m'(xy) \leqslant m(xy)$ для всех $x, y \in V$ (мы допускаем бесконечные V). В частности, каждое экстремальное расширение — жесткое.

Избелл [7] установил, что для всякого метрического пространства (T, d) (конечного или бесконечного) существует и единственно жесткое расширение $\mathcal{T}(d) = (X, \delta)$ со следующими свойствами:

(4) δ является метрикой, и любое жесткое расширение (V, m) для (T, d) изометрически погружаемо в $\mathcal{T}(d)$, т. е. существует отображение $\omega : V \to X$, тождественное на T и удовлетворяющее

$$\delta(\omega(x)\omega(y)) = m(xy)$$

для всех $x, y \in V$.

Такое $\mathcal{T}(d)$ называется жесткой оболочкой (tight span) для d (в литературе также встречаются названия: инъективная оболочка, T_X-пространство, универсальное жесткое расширение). Важные свойства жестких оболочек были найдены Дрессом [6]. Так при конечном T жесткая оболочка представима в виде метризованного полиэдрального комплекса размерности не более $|T|/2$ (он определяется неявно). Например, $\dim(\mathcal{T}(d^{C_4})) = 2$ и $\dim(\mathcal{T}(d^{B_3})) = 4$, где C_4 — 4-цикл, и B_3 — скелетный граф 3-куба (см. рис 2(f)). $\mathcal{T}(d)$ одномерно для метрик d взвешенных деревьев и только для них.

В случае рамочного графа $H = (T, U)$ нам удается явно построить жесткую оболочку (X, δ) метрики d^H, которая оказывается 2-мерным симплициальным комплексом с метрикой типа ℓ_1. Это является центральным местом всего доказательства. Далее показывается, что эта оболочка обладает важным дополнительным свойством:

(5) существует (разрывное) отображение $\gamma : X \to T$, тождественное на T и переводящее каждую T-геодезическую для (X, δ) в геодезическую для (T, d^H).

Это свойство позволяет завершить доказательство следующим образом. Для произвольного экстремального расширения (V, m) метрики d^H возьмем отображение $\omega : V \to X$, указанное в (4). Тогда полуметрика m'

на V, определяемая как $m'(xy) := \delta(\gamma\omega(x)\gamma\omega(y))$ для $x, y \in V$, является 0-расширением. Более того, ввиду (5), каждая T-геодезическая для m является T-геодезической и для m'. Согласно (3), это означает, что m совпадает с m'. Теперь минимизируемость d^H следует из (2).

3.2. Минимизируемые метрики общего вида

Теорема 3.1 обобщается на общие метрики. Для формулировки этого обобщения нам потребуются дополнительные понятия. Для метрики d на множестве T и пары полюсов $s, t \in T$ определим интервал $I(s, t)$ этой пары как множество полюсов $v \in T$, удовлетворяющих

$$d(sv) + d(vt) = d(st)$$

(или, как говорят, лежащих между s и t).

Определения.

(а) Под опорным графом для d понимается (единственный) минимальный граф $H(d) = (T, U)$, позволяющий однозначно восстановить метрику d по ее значениям на ребрах. Формально: вершины $s, t \in T$ соединяются ребром в $H(d)$ тогда и только тогда, когда $I(s, t) = \{s, t\}$.

(б) (Полу)метрика d называется модулярной, если для любых трех точек $s_0, s_1, s_2 \in T$ три интервала $I(s_0, s_1)$, $I(s_1, s_2)$, $I(s_2, s_0)$ имеют хотя бы один общий элемент, называемый медианой тройки.

(в) Граф H называется модулярным, если его метрика d^H модулярная, и наследственно модулярным, если каждый изометрический подграф в H — модулярный.

Легко видеть, что любой модулярный граф является двудольным. Треугольник K_3 дает простейший пример немодулярного графа, а скелетный граф B_3 3-куба — простейший пример модулярного, но не наследственно модулярного графа (так как B_3 содержит изометрический 6-цикл, который не является модулярным графом).

Замечание 2. Бандельт [2] доказал совпадение трех множеств: множества наследственно модулярных графов, множества двудольных графов, не содержащих изометрического k-цикла при $k \geqslant 6$, и множества модулярных графов, не содержащих изометрического 6-цикла. Следовательно, рамочные графы, фигурирующие в п. 3.1, — это ориентируемые наследственно модулярные графы.

Полное описание класса минимизируемых метрик дает следующая теорема.

Теорема 3.2 [3]. *Метрика d минимизируемая тогда и только тогда, когда d модулярная, и ее опорный граф $H(d)$ рамочный.*

Между модулярными метриками и модулярными графами имеется тесная связь. Назовем ребра e, e' модулярного графа $H = (T, U)$ проективными, если имеется последовательность ребер $e = e_1, e_2, \dots, e_k = e'$ такая, что e_i, e_{i+1} — противоположные ребра некоторого 4-цикла, $i = 1, \dots, k-1$. Максимальное по включению множество взаимно проективных ребер в H называется орбитой. (Например, решеточный граф $\Gamma_{p,q}$ (см. рис. 1(c)) имеет $p + q - 2$ орбит, а граф $K_{2,r}$ при $r \geqslant 3$ — только одну орбиту.) Из результатов Бандельта в [1] выводятся следующие свойства:

(6) (а) опорный граф модулярной метрики является модулярным; (б) модулярная метрика постоянна в пределах каждой орбиты своего опорного графа; (в) для модулярного графа $H = (T, U)$ и функции $\ell : U \to \mathbb{R}_+$, которая постоянна на каждой орбите в H, полуметрика $d = d^{H,\ell}$ является модулярной, и каждый кратчайший путь в H является геодезической для d.

Здесь $d^{H,\ell}$ обозначает полуметрику графа H, ребра e которого имеют длины $\ell(e)$.

Связь между модулярными метриками и графами (свойства в (6)) позволяет преобразовать доказательство теоремы 3.1 в доказательство теоремы 3.2, что и делается в работе [3]. Доказательство достаточности также апеллирует к результату в [12], выявляющему соответствие между жесткой оболочкой модулярной метрики d с рамочным опорным графом H и жесткой оболочкой d^H.

Остается спросить: можно ли эффективно распознать свойство минимизируемости метрики d? Очевидно, проверка модулярности d и построение опорного графа $H(d)$ осуществляются эффективно. Также эффективно проверяется, является ли $H(d)$ ориентируемым. Теперь, ввиду замечания 2, для выяснения, является ли $H(d)$ рамочным, достаточно проверить отсутствие в нем изометрического 6-цикла; это можно проделать путем перебора всех 6-элементных подмножеств в T. Таким образом, справедливо

Утверждение 3.3. *Принадлежность метрики d на T множеству минимизируемых метрик распознается за время, полиномиальное от $|T|$.*

В заключении отметим, что условия модулярности метрики d и ориентируемости ее опорного графа оказываются существенными для возможности эффективного решения ЗМНР(d): в следующем разделе мы увидим, что при нарушении любого из этих условий задача становится труднорешаемой. С другой стороны имеется богатый класс неминимизируемых метрик, для которых задача все еще разрешима в полиномиальное время, как объясняется в разделе 5.

4. Труднорешаемые случаи ЗМНР

Как отмечалось в разделе 2, задача ЗМНР сильно NP-трудная для простейшей немодулярной метрики d^{K_3}, согласно результату о труднорешаемости задачи о минимальном 3-полюсном разрезе [5]. Это обобщается следующим образом.

Теорема 4.1 [14]. *Для каждой фиксированной рациональной метрики d задача о минимальном 0-расширении является сильно NP-трудной, если метрика d немодулярная или если опорный граф $H(d)$ неориентируемый.*

Доказательство этой теоремы развивает подход в [5]. В основе лежит построение определенных примеров нарушения субмодулярности, что позволяет в рассматриваемых случаях свести к ЗМНР NP-полную задачу о максимальном разрезе графа, разделяющем две выделенные вершины (MAX CUT). Поясним идею доказательства для наших случаев.

Рассмотрим произвольные T, d, V, c. Для $s, t \in T$ и $x, y \in V - T$ обозначим $\tau(s, x \mid t, y)$ минимум $c{\cdot}m$ по всем 0-расширениям $m \in \mathrm{Ext}^0(d, V)$ таким, что $m(xs) = m(yt) = 0$. Хорошо известно, что функция пропускной способности разрезов графа является субмодулярной. В наших терминах это выражается так (при $T = \{s, t\}$):

$$\tau(s, x \mid t, y) + \tau(s, y \mid t, x) \geqslant \tau(s, x \mid s, y) + \tau(t, x \mid t, y). \tag{7}$$

Предположим, для некоторой метрики d имеется такой пример (V, c) с выделенными s, t, x, y, что для $\widehat{\tau} := \tau(d, V, c)$ и некоторого $\alpha > 0$ выполняется

$$\begin{aligned} &\tau(s, x \mid t, y) = \tau(s, y \mid t, x) = \widehat{\tau};\\ &\tau(s, x \mid s, y) = \tau(t, x \mid t, y) = \widehat{\tau} + \alpha;\\ &\tau(s', x \mid t', y) \geqslant \widehat{\tau} + \alpha \quad \text{для всех других пар } \{s', t'\} \text{ в } T. \end{aligned} \tag{8}$$

В частности, для s, t, x, y нарушается (7). 0-расширение m назовем квазиоптимальным, если $c \cdot m = \widehat{\tau} + \alpha$ и $m(px) = m(py) = 0$ для $p = s$ или $p = t$. При наличии указанного примера труднорешаемость ЗМНР(d) показывается так. Рассмотрим задачу MAX CUT на графе $\overline{G} = (\overline{V}, \overline{E})$ с выделенными вершинами $\bar{s}$, $\bar{t}$. Заменим каждое ребро $e = \bar{x}\bar{y} \in \overline{E}$ копией V_e множества V, производя отождествления $s = \bar{s}$, $t = \bar{t}$, $x = \bar{x}$, $y = \bar{y}$. Также отождествим одноименные полюса в этих $|\overline{E}|$ копиях. В результате получается множество точек $\mathcal{V}$, включающее $\overline{V}$ и T, и c определяет функцию ζ на $\binom{\mathcal{V}}{2}$ естественным образом.

Для полученной сети $(\mathcal{V}, \zeta)$ любое $\{\bar{s}, \bar{t}\}$-разбиение $\{X, \overline{V} - X\}$ множества $\overline{V}$ продолжается до T-разбиения π множества $\mathcal{V}$ со следующим свойством: если ребро $e \in \overline{E}$ принадлежит (не принадлежит) разрезу $\delta(X)$, то проекция π на V_e определяет оптимальное (соответственно, квазиоптимальное) решение для d, V, c. Ввиду (8), это дает равенство

$$\tau(d, \mathcal{V}, \zeta) = |\overline{E}|(\widehat{\tau} + \alpha) - \Delta\widehat{\tau},$$

где Δ — максимальная мощность $(\bar{s}, \bar{t})$-разреза в $\overline{G}$. Следовательно, MAX CUT сводится к ЗМНР для $d, \mathcal{V}, \zeta$.

Для метрик d в теореме 4.1 требуемые примеры (V, c, s, t, x, y) действительно удается сконструировать, что и доказывает эту теорему.

5. ЗМНР с орбитно-аддитивными метриками

Теоремы 3.2 и 4.1 оставляют еще не определенной алгоритмическую сложность ЗМНР(d) для неминимизируемых модулярных метрик d с ориентируемым опорным графом $H(d)$.

Один класс, содержащий неминимизируемые метрики, для которого ЗМНР эффективно решаемая, был указан Чепоем [4]. Он образован всеми медианными метриками. Метрика d на T называется медианной (или сильно-модулярной), если каждая тройка точек в T имеет единственную медиану (определение медианы дано в разделе 3). Соответственно, медианный граф — это граф H с медианной метрикой d^H. Из (6) следует, что модулярная метрика d является медианной тогда и только тогда, когда ее опорный граф $H(d)$ медианный. Примером медианного графа служит скелетный граф B_p куба размерности $p \geqslant 3$; его метрика d^{B_p} — не минимизируемая (так как B_p содержит изометрический 6-цикл), но из теоремы Чепоя следует, что ЗМНР(d^{B_p}) разрешима в сильнополиномиальное время.

Важные свойства медианных графов, установленные Мулдером и Скрайвером [16], переносятся на медианные метрики следующим образом:

(9) (i) метрика d на T является медианной тогда и только тогда, когда она представима в виде положительной линейной комбинации $h_1\rho^{A_1} + \ldots + h_k\rho^{A_k}$ разрезных полуметрик на T, и семейство

$$\mathcal{F} = \{A_1, \ldots, A_k, T - A_1, \ldots, T - A_k\}$$

обладает свойством Хэлли, т. е. любое подсемейство попарно пересекающихся множеств в $\mathcal{F}$ имеет непустое общее пересечение;

(ii) множества $A_1, \ldots, A_k$ в (i) определяются однозначно с точностью до дополнений, и разрезы $\delta(A_1), \ldots, \delta(A_k)$ графа $H(d)$ — это в точности его орбиты.

(Здесь под разрезом $\delta(A)$ графа $H = (T, U)$, порождаемым подмножеством $A \subset T$, понимается множество ребер с одним концом в A и другим в $T - A$. Разрезная полуметрика ρ^A устанавливает расстояние 1 между каждой точкой в A и каждой точкой в $T - A$ и расстояние 0 в остальных случаях.) В [11] указан более простой алгоритм, решающий ЗМНР в сильнополиномиальное время для любой медианной метрики d. Он сводит задачу к нахождению k минимальных разрезов $\delta(X_i)$ во взвешенном полном графе (K_V, c), удовлетворяющих $A_i = X_i \cap T$, $i = 1, \dots, k$ (ср. (9)), и затем преобразует их в оптимальное 0-расширение для d, V, c, используя стандартную технику распараллеливания разрезов.

Эти результаты существенно обобщаются в [13], где дается эффективный метод решения ЗМНР для широкого класса модулярных метрик. Этот класс определяется в терминах т. н. орбитных графов.

Для орбиты Q модулярного графа $H = (T, U)$ (см. определение в разделе 3) орбитный граф H_Q получается из H стягиванием каждого ребра в $U - Q$ и затем отождествлением кратных ребер, если такие возникают. Наш основной алгоритмический результат отражен в следующей теореме.

Теорема 5.1 [13]. *Пусть d — модулярная метрика с опорным графом $H = (T, U)$. Пусть для каждой орбиты Q в H выполняется*:

(i) *орбитный граф H_Q рамочный*, *и*

(ii) *H_Q изоморфен некоторому подграфу графа (T, Q).*

Тогда ЗМНР(d) разрешима в сильнополиномиальное время.

Замечание 3. Из (9) выводится, что каждый орбитный граф медианного графа — это простейший рамочный граф K_2. Поэтому класс метрик d в данной теореме включает все медианные метрики.

Доказательство теоремы, представленное в [13], состоит из нескольких этапов и сводит ее к теоретико-графовому утверждению, касающемуся существования ретракций для определенных модулярных графов. Дадим краткие пояснения к основным моментам доказательства.

Рассмотрим сначала произвольную модулярную метрику d с опорным графом $H = (T, U)$ и орбитами $Q_1, \dots, Q_k$ в H. Обозначим:

(а) h_i — значение $d(e)$, $e \in Q_i$;

(б) $H_i = (T_i, U_i)$ — граф H_{Q_i};

(в) $\mathcal{F}_i = \{A_i(t) : t \in T_i\}$ — разбиение T, где $A_i(t)$ — множество вершин в H, стягиваемое в t при образовании H_i;

(г) ℓ_i — характеристическую функцию орбиты Q_i в $\mathbb{R}^U$;

(д) d_i — полуметрику d^{H,ℓ_i} на T.

Показывается, что каждое множество $A_i(t)$ замкнутое относительно интервалов для d^H, и что свойства медианных метрик в (9) обобщаются на произвольные модулярные метрики.

Лемма 5.1.

(i) $d = h_1 d_1 + \ldots + h_k d_k$.

(ii) *Семейство* $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{F}_k$ *обладает свойством Хэлли.*

Пусть теперь заданы $V \supseteq T$ и $c : \binom{V}{2} \to \mathbb{R}_+$. Из (i) в лемме следует, что любое $m \in \mathrm{Ext}^0(d, V)$ представимо как $h_1 m_1 + \ldots + h_k m_k$, где m_i — 0-расширение d_i на V. Тогда

$$\tau(d, V, c) \geqslant h_1 \tau(d^{H_1}, V_1, c_1) + \ldots + h_k \tau(d^{H_k}, V_k, c_k), \tag{10}$$

где V_i получается из V стягиванием каждого подмножества $A_i(t)$ в точку t, и c_i индуцируется c. Нас интересует ситуация, когда ЗМНР(d) сводится к задачам с метриками $d^{H_1}, \ldots, d^{H_k}$, которые «выглядят проще».

Определение. Метрика d называется орбитно-аддитивной, если (10) обращается в равенство для любых V, c.

Для такой метрики d оптимальное значение (и оптимальное 0-расширение) находится эффективно, если ЗМНР(d^{H_i}) эффективно разрешимая для всех i. Последнее имеет место, в частности, в случае рамочных графов H_i в силу утверждения 3.1 и теоремы 3.1. Вопрос, какие модулярные метрики являются орбитно-аддитивными, несколько упрощается путем сведения к чисто графовым метрикам. А именно, с помощью леммы 5.1 показывается, что метрика d орбитно-аддитивная, если опорный граф $H(d)$ орбитно-аддитивный (т. е. его метрика орбитно-аддитивная). В силу этого теорема 5.1 сводится к следующему утверждению.

Теорема 5.2. *Модулярный граф H, удовлетворяющий свойствам* (i) *и* (ii) *в теореме* 5.1, *является орбитно-аддитивным.*

Дальнейшее сведение приводит к проблеме ретракции (для двудольного графа — это отображение его вершин на вершины выделенного подграфа, сохраняющее ребра). Рассмотрим декартово произведение $K = (V(K), E(K)) = H_1 \times \ldots \times H_k$ орбитных графов (т. е. $V(K) = T_1 \times \ldots \times T_k$, и вершины $z = (z_1, \ldots, z_k)$ и $w = (w_1, \ldots, w_k)$ смежны тогда и только тогда, когда они различаются ровно в одной, скажем i-й, компоненте, и при этом $z_i w_i \in U_i$). Каждому полюсу $v \in T$ сопоставим (единственную) вершину $\phi(v) = z$ в K такую, что $v \in A_i(z_i)$, $i = 1, \ldots, k$. Рассмотрим 0-расширения $m_1, \ldots, m_k$ вышеуказанных полуметрик $d_1, \ldots, d_k$ на одно и то же множество V. Сопоставим каждой точке $x \in V$ (единственную) вершину $\psi(x) = z$ в K такую, что $m_i(xv) = 0$ для (всех) $v \in A_i(z_i)$. Из соотношений $d^H = d_1 + \ldots + d_k$ и $d^K(zw) = d^{H_1}(z_1 w_1) + \ldots + d^{H_k}(z_k w_k)$ можно получить следующие важные свойства ϕ и ψ.

Лемма 5.2.

(i) $d^H(st) = d^K(\phi(s)\phi(t))$ *для всех* $s, t \in T$, *т. е.* ϕ *индуцирует изометрическое вложение* H *в* K.

(ii) $m(xy) = d^K(\psi(x)\psi(y))$ *для всех* $x, y \in V$, *где* $m := m_1 + \ldots + m_k$.

Теперь цель состоит в том, чтобы показать следующее.

Теорема 5.3. *Пусть* K *— декартово произведение рамочных графов* $H_i = (T_i, U_i)$, $i = 1, \ldots, k$. *Пусть* K' *— изометрический модулярный подграф в* K, *удовлетворяющий следующему условию* $(*)$: *для некоторого* $s \in V(K')$ *любая вершина в* K, *отличающаяся от* s *только в одной компоненте, принадлежит* K'. *Тогда существует ретракция* K *на* K', *т. е. отображение* $\gamma : V(K) \to V(K')$, *тождественное на* $V(K')$ *и сохраняющее ребра.*

Поясним, почему теорема 5.2 получается из теоремы 5.3. Возьмем $K' = \phi(H)$ (это корректно, так как условие $(*)$ на K' следует из (ii) в теореме 5.1). Поскольку γ не увеличивает, а ϕ сохраняет расстояния, для отображения $\sigma := \phi^{-1}\gamma$ имеем $d^K(zw) \geqslant d^H(\sigma(z)\sigma(w))$ для всех $z, w \in V(K)$. Для заданных V, c пусть m_i — 0-расширение d_i на V с минимальным $c \cdot m_i$. Тогда $c \cdot m_i = \tau(d^{H_i}, V_i, c_i) =: \tau_i$, и для расширения $m := m_1 + \ldots + m_k$ метрики d^H имеем

$$c \cdot m = \tau_1 + \ldots + \tau_k. \tag{11}$$

Если бы m уже было 0-расширением, мы сразу же получили бы требуемое равенство в (10). В общем случае мы находим 0-расширение m', «не худшее», чем m, используя σ и ψ. А именно: положим

$$m'(xy) := d^H\big(\sigma(\psi(x))\sigma(\psi(y))\big), \quad x, y \in V.$$

Это m' является 0-расширением d^H, и поскольку σ не увеличивает расстояния, а ψ изометрическое (по лемме 5.2), имеем $m' \leqslant m$. Следовательно, $\tau(d^H, V, c) \leqslant c \cdot m' \leqslant c \cdot m$, что вместе с (11) дает нужное равенство в (10).

При доказательстве теоремы 5.3 достаточно ограничиться случаем двухорбитных графов: $k = 2$. А именно: с помощью свойства Хэлли для $\mathcal{F}$ ((ii) в лемме 5.1), показывается, что

(12) ретракция $\gamma : K \to K'$ существует, если для всех $1 \leqslant i < j \leqslant k$ существует ретракция γ_{ij} графа $K_{ij} := H_i \times H_j$ на подграф K'_{ij}, являющийся проекцией K' в K_{ij}; для каждой вершины $z \in V(K)$ точка $\gamma(z)$ эффективно строится при помощи таких γ_{ij}.

Показать справедливость теоремы 5.3 для случая $k = 2$ — ключевое место всего доказательство теоремы 5.1. Требуемая ретракция конструируется с использованием свойств жестких оболочек метрик рамочных графов.

Замечание 4. В случае медианного графа H ретракция γ_{ij} определяется тривиально (ввиду $H_i \simeq H_j \simeq K_2$) и индуцирует операцию распараллеливания соответствующей пары минимальных разрезов (применяемую в вышеупомянутом алгоритме решения ЗМНР(d) для медианных метрик d в [11]). Наш метод для общего случая может быть назван методом распараллеливания рамочных полуметрик.

В [13] выдвинуты гипотезы, что условие (ii) в теореме 5.1 можно исключить, и что задача становится NP-трудной, если хотя бы один орбитный граф H_i нерамочный. Подтверждение этих гипотез (вместе с результатами, представленными в предыдущих разделах) сделало бы известным сложностной статус ЗМНР (d) для всех метрик d.

6. Метрики с конечным числом примитивных расширений

Примитивным расширением конечной метрики d называется ее экстремальное расширение (см. раздел 3) со строго положительными расстояниями между различными точками, т. е. являющееся метрикой. Обозначим $\Pi(d)$ множество всех примитивных расширений d на конечные множества. Свойство экстремальности полуметрики сохраняется как при стягивании любого ее 0-множества в одну точку, так и при раздувании любой точки в 0-множество. Поэтому каждое $m \in \Pi(d)$ служит минимальным представителем соответствующего подмножества экстремальных расширений для d (а именно, множества всех 0-расширений самого m). Тривиальное примитивное расширение метрики d — это она сама, и, ввиду (2), минимизируемость d эквивалентна единственности этого примитивного расширения: $\Pi(d) = \{d\}$.

Интересен вопрос: какие d имеют конечные множества $\Pi(d)$? Такие метрики называются примитивно-конечными, или ПК-метриками. Ответ на вопрос дается в [12], и в этом разделе мы кратко излагаем основные полученные результаты. Класс ПК-метрик будет охарактеризован комбинаторно, а также через размерность жестких оболочек. Для этих метрик также устанавливаются дополнительные структурные, топологические и алгоритмические свойства.

Прежде всего дадим некоторые примеры ПК-метрик графов $H = (T, U)$.

(а) d^H для $H = K_3$ имеет только одно нетривиальное примитивное расширение, а именно, $\frac{1}{2}d^G$, где G — звезда с множеством концов T.

(б) Показывается, что $|\Pi(d^H)|$ конечно и не превосходит 2^{pq+1} для полного двудольного графа $H = K_{p,q}$.

(в) $\Pi(d^H)$ бесконечно для $H = C_6$ и $H \simeq K^-_{3,3}$ (графа, получаемого удалением одного ребра в $K_{3,3}$).

Первая (главная) теорема дает два описания ПК-метрик.

Теорема 6.1. *Для рациональной метрики d на T следующие свойства эквивалентны:*

(i) *множество* $\Pi(d)$ *конечное;*

(ii) λd *— подметрика метрики* d^H *для некоторого рамочного графа* H *и целого* $\lambda > 0$;

(iii) *опорный граф* $H(m)$ *модулярного замыкания* (V, m) *метрики* d *двудольный и не содержит в качестве изометрического подграфа ни* C_k *при* $k \geqslant 6$, *ни* $K^{-}_{3,3}$ (такой граф называется полурамочным).

Здесь под модулярным замыканием метрики d понимается ее примитивное модулярное расширение (V, m), строящееся определенным итеративным процессом добавления недостающих медиан (для рациональной конечной метрики процесс всегда конечный).

Следующая теорема касается дробности примитивных расширений. Полуметрика d на X называется циклически четной, если

$$d(xy) + d(yz) + d(zx) \in 2\mathbb{Z}$$

для всех $x, y, z \in X$.

Теорема 6.2. *Каждое примитивное расширение циклически четной ПК-метрики d — полуцелочисленное. Если к тому же опорный граф модулярного замыкания d рамочный, то каждое примитивное расширение целочисленное.*

Эта теорема получается в [12] как «побочный продукт» в процессе доказательства основной теоремы 6.1. Другой результат, получаемый при доказательстве и представляющий самостоятельный интерес, касается классификации метрик по размерности их жестких оболочек.

Теорема 6.3. *Метрика d примитивно-конечная тогда и только тогда, когда*

$$\dim(\mathcal{T}(d)) \leqslant 2.$$

Более того, для любой ПК-метрики d $\mathcal{T}(d)$ изоморфно $\mathcal{T}(d^H/\lambda)$ для некоторого рамочного графа H и числа $\lambda > 0$. Другими словами, с точностью до подобия, жесткие оболочки размерности $\leqslant 2$ для конечных метрик — это жесткие оболочки метрик рамочных графов и только они.

Эффективное распознавание ПК-метрик оказывается возможным благодаря результатам Дресса [6], характеризующим размерность жесткой оболочки в локальных терминах. Он доказал, что для метрического пространства (X, d):

(13) (i) если $\dim(\mathcal{T}(d)) = k < \infty$, то d имеет подметрику d' на $2k$ точках такую, что $\dim(\mathcal{T}(d')) = k$;

(ii) если $|X|=2k$, то $\dim(\mathcal{T}(d))=k$ тогда и только тогда, когда существует биекция $\pi: X\to X$, удовлетворяющая (а) $\pi(v)\neq v$ и $\pi^2(v)=v$ для всех $v\in X$ (инволюция), и (б) $\sum(d(v\pi(v)): v\in X)>\sum(d(v\pi'(v)): v\in X)$ для всех других биекций $\pi': X\to X$.

Ввиду (ii) в этом утверждении и теоремы 6.3, примитивная конечность проверяется в сильнополиномиальное время перебором всех биекций на 6-точечных подмножествах. В свою очередь, (i) и теорема 6.3 позволяют охарактеризовать ПК-метрики в локальных терминах.

Следствие 6.1. *Метрика является примитивно-конечной тогда и только тогда, когда каждая ее подметрика на* 6 *точках — примитивно-конечная.*

Доказательство основной теоремы 6.1 использует свойства минимизируемых графовых метрик. Скажем несколько слов о структуре доказательства. Чтобы получить импликацию (ii) $\to$ (i), показывается, что мощность множества $\Pi(\lambda d)$ (равная мощности $\Pi(d)$) оценивается сверху общим количеством подметрик в примитивных расширениях для d^H, поэтому $|\Pi(d^H)|=1$ обеспечивает конечность $|\Pi(d)|$. В основе доказательства (i) $\to$ (iii) лежит явная конструкция бесконечной последовательности примитивных расширений для метрик графов C_k $(k\geqslant 6)$ и $K^-_{3,3}$. Доказательство ключевой импликации (iii) $\to$ (ii) основано на идее расщепления орбиты полурамочного графа с орбитно-инвариантными длинами ребер. Определенным образом организованная последовательность операций расщепления орбит, примененная к модулярному замыканию m и его опорному графу, строит искомый рамочный граф H, в метрику которого вкладывается λm (и следовательно, λd) для некоторого целого λ. Отметим, что если d циклически четная, то $\lambda=2$, а если к тому же все орбиты $H(m)$ ориентируемые, то $\lambda=1$; это дает теорему 6.2.

Литература

1. *Bandelt H.-J.* Networks with Condorcet solutions // European Journal of Operations Research. 1985. № 20. P. 314–326.
2. *Bandelt H.-J.* Hereditary modular graphs // Combinatorica. 1988. № 8. P. 149–157.
3. *Bandelt H.-J.*, *Chepoi V. and Karzanov A. V.* A characterization of minimizable metrics in the multifacility location problem // European Journal of Combinatorics. 2000. № 21. P. 715–725.
4. *Chepoi V.* A multifacility location problem on median spaces // Discrete Applied Mathematics. 1996. № 64. P. 1–29.
5. *Dalhaus E.*, *Johnson D. S.*, *Papadimitriou C.*, *Seymour P. D. and Yannakakis M.* The complexity of the multiterminal cuts // SIAM Journal on Computing. 1994. № 23 (4). P. 864–894.

6. *Dress A. W. M.* Trees, tight extensions of metric spaces, and the cohomological dimension of certain groups // Advances in Mathematics. 1984. № 53. P. 321–402.
7. *Isbell J.* Six theorems about metric spaces // Comment. Math. Helv. 1964. № 39. P. 65–74.
8. *Гэри М. Р. и Джонсон Д. С.* Вычислительные Машины и Труднорешаемые Задачи. Мир, Москва, 1982.
9. *Kolen A.* Location problem on trees and in the rectilinear plane // Proc. of the Stitchting Mathematisch Centrum. Amsterdam, 1982.
10. *Karzanov A. V.* Half-integral five-terminus flows // Discrete Applied Mathematics. 1987. № 18 (3). P. 263–278.
11. *Karzanov A. V.* Minimum 0-extensions of graph metrics // European Journal of Combinatorics. 1998. № 19. P. 71–101.
12. *Karzanov A. V.* Metrics with finite sets of primitive extensions // Annals of Combinatorics. 1998. № 2. P. 213–243.
13. *Karzanov A. V.* One more well-solved case of the multifacility location problem // Discrete Optimization. 2004. № 1. P. 51–66.
14. *Karzanov A. V.* Hard cases of the multifacility location problem // Discrete Applied Mathematics. 2004. № 143 (1–3). P. 368–373.
15. *Karzanov A. V. and Manoussakis Y.* Minimum $(2, r)$-metrics and integer multiflows // European Journal of Combinatorics. 1996. № 17. P. 223–232.
16. *Mulder H. M. and Schrijver A.* Median graphs and Helly hypergraphs // Discrete Mathematics. 1979. № 25. P. 41–50.
17. *Picard J. C. and Ratliff H. D.* A cut approach to the rectilinear distance location problems // Operations Research. 1978. № 26. P. 422–434.
18. *Tansel B. C., Fransis R. L. and Lowe T. J.* Location on networks: A survey I, II // Management Science. 1983. № 29. P. 482–511.
19. *Tardos E.* A strongly polynomial algorithm to solve combinatorial linear programs // Operations Research. 1986. № 34. P. 250–256.
20. *Хачиян Л. Г.* Полиномиальные алгоритмы в линейном программировании // Журнал Вычислит. Математики и Математич. Физики. 1980. № 20. С. 51–68.